PENENTUAN KOMPONEN UTAMA PADA REGRESI LINIER BERGANDA

OLEH

H U M A I R A H

88 03 097

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1994

S K R I P S I

O L E H

H U M A I R A H

88 03 097

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

1994

PENENTUAN KOMPONEN UTAMA
PADA REGRESI LINIER BEGANDA

Skripsi untuk melengkapi tugas dan
memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar sarjana

o l e h
H U M A I R A H
88 03 097

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
1994

PENENTUAN KOMPONEN UTAMA
PADA REGRESI LINIER BERGANDA

Disetujui oleh

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
(Drs. H.M. YUSUF WAHAB,MS)	(Drs. RAUPONG)

Pada tanggal, Agustus 1994

UCAPAN TERIMA KASIH

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji syukur sedalam-dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. atas berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya, serta tak lupa penulis kirimkan salawat dan taslim atas junjungan nabi besar Muhammad Saw. sebagai utusan Allah SWT. untuk meluruskan jalan kehidupan di dunia ini, sehingga skripsi ini dapat terwujud meskipun dalam bentuk yang sederhana dengan segala kekurangannya.

Skripsi ini adalah merupakan suatu keberhasilan kerja yang telah melibatkan tenaga dan pemikiran yang mendalam dari berbagai pihak, oleh karena itu tidaklah berlebihan jika penulis menyampaikan penghargaan yang dalam dan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Rektor Universitas Hasanuddin
2. Bapak Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
3. Bapak Ketua Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin
4. Bapak Drs.H.M.Yusuf Wahab, MS selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Drs.Raupong selaku dosen pembimbing pertama yang senantiasa memberikan bimbingan dan pengetahuan serta perhatian sejak awal sampai akhir penulisan skripsi ini.

5. Bapak-bapak dan Ibu-ibu dosen jurusan Matematika Universitas Hasanuddin yang telah memberikan pengetahuan dan membantu dalam menghadapi masalah perkuliahan dan Bapak Staf Tata Usaha jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
6. Kedua orang tua penulis yang tercinta dan tersayang ayahanda Drs.KAMALUDDIN ARFAH dan ibunda Hj.ST.ZAIDAH, yang telah melahirkan, mendidik (mengasuh) dan memberikan motivasi hingga terselesainya skripsi ini.
7. Teman-teman se-Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam juga se-jurusan Matematika khususnya Mustajiba, Flora C.Poli dan Rafiuddin serta adik Irmawati yang telah memberikan inspirasi.
8. Akhirnya kakak tercinta Ny.Kamzidah Wahid Syafar, Drs.Zulfikar, Muh.Zaimal dan Muh.Zaiful serta adik tercinta Hilmawati dan Zulharbi yang telah memberikan dorongan baik moril maupun material.

Semoga budi baik dan bantuannya yang telah disumbangkan itu mendapat imbalan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

وَاللّٰهُ العَالَمْ بِسَوَّبِ

Ujungpandang *16 Syafar 1415* / *25 Juli 1994*

PENULIS

HUMAIRAH

ABSTRAK

Gagasan pokok *Analisis Komponen Utama (AKU)* adalah mereduksi dimensi himpunan data yang terdiri atas sejumlah bilangan besar yang saling berhubungan dan terdapat banyak keragaman hubungan peubah dalam himpunan data. Hal ini diperoleh dengan mentransformasikan peubah himpunan data ke peubah himpunan baru disebut *komponen utama* yang tidak saling berhubungan, sehingga terdapat beberapa keragaman peubah dalam himpunan data.

ABSTRACT

The main idea of the principle component analysis is to reduce data set where contains a large number variables and interrelated variation of variables. It's gained by transformed data set variables into a new set variables which is called the principle component, it is not interrelated, therefore there a few variation of variables in data set.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

P E N D A H U L U A N

1.1. Latar Belakang

Dalam bidang statistika dikenal adanya analisis statistika yang pada saat ini sedang mengalami pertumbuhan yang pesat. Perkembangan sejalan dengan alat elektronika komputer yang dapat mengolah data secara efektif dan efisien. Analisis tentang masalah distribusi pasangan peubah dinamakan analisis bivariat (bivariate analysis); satu peubah bebas dan satu peubah tak bebas. Pada skripsi ini, yang akan dianalisis adalah analisis multivariat (multivariate analysis), yaitu analisis yang mengandung peubah bebas lebih dari satu.

Dalam menganalisis regresi linier berganda kesukaran yang sering dihadapi ialah kemungkinan adanya interkorelasi antara beberapa peubah bebas, yang acapkali disebut dengan istilah multikolinieri-tas (atau kolinieritas saja). Dengan menggunakan analisis komponen utama, masalah multikolinieritas antara peubah bebas dapat teratasi.

Istilah komponen utama pertama kali diajukan oleh Harold Hotelling dalam makalah klasiknya "Analysis of a complex of statistical variables into principal components".

Prinsip dasar dari komponen utama adalah

a. Pertama, dimensi peubah baru lebih kecil dari dimensi peubah asal dan saling bebas (tidak berkorelasi).
b. Kedua, peubah baru dapat menyimpan sebagian besar informasi yang terkandung dalam peubah asal.

Komponen utama yang merupakan peubah baru yang saling bebas dihubungkan dengan peubah tak bebas (yang diberi lambang Y) dalam suatu persamaan matematika yang dinamakan persamaan regresi.

1.2. Ruang Lingkup Pembahasan

Bentuk Umum yang akan dibicarakan dalam tulisan ini adalah:

$$\underline{Z} = A'\underline{X} \qquad (I.1)$$

dengan

$\underline{Z}$ = komponen utama

A = matriks yang melakukan transformasi

$\underline{X}$ = peubah asal

A adalah matriks yang melakukan transformasi terhadap peubah asal $\underline{X}$ sehingga diperoleh vektor $\underline{Z}$ yang dinamakan komponen utama. Dalam hal ini $\underline{Z}$, A dan $\underline{X}$ masing-masing berbentuk sebagai berikut :

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_j \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} \end{bmatrix} \text{dan } \underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Komponen utama pada regresi multivariat terdiri atas komponen utama pertama yang ditulis sebagai:

$$Z_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{p1}X_p$$

atau

$$Z_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

sehingga

$$Z_1 = \underline{a}_1'\underline{X} \qquad \text{(I.2)}$$

dengan

$$\underline{a}_1' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} \end{bmatrix}$$

Komponen utama kedua yang ditulis sebagai:

$$Z_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{p2}X_p$$

atau

$$Z_2 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

sehingga

$$Z_2 = \underline{a}_2'\underline{X} \qquad (I.3)$$

dengan

$$\underline{a}_2' = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{p2} \end{bmatrix}$$

dan seterusnya.

Secara umum komponen utama ke-j dapat ditulis sebagai:

$$Z_j = a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + \ldots + a_{pj}X_p$$

atau

$$Z_j = \underline{a}_j'\underline{X} \qquad (I.4)$$

dengan

$$\underline{a}_j' = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{pj} \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

Dengan menentukan komponen utama dalam penggunaan banyak peubah, perhitungan akan menjadi lebih sederhana dan efisien.

BAB II

KOMPONEN UTAMA

2.1. Pengertian Analisis Komponen Utama

Andaikan suatu populasi yang mempunyai N buah individu diambil sampel acak berukuran n (n<N). Peubah yang diamati adalah : $\underline{x}$ berukuran p dan jika ditulis dalam bentuk vektor,

$$\underset{(p\times 1)}{\underline{X}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Hasil pengamatan dapat ditulis dalam bentuk matriks berukuran pxn sebagai berikut :

$$\underset{(p\times n)}{\underline{X}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

x_{ij} adalah nilai pengamatan ke-j pada peubah ke-i. Matriks $\underline{X}$ mempunyai sebaran peubah ganda tertentu (biasanya normal ganda) dengan nilai tengah $\underline{\mu}$ dan matriks peragam $\tilde{\Sigma}$. Biasanya matriks peragam $\tilde{\Sigma}$ tidak diketahui dan diduga dengan matriks S.

Untuk menyederhanakan dimensi peubah yang diamati, dilakukan transformasi peubah asal ke peubah baru yang saling bebas.
Peubah baru (Z) disebut sebagai komponen utama yang merupakan hasil transformasi dari peubah asal (X). Dalam mentransformasikan peubah asal dipilih matriks A sehingga diperoleh model dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{p2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

atau

$$\underline{z} = A'\underline{x} \qquad \text{(II.1)}$$

Komponen utama pertama adalah kombinasi linier terbobot peubah asal yang menerangkan keragaman data terbesar dan dinotasikan sebagai:

$$z_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{p1}x_p$$

atau

$$z_1 = \underline{\alpha}_1'\underline{x} \quad ;$$

dengan $\underline{\alpha}_1'$ adalah vektor normal yang dipilih mempunyai sifat ortogonal (tegak lurus); sehingga memaksimumkan keragaman data komponen utama pertama. Keragaman data komponen utama pertama adalah

$$S^2_{z_1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(z_{i1} - \bar{z}_1 \right)^2$$

dengan

$$z_{i1} = \underline{\alpha}'_1 \underline{x}_i \qquad \text{dan} \qquad \bar{z}_1 = \underline{\alpha}'_j \underline{\bar{x}}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (\alpha_{j1} x_{ij}) \qquad\qquad = \sum_{j=1}^{p} (\alpha_{j1} \bar{x}_j)$$

sehingga

$$S^2_{z_1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p} \alpha_{j1} \left(x_{ij} - \bar{x}_j \right) \right]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1}-\bar{x}_1 \\ x_{i2}-\bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{ip}-\bar{x}_p \end{bmatrix} \right]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1}-\bar{x}_1 \\ x_{i2}-\bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{ip}-\bar{x}_p \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} (x_{i1}-\bar{x}_1) & (x_{i2}-\bar{x}_2) & \cdots & (x_{ip}-\bar{x}_p) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{p1} \end{bmatrix} \right]$$

$$S^2_{z_1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{\alpha}'_1 (\underline{x}_i - \bar{x})(\underline{x}_i - \bar{x})' \; \underline{\alpha}_1 \right]$$

$$= \underline{\alpha}'_1 \left[\frac{1}{n-1} \; (\underline{x}_i - \bar{x})(\underline{x}_i - \bar{x})' \right] \underline{\alpha}_1$$

$$S^2_{z_1} = \underline{\alpha}'_1 S \underline{\alpha}_1$$

Komponen utama kedua adalah kombinasi linier terbobot peubah asal yang bebas dari komponen utama pertama serta memaksimumkan sisa keragaman data setelah diterangkan oleh komponen utama pertama (maksimum kedua setelah komponen utama pertama) dan dinotasikan sebagai

$$z_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{p2}x_p$$

atau

$$z_2 = \underline{\alpha}'_2 \underline{x} \quad ;$$

dengan $\underline{\alpha}'_2$ adalah vektor normal yang dipilih sehingga memaksimumkan keragaman data komponen utama kedua, serta bebas terhadap vektor pembobot $\underline{\alpha}'_1$ dari komponen utama pertama yang mempunyai kendala-kendala :

$$\underline{\alpha}'_2 \underline{\alpha}_2 = 1 \qquad \text{serta} \qquad \underline{\alpha}'_1 \underline{\alpha}_2 = 0$$

sehingga z_1 dan z_2 tidak berkorelasi.

Secara umum komponen utama ke-j $(j=1,2,\ldots,p)$ dapat dinotasikan sebagai

$$z_j = \alpha_{1j}x_1 + \alpha_{2j}x_2 + \ldots + \alpha_{pj}x_p$$

atau

$$z_j = \underline{\alpha}'_j\underline{x} \quad ;$$

dengan $\underline{\alpha}'_j$ adalah vektor pembobot yang dipilih sehingga memaksimumkan sisa keragaman data,

$$S^2_{z_j} = \underline{\alpha}'_j S \underline{\alpha}_j$$

dengan kendala-kendala :

$$\underline{\alpha}'_i\underline{\alpha}_j = \begin{cases} 1 & ;\ \text{untuk } i=j \\ 0 & ;\ \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Untuk mendapatkan vektor pembobot $\underline{\alpha}'_j$ yang merupakan koefisien pembobot peubah-peubah asal bagi komponen utama ke-j diperoleh dari matriks peragam $\tilde{\Sigma}$ yang diduga oleh matriks S yang diperoleh melalui persamaan:

$$S = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'.$$

Vektor $\underline{\alpha}'_j$ merupakan vektor ciri ortonormal padanan akar ciri terbesar ke-j dari matriks S.

2.2. Tujuan Analisis Komponen Utama

Peubah bebas berukuran besar disederhanakan dengan menggunakan komponen utama. Komponen utama menghilangkan korelasi antara peubah bebas tanpa mengubah informasi yang terkandung dalam peubah asal. Peubah bebas disederhanakan dengan menyusutkan dimensi peubah asal membentuk kelompok-kelompok yaitu:

$$\underline{x} = \left[\underline{x}_1 \;\; \underline{x}_2 \; . \; . \; . \; \underline{x}_p \right] ;$$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} , \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} , \ldots , \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix}$$

Penyusutan dimensi peubah bebas yang diamati dirasakan sangat penting dalam suatu penelitian (pekerjaan). Karena peubah bebas berdimensi kecil namun cukup menyimpan sebagian besar informasi yang diinginkan maka perhitungan akan menjadi lebih sederhana dan efisien.

2.3. Menentukan Skor Komponen Utama

Komponen utama pertama

$$z_1 = \underline{\alpha}_1' \underline{x}$$

akan diperoleh dengan memaksimumkan $\underline{\alpha}'_1 S\underline{\alpha}_1$ dengan kendala $\underline{\alpha}'_1\underline{\alpha}_1=1$. Hal ini dilakukan dengan menggunakan metode pengganda Lagrange dengan cara mencari turunan

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}_1}\left[\underline{\alpha}'_1 S\underline{\alpha}_1 - l_1(\underline{\alpha}'_1\underline{\alpha}_1 - 1)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}_1}\left[\underline{\alpha}'_1 S\underline{\alpha}_1 + l_1(1 - \underline{\alpha}'_1\underline{\alpha}_1)\right]$$

$$= 2(S\underline{\alpha}_1 - l_1\underline{\alpha}_1) = 0$$

Jadi

$$(S - l_1 I_p)\underline{\alpha}_1 = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

yang disebut persamaan karakteristik (persamaan ciri).

Misalkan l_1 adalah akar ciri terbesar dari matriks S dan $\underline{\alpha}_1$ vektor ciri yang bersesuaian dengan akar ciri serta I_p adalah matriks identitas berukuran pxp.

Persamaan (II.2) diubah menjadi

$$S\underline{\alpha}_1 - l_1\underline{\alpha}_1 = 0$$

$$l_1\underline{\alpha}_1 = S\underline{\alpha}_1$$

Jika persamaan di atas diganda awalkan dengan $\underline{\alpha}'_1$, maka akan menjadi

$$\underline{\alpha}'_1 l_1\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}'_1 S\underline{\alpha}_1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \end{pmatrix} l_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$$

$$l_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & & s_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$$

Karena $\underline{a}'_1 \underline{a}_1 = 1$, maka

$$l_1 = \underline{a}'_1 S \underline{a}_1$$

atau

$$l_1 = S^2_{z_1} \qquad \text{(II.3)}$$

Jadi keragaman data terbesar dari z_1 adalah akar cirinya.

Cara yang sama juga dilakukan untuk mendapatkan model komponen utama kedua,

$$z_2 = \underline{\alpha}_2'\underline{x}$$

yaitu dengan memaksimumkan $\underline{\alpha}_2'S\underline{\alpha}_2$ dengan kendala :

$$\underline{\alpha}_1'S\underline{\alpha}_2 = 0\ , \quad \underline{\alpha}_2'S\underline{\alpha}_1 = 0$$

$$\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_2 = 0\ , \quad \underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_1 = 0$$

sehingga $\underline{\alpha}_1'\underline{x}$ dan $\underline{\alpha}_2'\underline{x}$ tidak berkorelasi.

Metode pengganda Lagrange untuk mencari turunan

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}_2}\left[\ \underline{\alpha}_2'S\underline{\alpha}_2 - l_2(\underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_2 - 1) - \phi\underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_1\ \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}_2}\left[\ \underline{\alpha}_2'S\underline{\alpha}_2 + l_2(1 - \underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_2) - \phi\underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_1\ \right]$$

$$= 2(S\underline{\alpha}_2 - l_2\underline{\alpha}_2) - \phi\underline{\alpha}_1 = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan $\underline{\alpha}_1'$ diperoleh

$$2\underline{\alpha}_1'S\underline{\alpha}_2 - 2l_2\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_2 + \phi\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_1 = 0$$

Karena $\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_1=1$ maka $\phi = 0$

Sehingga persamaan (II.4) menjadi

$$2(S\underline{\alpha}_2 - l_2\underline{\alpha}_2) = 0$$

Jadi

$$(S - l_2 I_p)\underline{\alpha}_2 = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

yang disebut persamaan karakteristik (persamaan ciri) dengan l_2 adalah akarciri terbesar kedua setelah l_1 dari matriks S, sedangkan $\underline{a}_2$ vektor ciri yang bersesuaian dengan akar ciri dengan syarat $\underline{a}_1$ dan $\underline{a}_2$ bersifat ortonormal.

Jika persamaan (II.5) diganda awalkan dengan $\underline{a}'_2$, maka diperoleh

$$l_2\underline{a}_2 = S\underline{a}_2$$

$$\underline{a}'_2 l_2\underline{a}_2 = \underline{a}'_2 S\underline{a}_2$$

$$l_2 = \underline{a}'_2 S\underline{a}_2$$

atau

$$l_2 = S^2_{Z_2} \qquad \text{(II.6)}$$

Secara umum dengan metode pengganda Lagrange untuk mendapatkan vektor pembobot $\underline{a}_j$ dilakukan melalui persamaan

$$(S - l_j I_p)\underline{a}_j = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

l_j adalah akar ciri terbesar ke-j dari matriks S dan $\underline{a}_j$ vektor ciri yang bersesuaian dengan akar ciri, untuk $j = 1,2,\ldots,p$.

sehingga diperoleh akar ciri sebanyak p buah dengan

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_p$$

Jika persamaan (II.7) diganda awalkan dengan $\underline{a}'_j$ akan menghasilkan :

$$l_j\underline{\alpha}_j = S\underline{\alpha}_j$$

$$\underline{\alpha}_j' l_j\underline{\alpha}_j = \underline{\alpha}_j' S\underline{\alpha}_j$$

$$l_j = \underline{\alpha}_j' S\underline{\alpha}_j$$

$$l_j = S_{z_j}^2 \qquad \text{(II.8)}$$

Jadi keragaman data terbesar dari z_j adalah akar ciri dari matriks S ke-j.

Dalam menentukan skor komponen utama pertama diambil sampel acak berukuran n dari populasi berukuran N sehingga notasi komponen utama pertama menjadi :

$$z_{i1} = \underline{\alpha}_1'\underline{x}_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

dan dipilih koefisien vektor $\underline{\alpha}_1'$ untuk memaksimumkan variansi sampel $[1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (z_{i1} - \bar{z}_1)^2$ dengan kendala $\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_1 = 1$, kemudian komponen utama kedua menjadi :

$$z_{i2} = \underline{\alpha}_2'\underline{x}_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

dan dipilih $\underline{\alpha}_2'$ untuk memaksimumkan variansi sampel dari z_{i2} dengan kendala-kendala $\underline{\alpha}_2'\underline{\alpha}_2=1$ dan $\underline{\alpha}_1'\underline{\alpha}_2=0$ serta z_{i1} tidak berkorelasi dengan z_{i2}.

Selanjutnya komponen utama ke-j menjadi :

$$z_{ij} = \underline{\alpha}_j'\underline{x}_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

z_{ij} adalah skor komponen utama ke-j pada pengamatan ke-i dengan l_j akar ciri terbesar dari matriks S dan $\underline{a}'_j$ vektor ciri yang bersesuaian dengan akar cirinya untuk j = 1,2,...,p.

Jika vektor $\underline{x}$ mempunyai sebaran peubah ganda tertentu dengan nilai tengah diketahui maka

$$S = (1/n)X'X$$

dan bila nilai tengah tidak diketahui maka

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

dengan $\bar{x}_j = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ dan $j,k = 1,2,\ldots,p$

Matriks S dapat ditulis :

$$S = \frac{1}{(n-1)} X'X \qquad (II.9)$$

Misalkan X adalah matriks berukuran nxp dengan unsur-unsur baris ke-i dan kolom ke-j $(x_{ij} - \bar{x}_j)$

sehingga diperoleh matriks skor komponen utama :

$$Z = XA \qquad (II.10)$$

Z adalah matriks skor komponen utama dengan unsur-unsur baris ke-i dan kolom ke-j, X adalah matriks berukuran nxp dan A adalah matriks ortogonal berukuran pxp dengan $\underline{a}_j$ adalah kolom ke-j untuk j=1,2,...p dan i=1,2,...,n.

BAB III

REGRESI KOMPONEN UTAMA

Diketahui bahwa analisa regresi bertujuan untuk menyelidiki hubungan antara dua variabel (peubah) atau lebih dan jika berhubungan bagaimana hubungan tersebut. Demikian pula halnya regresi komponen utama digunakan untuk mengetahui hubungan (pengaruh) antara peubah tak bebas (Y) dengan peubah baru (Z).

Pada umumnya hubungan yang dikenal adalah antara (X,Y) tetapi dalam regresi komponen utama diperoleh hubungan antara (Z,Y) sehingga dalam penulisan akhir diuji kembali dalam bentuk peubah asal (X,Y).

Metode regresi komponen utama pertama kali dikemukakan oleh Kendall pada tahun 1957 (Marsh,1982), dimana metode regresi komponen utama adalah salah satu cara untuk menanggulangi masalah multi-kolinieritas.

Dalam menganalisa regresi komponen utama, penulis mengambil metode kuadrat terkecil yang meminimumkan jumlah kuadrat sesatan dan merupakan penaksir tak bias linier terbaik. Dan juga sebagai dasar perbandingan regresi skor komponen utama.

3.1. Regresi Metode Kuadrat Terkecil

Bentuk umum persamaan regresi linier dalam bentuk catatan matriks dengan $x_o=1$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ x_o & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_o & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

atau

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e} \qquad \text{(III.1)}$$

dengan $\underline{y}$ adalah vektor dari n pengamatan pada peubah tak bebas, X adalah matriks berukuran nxp pada unsur baris ke-i dan kolom ke-j yaitu nilai dari peubah tak bebas ke-j untuk pengamatan ke-i, $\underline{\beta}$ adalah koefisien vektor regresi dan $\underline{e}$ adalah vektor kesalahan yang unsur-unsurnya satu sama lain saling bebas.

$\underline{e}$ merupakan variabel acak berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan variansi σ^2 (tidak diketahui),

$$\underline{e} \sim N(\underline{0},\sigma^2) \qquad \text{(III.2)}$$

dengan kendala-kendala :

$$E[\underline{e}_i] = 0$$

$$E[\underline{e}_i \underline{e}_j] = \begin{cases} \sigma^2 & ; i=j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Dari persamaan (III.1) diperoleh

$$E(\underline{y}) = X\underline{\beta}$$

dan (III.3)

$$Var(\underline{y}) = \sigma^2$$

Metode kuadrat terkecil yang meminimumkan jumlah kuadrat sesatan (Σe_i^2) menghasilkan suatu sistem persamaan yang dikenal sebagai persamaan normal. Bentuk umum persamaan normal ialah :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i2} & \cdots & \Sigma x_{ik} \\ \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i1}^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \cdots & \Sigma x_{i1}x_{ik} \\ \Sigma x_{i2} & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \Sigma x_{i2}^2 & \cdots & \Sigma x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & & & & \\ \Sigma x_{ik} & \Sigma x_{i1}x_{ik} & \Sigma x_{i2}x_{ik} & \cdots & \Sigma x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{i1}y_1 \\ \Sigma x_{i2}y_2 \\ \vdots \\ \Sigma x_{ik}y_k \end{bmatrix}$$

Persamaan normal ini dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks,

$$(X'X)\hat{\underline{\beta}} = (X'\underline{y})$$

sehingga

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{y} \qquad \text{(III.4)}$$

maka

$$E[\hat{\underline{\beta}}] = E[(X'X)^{-1}X'\underline{y}]$$

$$= (X'X)^{-1}X'E[\underline{y}]$$

$$= (X'X)^{-1}X'E[X\underline{\beta}+\underline{e}]$$

$$= (X'X)^{-1}X'X\underline{\beta}$$

$$= (X'X)^{-1}(X'X)\underline{\beta}$$

$$E[\hat{\underline{\beta}}] = \underline{\beta} \qquad \text{(III.5)}$$

dengan $(X'X)^{-1}(X'X)=I$

Hal ini menunjukkan bahwa penaksir $\hat{\underline{\beta}}$ kuadrat terkecil adalah penaksir tak bias linier dan

$$\mathrm{Var}(\hat{\underline{\beta}}) = E\left[(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta})'\right]$$

$$= E\left[((X'X)^{-1}X'\underline{y} - \underline{\beta})((X'X)^{-1}X'\underline{y} - \underline{\beta})'\right]$$

substitusikan $\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$, diperoleh :

$$\mathrm{Var}(\hat{\underline{\beta}})=E\left[((X'X)^{-1}X'(X\underline{\beta}+\underline{e}) - \underline{\beta})((X'X)^{-1}X'(X\hat{\underline{\beta}}+\underline{e}) - \underline{\beta})'\right]$$

$$=E\left[((X'X)^{-1}X'\underline{e})((X'X)^{-1}X'\underline{e})'\right]$$

$$=(X'X)^{-1}X'(E[\underline{ee}'])X(X'X)^{-1}$$

$$=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}(X'X)(X'X)^{-1}$$

$$=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \qquad \text{(III.6)}$$

dimana $\hat{\sigma}^2$ penaksir ragam sampel.

$\mathrm{Var}(\hat{\underline{\beta}})$ adalah ragam penaksir yang dihasilkan merupakan ragam minimum dibandingkan dengan ragam penaksir tak bias lainnya, sifat ini dikenal sebagai penaksir terbaik.

3.2. Regresi Skor Komponen Utama

Prinsip komponen utama mentransformasikan peubah bebas (x_j) dalam peubah baru yang hampir saling bebas. Peubah baru tersebut dinamakan komponen utama (z_j) yang merupakan kombinasi linier dari peubah x_j.

Peubah komponen utama pertama akan memaksimumkan ragam, begitu juga komponen utama kedua dan komponen utama selanjutnya. Komponen utama kedua tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama, begitu juga untuk komponen utama selanjutnya.

Transformasi yang dilakukan adalah transformasi ortogonal, dimana model regresi linier seperti didefinisikan pada persamaan (III.1) adalah

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e} \qquad \text{(III.7)}$$

dan skor komponen utama yang didefinisikan pada persamaan (II.10) adalah

$$Z = XA \qquad \text{(III.8)}$$

Karena A adalah matriks ortogonal yang bersifat $A'A = AA' = I$ dan $A'X'XA = Z'Z = D$ yaitu matriks diagonal akar ciri dari matriks S (Johnston,1972) maka $X\underline{\beta}$ dapat ditulis sebagai $XAA'\underline{\beta} = ZA'\underline{\beta} = Z\underline{\gamma}$ dengan $\underline{\gamma} = A'\underline{\beta}$, sehingga persamaan (III.7) dapat ditulis

$$\underline{y} = Z\underline{\gamma} + \underline{e} \qquad \text{(III.9)}$$

yang merupakan model regresi linier skor komponen utama.

Regresi metode kuadrat terkecil dari peubah bebas skor komponen utama menghasilkan koefisien penaksir $\hat{\underline{\gamma}}$, dimana dapat ditransformasikan kembali dalam koefisien-koefisien regresi metode kuadrat terkecil dari peubah asal X yaitu :

$$\hat{\underline{\gamma}} = A'\underline{\beta}$$

menjadi

$$\hat{\underline{\beta}} = A\hat{\underline{\gamma}} \qquad \text{(III.10)}$$

dimana $A'A = AA' = I$, dan $\mathrm{var}(\hat{\underline{\gamma}}) = \hat{\sigma}^2 D^{-1}$ serta $\mathrm{var}(\hat{\underline{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 AD^{-1}A'$.

Komponen utama adalah metode penaksir yang berbias dan mempunyai ragam yang lebih kecil dari ragam metode kuadrat terkecil. Yang prosedurnya dapat dilakukan dengan mereduksi peubah bebas yang ada menjadi peubah baru yang disebut komponen utama. Regresi komponen utama hampir sama dengan prosedur pengurangan peubah bebas, dimana kadang - kadang pengurangan peubah bebas tersebut lebih dari satu.

Setelah mereduksi dimensi peubah bebas melalui transformasi menjadi komponen utama, diperoleh pengurangan terhadap komponen utama yang dianggap tidak penting kemudian dilakukan transformasi kembali terhadap peubah asal, sehingga akhir persamaan regresi menghasilkan hubungan linier antara peubah tak bebas (Y) dengan peubah asal (X).

Pengurangan komponen utama menghasilkan penaksir yang lebih stabil daripada penaksir metode kuadrat terkecil, disamping itu mempunyai ragam yang lebih kecil. Ada beberapa cara dalam pengurangan komponen utama yang dianggap tidak penting yaitu berdasarkan statistik-t atau melihat probabilitas analisis variansinya dengan taraf nyata tertentu untuk setiap komponen.

Pengurangan komponen utama tertentu menghasilkan matriks dari kumpulan vektor ciri yang baru, yaitu A^* yang digunakan dalam transformasi penaksir koefisien dari peubah X, sehingga :

$$\hat{\underline{\gamma}} = A^{*'}\hat{\underline{\beta}} \quad \text{menjadi} \quad \hat{\underline{\beta}} = A^{*}\hat{\underline{\gamma}}$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = A^{*}\underline{\gamma}^{*} \quad \text{dan} \quad Var(\hat{\underline{\beta}}) = \hat{\sigma}^{2}A^{*}D^{*^{-1}}A^{*'} .$$

Ragam penaksir komponen utama lebih kecil daripada ragam penaksir metode kuadrat terkecil, karena satu atau lebih unsur diagonal utama dari matriks akar ciri yang nilainya mendekati nol dihilangkan.

BAB IV

A P L I K A S I

Selain untuk memperjelas uraian-uraian sebelumnya, pada bab ini juga dimaksudkan untuk memberikan gambaran salah satu penerapan dari penentuan komponen utama. Data yang digunakan adalah data mengenai ekspor karet alam Indonesia dimana data dikutip dari salah satu hasil penelitian mahasiswa Institut Pertanian Bogor (IPB), lihat lampiran 1.

Hasil korelasi matriks antar peubah bebasnya adalah sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 1.000 & & & & & & & & \\ 0.309 & 1.000 & & & & & & & \\ -0.249 & -0.903 & 1.000 & & & & & & \\ 0.246 & 0.901 & -0.814 & 1.000 & & & & & \\ 0.373 & 0.688 & -0.820 & 0.656 & 1.000 & & & & \\ -0.221 & 0.262 & -0.455 & 0.213 & 0.458 & 1.000 & & & \\ -0.265 & 0.026 & -0.141 & 0.021 & 0.342 & 0.359 & 1.000 & & \\ -0.165 & -0.284 & 0.111 & -0.448 & 0.097 & 0.407 & 0.511 & 1.000 & \\ -0.087 & 0.218 & -0.224 & 0.403 & 0.529 & 0.526 & 0.506 & 0.154 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh akarciri digunakan persamaan:

$$\left| R - l_j I \right| = 0$$

yang dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\begin{vmatrix} 1-\ell_1 & 0.309 & -0.249 & 0.246 & 0.373 & -0.221 & -0.265 & -0.165 & -0.087 \\ 0.309 & 1-\ell_2 & -0.903 & 0.901 & 0.688 & 0.262 & 0.026 & -0.284 & 0.218 \\ -0.249 & -0.903 & 1-\ell_3 & -0.814 & -0.820 & -0.455 & -0.141 & 0.111 & -0.224 \\ 0.246 & 0.901 & -0.814 & 1-\ell_4 & 0.656 & 0.213 & 0.021 & -0.448 & 0.403 \\ 0.373 & 0.688 & -0.820 & 0.656 & 1-\ell_5 & 0.458 & 0.342 & 0.097 & 0.529 \\ -0.221 & 0.262 & -0.455 & 0.213 & 0.458 & 1-\ell_6 & 0.359 & 0.407 & 0.526 \\ -0.265 & 0.026 & -0.141 & 0.021 & 0.342 & 0.359 & 1-\ell_7 & 0.511 & 0.506 \\ -0.165 & -0.284 & 0.111 & -0.448 & 0.097 & 0.407 & 0.511 & 1-\ell_8 & 0.154 \\ -0.087 & 0.218 & -0.224 & 0.403 & 0.529 & 0.526 & 0.506 & 0.154 & 1-\ell_9 \end{vmatrix} = 0$$

Dari persamaan tersebut di atas diperolehlah nilai-nilai akarciri-akarciri $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3 > \ell_4 > \ell_5 > \ell_6 > \ell_7 > \ell_8 > \ell_9$ sebagai berikut:

$\ell_1 = 3.9534$

$\ell_2 = 2.3451$

$\ell_3 = 0.9665$

$\ell_4 = 0.7341$

$\ell_5 = 0.5661$

$\ell_6 = 0.2009$

$\ell_7 = 0.1743$

$\ell_8 = 0.0442$

$\ell_9 = 0.0154$

Dan dari persamaan di bawah ini diperoleh vektorciri-vektorciri yang bersesuaian dengan akarciri-akarciri yaitu:

$$(R - \ell_j I)\, \underline{a}_j = 0$$

berarti

$$R\, \underline{a}_j = \ell_j\, \underline{a}_j$$

Untuk j = 1 maka

$$R\,\underline{\alpha}_1 = l_1\,\underline{\alpha}_1$$

$$R_{9\times 9}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = 3.9534\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{\alpha}_1$) yang bersesuaian akar-ciri (l_1) sebagai berikut:

$$\underline{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.142\\ -0.446\\ 0.465\\ -0.441\\ -0.453\\ -0.262\\ -0.140\\ 0.046\\ -0.273\end{bmatrix}$$

Untuk j = 2 maka

$$R\,\underline{\alpha}_2 = l_2\,\underline{\alpha}_2$$

$$R_{9\times9}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = 2.3451\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{\alpha}_2$) yang bersesuaian akar-ciri (l_2) sebagai berikut:

$$\underline{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.331\\ 0.209\\ -0.087\\ 0.217\\ -0.075\\ -0.397\\ -0.497\\ -0.517\\ -0.339\end{bmatrix}$$

Untuk j = 3 maka

$$R\,\underline{a}_3 = l_3\,\underline{a}_3$$

$$R_{9\times 9}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.9665\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{a}_3$) yang bersesuaian akar-ciri (l_3) sebagai berikut:

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.751 \\ -0.066 \\ -0.028 \\ -0.263 \\ 0.275 \\ -0.103 \\ 0.040 \\ 0.483 \\ -0.203 \end{bmatrix}$$

Untuk j = 4 maka

$$R\,\underset{\rightarrow 4}{a} = l_4\,\underset{\rightarrow 4}{a}$$

$$R_{9\times 9}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.7341\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underset{\rightarrow 4}{a}$) yang bersesuaian akar-ciri (l_4) sebagai berikut:

$$\underset{\rightarrow 4}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.284 \\ -0.184 \\ 0.356 \\ 0.118 \\ 0.089 \\ -0.422 \\ 0.295 \\ -0.285 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

Untuk j = 5 maka

$$R\, \underline{a}_5 = l_5\, \underline{a}_5$$

$$R_{9\times 9} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.5661 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{a}_5$) yang bersesuaian akar-ciri (l_5) sebagai berikut:

$$\underline{a}_5 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.224 \\ 0.202 \\ -0.167 \\ 0.068 \\ 0.002 \\ -0.549 \\ 0.640 \\ 0.063 \\ -0.402 \end{bmatrix}$$

Untuk j = 6 maka

$$R\,\underline{a}_6 = l_6\,\underline{a}_6$$

$$R_{9\times9}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.2009\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{a}_6$) yang bersesuaian akar-ciri (l_6) sebagai berikut:

$$\underline{a}_6 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.210 \\ -0.281 \\ -0.108 \\ -0.254 \\ 0.080 \\ 0.418 \\ 0.409 \\ -0.615 \\ -0.272 \end{bmatrix}$$

Untuk j = 7 maka

$$R\ \underline{a}_7 = l_7\ \underline{a}_7$$

$$R_{9\times9}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.1743\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{a}_7$) yang bersesuaian akar-ciri (l_7) sebagai berikut:

$$\underline{a}_7 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.351 \\ 0.360 \\ 0.173 \\ 0.219 \\ -0.727 \\ 0.264 \\ 0.255 \\ 0.086 \\ 0.007 \end{bmatrix}$$

Untuk j = 8 maka

$$R\,\underline{\alpha}_8 = l_8\,\underline{\alpha}_8$$

$$R_{9\times 9}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = 0.0442\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{\alpha}_8$) yang bersesuaian akar-ciri (l_8) sebagai berikut:

$$\underline{\alpha}_8 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\\ \alpha_9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.069\\ -0.679\\ -0.240\\ 0.643\\ -0.141\\ 0.005\\ 0.017\\ 0.163\\ -0.127\end{bmatrix}$$

Untuk j = 9 maka

$$R\,\underline{a}_9 = l_9\,\underline{a}_9$$

$$R_{9\times 9}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = 0.0154\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh vektorciri ($\underline{a}_9$) yang bersesuaian akar-ciri (l_9) sebagai berikut:

$$\underline{a}_9 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.061 \\ -0.093 \\ -0.722 \\ -0.381 \\ -0.389 \\ -0.199 \\ -0.040 \\ -0.024 \\ 0.357 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh hasil akarciri dan vektorciri yang bersesuaian dengan akarciri maka dapatlah dibuat persamaan komponen utama yaitu:

Komponen Utama Pertama:

$$Z_1 = -0.142\ X_1 - 0.446\ X_2 + 0.465\ X_3 - 0.441\ X_4 - 0.453\ X_5 - 0.262\ X_6 - 0.140\ X_7 + 0.046\ X_8 - 0.273\ X_9$$

Komponen Utama Kedua:

$$Z_2 = 0.331\ X_1 + 0.209\ X_2 - 0.087\ X_3 + 0.217\ X_4 - 0.075\ X_5 - 0.397\ X_6 - 0.497\ X_7 - 0.517\ X_8 - 0.339\ X_9$$

Komponen Utama Ketiga:

$$Z_3 = 0.751\ X_1 - 0.066\ X_2 - 0.028\ X_3 - 0.263\ X_4 + 0.275\ X_5 - 0.103\ X_6 + 0.040\ X_7 + 0.483\ X_8 - 0.203\ X_9$$

Komponen Utama Keempat:

$$Z_4 = 0.284\ X_1 - 0.184\ X_2 + 0.356\ X_3 + 0.118\ X_4 + 0.089\ X_5 - 0.422\ X_6 + 0.295\ X_7 - 0.285\ X_8 + 0.625\ X_9$$

Komponen Utama Kelima:

$$Z_5 = -0.224\ X_1 + 0.202\ X_2 - 0.167\ X_3 + 0.068\ X_4 + 0.002\ X_5 - 0.549\ X_6 + 0.640\ X_7 + 0.063\ X_8 - 0.402\ X_9$$

Komponen Utama Keenam:

$$Z_6 = 0.210\ X_1 - 0.281\ X_2 - 0.108\ X_3 - 0.254\ X_4 + 0.080\ X_5 + 0.418\ X_6 + 0.409\ X_7 - 0.615\ X_8 - 0.272\ X_9$$

Komponen Utama Ketujuh:

$$Z_7 = 0.351\ X_1 + 0.360\ X_2 + 0.173\ X_3 - 0.219\ X_4 - 0.727\ X_5 + 0.264\ X_6 + 0.255\ X_7 + 0.086\ X_8 + 0.007\ X_9$$

Komponen Utama Kedelapan:

$$Z_8 = 0.069\ X_1 - 0.679\ X_2 - 0.240\ X_3 + 0.643\ X_4 - 0.141\ X_5 + 0.005\ X_6 + 0.017\ X_7 + 0.163\ X_8 - 0.127\ X_9$$

Komponen Utama Kesembilan:

$$Z_9 = 0.061\ X_1 - 0.093\ X_2 - 0.722\ X_3 - 0.381\ X_4 - 0.389\ X_5 - 0.199\ X_6 - 0.040\ X_7 - 0.024\ X_8 + 0.357\ X_9$$

Komponen-komponen utama di atas ditransformasikan dari peubah asal X ke peubah baru Z dengan menggunakan persamaan (II.10).
Hasil perkalian untuk setiap titik peubah asal dengan vektor cirinya merupakan nilai-nilai skor komponen utama (Z_j) yang hasil perkalian tersebut dicantumkan bersama-sama dengan nilai peubah bebasnya (Y) pada tabel lampiran 2.

Dengan demikian korelasi antara Z_j dan Y yang tercantum pada tabel lampiran 3 dipaparkan dalam tabel 1 bersama dengan persamaan regresi liniernya.

Tabel 1. Persamaan Regresi Linier dan koefisien Korelasi antara Volume Ekspor Karet Alam Indonesia (Y) dengan masing-masing Komponen Utama (Z_j).

Komponen Utama	Persamaan Garis Regresi	r
Komponen Utama Pertama	Y = 210 - 4.57 Z1	-0.436
Komponen Utama Kedua	Y = 210 + 4.18 Z2	0.307
Komponen Utama Ketiga	Y = 210 + 14.3 Z3	0.676
Komponen Utama Keempat	Y = 210 + 3.57 Z4	0.147
Komponen Utama Kelima	Y = 210 - 3.92 Z5	-0.142
Komponen Utama Keenam	Y = 210 - 0.2 Z6	-0.004
Komponen Utama Ketujuh	Y = 210 - 9.9 Z7	-0.198
Komponen Utama Kedelapan	Y = 210 + 1.2 Z8	0.012
Komponen Utama Kesembilan	Y = 210 - 9.9 Z9	-0.059

Dari tabel tersebut di atas dapat dilihat bahwa komponen utama yang mempunyai korelasi tertinggi dengan volume ekspor karet alam Indonesia adalah komponen utama ketiga, berarti komponen utama ketiga mempunyai hubungan yang paling erat dengan volume ekspor karet alam Indonesia dibandingkan dengan komponen utama lainnya.

Berdasarkan analisis variansi yang terdapat pada tabel lampiran 4 bagi setiap analisis komponen utama, dapat disusun daftar analisis regresi linier berganda antara volume ekspor karet alam Indonesia dengan komponen utama seperti diperlihatkan pada tabel 2.

Tabel 2. Tabel Analisis Variansi bagi Analisis Komponen Utama

Sumber Keragaman	db	JK	RK	F	p
γ_1	1	1570.6	1570.6	1.99	0.054
γ_2	1	776.8	776.8	0.98	0.188
γ_3	1	3774.2	3774.2	4.78	0.001**
γ_4	1	177.5	177.5	0.22	0.537
γ_5	1	165.5	165.5	0.21	0.552
γ_6	1	0.2	0.2	0.00	0.985
γ_7	1	323.6	323.6	0.41	0.403
γ_8	1	1.3	1.3	0.00	0.959
γ_9	1	28.9	28.9	0.04	0.804
Sisaan	10	7899.7	789.97		
Total	19	8253.5			

Keterangan: **) Berpengaruh sangat nyata (P < 0.01)

Model regresi Komponen Utama:

$$\underline{Y} = Z\underline{\gamma} + \underline{e}$$

$$Y = 210 - 4.72\ Z_1 + 3.87\ Z_2 + 14.9\ Z_3 - 1.35\ Z_4 + 2.92\ Z_5 + 2.65\ Z_6 - 9.99\ Z_7 - 0.9\ Z_8 + 2.9\ Z_9$$

Probabilitas Analisis Variansi pada tabel 2 dengan taraf nyata α = 0.01 untuk setiap komponennya dan uji Statistik-t pada tabel lampiran 5 dapat dilakukan pengurangan unsur komponen utama. Dan diambil komponen utama ketiga yang mempunyai hubungan linier dengan peubah tak bebas (Y).

Jadi koefisien komponen utama ketiga yang akan ditransformasikan kembali dalam koefisien regresi metode kuadrat terkecil peubah asal yaitu:

$$\hat{Y} = 210 + 14.3\ Z_3$$

Hasil taksiran Y diuraikan pada tabel lampiran 6.

Akhirnya regresi dari komponen utama ketiga ke peubah asal diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$Y = 62.3 + 0.572\ X_1 - 0.0121\ X_2 + 0.102\ X_3 - 0.711\ X_4 + 0.0103\ X_5 - 0.0598\ X_6 + 0.0107\ X_7 + 0.301\ X_8 - 0.345\ X_9$$

yang merupakan persamaan regresi terbaik terhadap komponen utama ketiga.

Dalam persamaan di atas, semua peubah-X ada dan tidak ada yang dibuang. Selain itu persamaan dalam peubah X mempunyai koefisien yang berbias, sedangkan metode kuadrat terkecil yang diterapkan langsung pada peubah-X menghasilkan koefisien yang tidak berbias.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Pada bab ini yang dibahas adalah kesimpulan dari penerapan untuk menentukan komponen utama pada regresi linier berganda dan berdasarkan analisis-analisis yang digunakan juga berdasarkan lampiran yang ada, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Berdasarkan tabel lampiran 3 dapat dikemukakan bahwa korelasi antar peubah asal menunjukkan adanya inter-korelasi sedangkan korelasi antar komponen utama betul-betul saling bebas. Sehingga dengan menggunakan komponen utama berarti masalah kolinieritas antar peubah bebas dapat diatasi.
2. Pada analisis variansi yang terdapat di tabel lampiran 4, dari kesembilan komponen utama yang mempunyai probabilitas menolak Ho lebih kecil dari

taraf nyata (α = 0.01) adalah komponen utama ketiga serta pada tabel uji statistik-t pada tabel lampiran 5 terlihat pula bahwa komponen utama ketigalah yang berbeda sangat nyata sehingga disimpulkan bahwa komponen utama ketiga yang dapat ditransformasikan kembali ke peubah asal.

3. Taksiran $\hat{Y}$ yang merupakan transformasi komponen utama ketiga (Z_3) adalah $\hat{Y} = 210 + 14,3\ Z_3$ dapat dilihat pada tabel lampiran 6. Hasil transformasi komponen utama ketiga ke peubah asal diperoleh persamaan regresi di halaman 39 berikut :

$$Y = 62.3 + 0.572\ X_1 - 0.0121\ X_2 + 0.102\ X_3 - 0.711\ X_4 + 0.0103\ X_5 - 0.0598\ X_6 + 0.0107\ X_7 + 0.301\ X_8 - 0.345\ X_9$$

Jadi koefisien variabel (peubah) yang bernilai positif mempengaruhi volume ekspor karet alam Indonesia yaitu X_1(produksi karet alam Indonesia), X_3(pajak ekspor), X_5(harga karet alam Indonesia), X_7(volume ekspor karet alam Malaysia & Thailand), dan X_8(dan produksi ban Amerika Serikat) yang keterangannya terdapat pada tabel lampiran 1.

5.2. Saran

Suatu penelitian biasanya diselesaikan dengan persamaan regresi yang menggunakan peubah-peubah X. Dan selain dari pada komponen utama ada pula tiga cara dalam menentukan persamaan regresi terbaik yang kita ketahui yaitu regresi semua kemungkinan (All Possible Regression), prosedur penyisihan mundur (The Backward Elimination Procedur) dan prosedur regresi bertatar (The Stepwise Regression Procedur).

Pengujian ketiga cara tersebut menghasilkan persamaan regresi yang tidak mencapai kepuasan karena peubah bebas (Y) yang mempengaruhi peubah tak bebas (X) dari ketiga cara di atas kadang-kadang tidak sesuai. Maka sebagai peneliti dalam melakukan suatu pekerjaan sebaiknya menggunakan komponen utama sebagai peubah kerja, yang mereduksi dimensi peubah tak bebas dalam menentukan peubah tak bebas yang sangat mempengaruhi peubah bebasnya sehingga pekerjaan dari suatu penelitian akan lebih teliti dan akurat.

DAFTAR PUSTAKA

Draper, N. dan H.Smith, 1981. Applied Regression Analysis (2nd Ed.). John Wiley & Sons, New York.

Gunst, R.F. dan R.L.Mason, 1977. Biased estimation in regression: An evaluation using mean squared error. J.Am.Stat.Assoc, 72: 616 - 628.

Jolliffe, I.T., 1986. Principal Component Analysis. New York Berlin Heidelberg Tokyo

Morrison, D.F., 1978. Multivariate Statistical Methods. (2nd Ed). Mc Graw - Hill Book Company, New York.

Muangkoe, M., 1983. Biased and Unbiased Estimation: An Econometric Application in The Tuna Industri. Tesis Doktor. Oregon State University.

Susilobroto, B., 1984. Prospek Ekspor Karet Alam Indonesia dalam Hubungannya dengan Perkembangan Perekonomian Internasional. Tesis Master. Fakultas Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor. Bogor.

LAMPIRAN

Tabel lampiran 1. Data Ekspor Karet Alam Indonesia

NO.	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1.	204.0	210.0	381.16	10	0	338.2	292.0	440.1	91.8	4.9
2.	208.5	261.0	417.30	10	0	381.8	283.3	422.5	110.8	4.9
3.	201.2	211.2	416.66	10	0	454.3	267.4	431.3	119.5	5.2
4.	208.8	220.0	417.66	10	0	940.6	272.8	542.1	131.7	10.3
5.	183.7	210.0	418.33	10	0	659.7	405.8	499.7	139.8	13.7
6.	194.9	205.0	421.66	10	0	669.4	361.3	497.2	128.9	9.0
7.	196.9	205.0	421.00	5	0	892.3	353.9	465.1	99.0	8.0
8.	205.3	215.0	421.00	5	0	916.3	354.9	535.0	155.1	8.0
9.	193.7	212.5	420.00	5	0	915.0	369.1	561.9	147.8	7.8
10.	211.9	210.0	419.33	5	0	963.7	391.2	443.0	148.1	7.8
11.	214.2	225.0	417.50	5	0	1155.1	367.7	496.6	142.6	8.4
12.	233.7	240.0	632.00	0	0	1270.9	361.4	485.5	153.9	4.8
13.	247.3	232.5	624.82	0	1	1449.6	375.2	503.8	135.7	12.3
14.	189.3	200.0	627.42	0	1	1480.1	375.6	527.6	126.5	12.3
15.	242.6	255.0	626.25	0	1	1561.6	349.5	498.5	98.5	10.5
16.	259.8	270.0	627.17	0	1	1706.0	343.0	453.6	109.6	10.5
17.	207.2	222.5	634.69	0	1	1170.0	345.6	476.8	118.0	9.8
18.	187.7	202.5	640.01	0	1	1033.5	367.2	488.4	109.4	9.8
19.	192.6	215.0	669.04	0	1	1013.3	348.5	464.7	100.3	6.7
20.	212.2	230.5	688.32	0	1	931.8	345.9	479.0	104.1	6.7

Keterangan:

Y = Volume ekspor karet alam Indonesia (ribuan ton)

X_1 = Produksi karet alam Indonesia (ribuan ton)

X_2 = Laju tukar mata uang Rupiah terhadap 1 US $

X_3 = Pajak ekspor (persentase)

X_4 = Kebijakan ekspor pemerintah berupa penurunan suku bunga bank. Peubah sandi 0 untuk suku bunga bank 12% dan peubah sandi 1 untuk suku bunga bank 6%

X_5 = Harga karet alam, yaitu harga RSS I di New York (US $ / ton)

X_6 = Harga karet sintetik, yaitu harga SBR di London

X_7 = Volume ekspor karet alam Malaysia dan Thailand (ribuan ton)

X_8 = Produksi ban Amerika Serikat (ribuan ton)

X_9 = Pertumbuhan inflasi negara-negara konsumen (persentase)

Tabel Lampiran 2. Data Skor-Skor Komponen Utama dan Peubah Bebas (Y)

NO.	Y	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
1.	204.0	3.21033	1.84452	-1.07413	0.06941
2.	208.5	2.82536	2.58119	1.30943	0.43638
3.	201.2	3.15975	1.52869	-0.26990	-0.05916
4.	208.8	1.55953	-0.91202	0.40983	2.03625
5.	183.7	0.87060	-2.49002	-0.64362	0.72760
6.	194.9	1.66403	-1.18459	-0.60354	0.15296
7.	196.9	1.07675	0.26558	-1.06122	-0.18743
8.	205.3	0.83811	-1.94203	0.74407	-0.29514
9.	193.7	0.66875	-2.27430	0.48149	-0.22018
10.	211.9	0.92124	-0.99440	0.24389	-1.42300
11.	214.2	0.48071	-1.18768	0.88869	-0.26160
12.	233.7	-0.63026	-0.08690	2.00035	-1.80675
13.	247.3	-2.62939	-0.72125	0.29297	0.42062
14.	189.3	-2.55659	-1.34321	-1.10162	0.27418
15.	242.6	-2.62781	1.15414	0.53225	1.10002
16.	259.8	-2.67370	1.75155	1.43388	0.90855
17.	207.2	-1.73846	0.62674	-0.46764	-0.03637
18.	187.7	-1.66467	0.17507	-1.57126	-0.38679
19.	192.6	-1.32033	1.58039	-1.08439	-0.85357
20.	212.2	-1.43397	1.62855	-0.45953	-0.59599

NO.	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9
1.	0.207.2	0.375867	-0.162631	0.060152	-0.038548
2.	-0.51943	-0.030980	0.661447	0.152251	0.084777
3.	0.39573	-0.912107	-0.364125	0.015146	-0.036029
4.	1.192.6	-0.360549	-0.283926	-0.239276	0.032631
5.	-1.65555	-0.134627	0.752080	-0.274290	0.098075
6.	-0.30796	0.115351	0.274091	-0.181144	-0.326837
7.	-0.49576	0.872891	-0.748412	-0.192785	0.241608
8.	0.74069	0.043859	0.097983	0.316145	0.103267
9.	1.02836	0.710186	0.301670	0.278885	-0.023250
10.	-1.28040	-0.362631	-0.487185	0.208230	-0.070249
11.	-0.31258	0.270016	-0.416705	0.147114	-0.064350
12.	0.57560	-0.100468	0.011016	-0.562127	0.054864
13.	-0.31556	-0.506849	0.113823	0.166326	0.055195
14.	0.42282	-0.305261	-0.381358	-0.035235	-0.093376
15.	-0.12466	0.732369	-0.076495	-0.024115	-0.055892
16.	-0.92514	0.021709	-0.387581	0.037023	-0.090470
17.	0.10772	-0.511707	0.034875	0.140338	0.163170
18.	0.20066	-0.139640	0.152122	0.029912	0.123059
19.	0.42588	0.056158	0.163789	-0.025024	-0.133366
20.	0.57753	0.166414	0.745521	-0.017526	-0.024279

Tabel Lampiran 3. Korelasi antar Peubah Asal dan
Korelasi antar Komponen Utama

Korelasi antar Peubah asal:

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
Y	1.000									
X_1	0.808	1.000								
X_2	0.366	0.309	1.000							
X_3	-0.410	-0.249	-0.903	1.000						
X_4	0.304	0.246	0.901	-0.814	1.000					
X_5	0.614	0.373	0.688	-0.820	0.656	1.000				
X_6	-0.043	-0.221	0.262	-0.455	0.213	0.458	1.000			
X_7	-0.138	-0.265	0.026	-0.141	0.021	0.342	0.359	1.000		
X_8	-0.009	-0.165	-0.284	0.111	-0.448	0.097	0.407	0.511	1.000	
X_9	0.061	-0.087	0.218	-0.224	0.403	0.529	0.526	0.506	0.154	1.000

Korelasi antar Komponen Utama:

	Y	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9
Y	1.000									
Z_1	-0.436	1.000								
Z_2	0.307	-0.000	1.000							
Z_3	0.676	-0.000	-0.000	1.000						
Z_4	0.147	-0.000	0.000	0.000	1.000					
Z_5	-0.142	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	1.000				
Z_6	-0.004	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	1.000			
Z_7	-0.198	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	1.000		
Z_8	0.012	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	
Z_9	-0.059	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	1.000

Tabel Lampiran 4. Tabel Analisa Variansi antara Volume Ekspor Karet Alam Indonesia dengan Komponen Utama

1. Komponen Utama Pertama (Z_1)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	P
Regresi	1	1570.6	1570.6	4.23	0.054
Kesalahan	18	6682.8	371.3		
Total	19	8253.5			

2. Komponen Utama Kedua (Z_2)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	P
Regresi	1	776.8	776.8	1.87	0.188
Kesalahan	18	7476.7	415.4		
Total	19	8253.5			

3. Komponen Utama Ketiga (Z_3)

Analisa Variansi

SK	DF	JK	RK	F	P
Regresi	1	3774.2	3774.2	15.17	0.001
Kesalahan	18	4479.3	248.8		
Total	19	8253.5			

4. Komponen Utama keempat (Z_4)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	177.5	177.5	0.40	0.537
Kesalahan	18	8076.0	448.7		
Total	19	8253.5			

5. Komponen Utama Kelima (Z_5)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	165.5	165.5	0.37	0.552
Kesalahan	18	8088.0	449.3		
Total	19	8253.5			

6. Komponen Utama Keenam (Z_6)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	0.2	0.2	0.00	0.985
Kesalahan	18	8253.3	458.5		
Total	19	8253.5			

7. Komponen Utama Ketujuh (Z_7)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	323.6	323.6	0.73	0.403
Kesalahan	18	7929.9	440.5		
Total	19	8253.5			

8. Komponen Utama Kedelapan (Z_8)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	1.3	1.3	0.00	0.959
Kesalahan	18	8252.2	458.5		
Total	19	8253.5			

9. Komponen Utama Kesembilan (Z_9)

Analisa Variansi

SK	DB	JK	RK	F	p
Regresi	1	28.9	28.9	0.06	0.804
Kesalahan	18	8224.6	456.9		
Total	19	8253.5			

Tabel lampiran 5. Tabel Uji Statistik - t untuk Regresi Linier Berganda antara Volume Ekspor Karet Alam Indonesia dengan Komponen Utama

Komponen Utama	Coef	Stdev	t-ratio	t_{tabel} 0.01	t_{tabel} 0.05
(Z_1) Komponen Utama Pertama	-4.573	2.223	-2.06^{ns}	3.17	2.23
(Z_2) Komponen Utama Kedua	4.175	3.053	1.37^{ns}	3.17	2.23
(Z_3) Komponen Utama Ketiga	14.336	3.681	3.89^{**}	3.17	2.23
(Z_4) Komponen Utama Keempat	3.567	5.671	0.63^{ns}	3.17	2.23
(Z_5) Komponen Utama Kelima	-3.923	6.463	-0.61^{ns}	3.17	2.23
(Z_6) Komponen Utama Keenam	-0.21	10.96	-0.02^{ns}	3.17	2.23
(Z_7) Komponen Utama ketujuh	-9.89	11.53	-0.86^{ns}	3.17	2.23
(Z_8) Komponen Utama Kedelapan	1.22	23.35	0.05^{ns}	3.17	2.23
(Z_9) Komponen Utama Kesembilan	-9.94	39.53	-0.25^{ns}	3.17	2.23

Keterangan : **) Berbeda sangat nyata
ns) Tidak berbeda nyata

Perhitungan:

$$t_{ratio} = \frac{Coef}{Stdev}$$

t_{tabel} untuk α = 5 %

$$t_{tabel} = t\ (1 - \frac{0.05}{2}\ ;\ DB\ error)$$

$$= t\ (0.0975\ ;\ 10)$$

$$t_{tabel} = 2.23$$

t_{tabel} untuk α = 1 %

$$t_{tabel} = t\ (1 - \frac{0.01}{2}\ ;\ DB\ error)$$

$$= t\ (0.995\ ;\ 10)$$

$$t_{tabel} = 3.17$$

Tabel Lampiran 6. Hasil Taksiran Y Pada Komponen Utama Ketiga dengan persamaan:

$$\hat{Y} = 210 + 14.3\ Z_3$$

NO.	Z_3	$\hat{Y}$
1.	-1.07413	194.640
2.	1.30943	228.725
3.	-0.26990	206.140
4.	0.40983	215.861
5.	-0.64362	200.796
6.	-0.60354	201.369
7.	-1.06122	194.825
8.	0.74407	220.640
9.	0.48149	216.885
10.	0.24389	213.488
11.	0.88869	222.708
12.	2.00035	238.605
13.	0.29297	214.190
14.	-1.10162	194.247
15.	0.53225	217.611
16.	1.43388	230.504
17.	-0.46764	203.313
18.	-1.57126	187.531
19.	-1.08439	194.493
20.	-0.45953	203.429