RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL

oleh

HASRULLAH
H 111 99 012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2004

RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL

oleh

HASRULLAH
H 111 99 012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2004

RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Oleh :

HASRULLAH

H 111 99 012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2004

LEMBAR KEOTENTIKAN

SAYA YANG BERTANDATANGAN DI BAWAH INI MENYATAKAN DENGAN SESUNGGUH-SUNGGUHNYA BAHWA SKRIPSI YANG SAYA BUAT DENGAN JUDUL :

"RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL"

ADALAH BENAR HASIL KERJA SAYA SENDIRI BUKAN HASIL PLAGIAT DAN BELUM PERNAH DIPUBLIKASIKAN DALAM BENTUK APAPUN

Makassar, Juni 2004

HASRULLAH
NIM. H 111 99 012

RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Disetujui Oleh :

Pembimbing Pertama	Pembimbing Kedua
Drs. Amir Kamal Amir, MSc.	Andi Kresna Jaya, SSi, MSi.
Nip. 131 992 471	Nip. 132 259 231

Pada Tanggal : Juni 2004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini, Sabtu tanggal 05 Juni 2004, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

"RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL"

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 05 Juni 2004

PANITIA UJIAN SKRIPSI

		Tanda tangan
1. Ketua	**: DR. Jeffry kusuma**	( )
2. Sekretaris	**: Drs. Raupong, MSi.**	( )
3. Anggota	**: Drs. Amir Kamal Amir, MSc.**	( )
4. Anggota	**: Andi Kresna Jaya, SSi, M.Si**	( )
5. Anggota	**: Amran, SSi, MSi.**	( )

KATA PENGANTAR

Bismillahir Rahmaanir Rahim

Assalamu Alaikum Warahmatullaahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang senantiasa mencurahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga dengan ijin-Nya penulis berhasil menyelesaikan skripsi ini . Dengan segala keterbatasan kemampuan pribadi yang dimiliki , penulis menyadari sepenuhnya bahwa tidak mungkin untuk menghasilkan sebuah tulisan yang memenuhi persyaratan sebagai suatu karya ilmiah yang penuh dengan kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis senantiasa berharap dan ikhlas menerima saran dan kritik yang membangun dari berbagai pihak demi kesempurnaan penyajian selanjutnya.

Atas taufik dan hidayah yang dilimpahkan-Nya melalui sumbangsih dari berbagai pihak, melalui kesempatan ini penulis sekali lagi mengucapkan hamdalah kehadirat-Nya, serta ucapan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada:

1. **Ayahanda Tajuddin** dan **Ibunda Rosnaeda** yang senantiasa memberikan dorongan, semangat dan doa dengan penuh keikhlasan sehingga penulis dapat menyelesaikan pendidikan pada Jurusan matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
2. **Bapak Prof. DR.Ir.Radi A.Gany** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
3. **Bapak Prof. DR.Noer Jalaluddin** selaku Dekan besrta stafnya pada Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.

4. **Bapak Drs. Muh. Zakir, MSi**. Dan **Drs. Syamsuddin Toaha, MSi**.selaku Ketua dan Sekertaris Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin.
5. **Bapak Drs. Amir Kamal Amir, MSc**. selaku Penasehat Akademik dan Pembimbing Pertama serta **Bapak Andi Kresna Jaya, SSi, MSi**., selaku Pembimbing Kedua yang penuh kesabaran dan kebijaksanaan dalam meluangkan waktunya untuk membimbing dan kesediaannya meneliti serta mengoreksi penyusunan skripsi ini hingga selesai.
6. **Bapak DR. Jeffry Kusuma, Bapak Drs. Raupong, MSi. Dan Bapak Amran, SSi, MSi.** Selaku dosen penguji.
7. Seluruh **Staf Dosen Matematika** yang telah mengasuh dan membekali penulis dengan berbagai ilmu pengetahuan selama menjadi mahasiswa pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
8. Seluruh **Staf Akademik** dan **Staf Jurusan Matematika**, yang telah banyak membantu dalam mengurus berbagai keperluan yang mendukung studi penulis.
9. Senior-Seniorku **K'Zul, K'Hamka, K'Ancha, K'Adi, K'Ibhe, K'Odhe.** Teman-teman seperjuangan **Akbar, Achank, Daus, Luke, jamil, Aco, Udhink, Make, Anjas, Alam, Hakim, Mail, Muharram, Icham, Ibar, Kiki, dan semua teman-teman seangkatan** '99 yang tidak sempat saya sebutkan namanya satu persatu, yang senantiasa memberikan dorongan,

namanya satu persatu, yang senantiasa memberikan dorongan, bantuan baik selama menyelesaikan kuliah maupun dalam menyelesaikan skripsi ini.

10. Adik-adikku **Angkatan 2001, Angkatan 2002** dan **Angkatan 2003.**

Mudah-mudahan skripsi ini dapat memberikan sumbangan ilmiah kepada almamater tercinta dan masyarakat.

Wabillahi Taufik Wal Hidayah

Wassalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, Juni 2004

Penulis

ABSTRAK

Ide utama skripsi ini adalah mencari vektor-vektor eigen yang berhubungan dengan nilai eigen dari suatu matriks polinomial dimana vektor-vektor eigen ini akan membentuk suatu rantai yang dinamakan rantai eigen . Selanjutnya metode rantai eigen matriks polinomial ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial linier berorde l dengan koefisien konstan berupa matriks yaitu

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1} x^{(l-1)}(t) + \ldots + L_0 x(t) = f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

dimana $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_l \in C^{n \times n}$, det $(L_l) \neq 0$ dan indeks pada x menyatakan turunan terhadap variabel bebas t untuk fungsi vektor $x(t)$ yang tidak diketahui.

Bentuk (*) dapat ditulis $\sum_{l=0}^{m} A_l \frac{d^l}{d\tau^l} v(\tau) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$

dan penyelesaian dari (**) diperoleh dari

$$v_{j+1}(\tau) = e^{\hat{\lambda}\tau} \sum_{p=0}^{j} \frac{\tau^p}{p!} u_{j+1-p} \quad , j = 0, 1, \ldots, k-1$$

dimana $u_1, u_2, \ldots, u_k$ adalah rantai eigen.

ABSTRACT

The main idea of this paper is to find eigen vectors of matrix polynomial where there are form a chain is called eigen chain. Furthermore, the eigen chain of matrix polynomial will be used to solving the constant-coeffisient-matrix differential equation order l is form :

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1} x^{(l-1)}(t) + \ldots + L_0 x(t) = f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Where $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_l \in C^{n \times n}$, det $(L_l) \neq 0$, and the indices on x denote derivatives with respect to the independent variabel t and supposed given $x(t)$ is to be found.

A form (*) can be written $\sum_{l=0}^{m} A_l \frac{d^l}{d\tau^l} v(\tau) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$

and a solution of (**) is obtained from $v_{j+1}(\tau) = e^{\hat{\lambda}\tau} \sum_{p=0}^{j} \frac{\tau^p}{p!} u_{j+1-p} \quad , j = 0, 1, \ldots, k-1$

where $u_1, u_2, \ldots, u_k$ are eigen chain.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i

LEMBAR KEOTENTIKAN iii

HALAMAN PENGESAHAN iv

KATA PENGANTAR vi

ABSTRAK ix

ABSTRACK x

DAFTAR ISI xi

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang 1

1.2. Rumusan Masalah 2

1.3. Batasan Masalah 2

1.4. Tujuan Penulisan 2

BAB II TEORI PENDUKUNG

2.1. Matriks 3

2.2. Determinan 5

2.3. Kebebasan Linear 6

2.4. Rank Matriks 7

2.5. Nilai Eigen 9

2.6. Diagonalisasi 10

2.7. Bentuk Kanonik Matriks 11

BAB III **TEORI SPEKTRAL MATRIKS POLINOMIAL** 13

BAB IV **CONTOH APLIKASI RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL PADA SISTEM PERSAMAAN DIFFERENSIAL** 26

BAB V **PENUTUP**

5.1. Kesimpulan 46

5.2. Saran. 46

DAFTAR PUSTAKA

BAB I
PENDAHULUAN

I.1. LATAR BELAKANG

Matriks yang dikenal selama ini pada umumnya adalah matriks yang entri-entrinya berupa bilangan atau abjad yang mempunyai ukuran bervariasi mulai dari yang kecil sampai yang paling besar dengan berbagai operasi yang berlaku pada matriks tersebut.

Selain itu masih terdapat matriks jenis lain yang jarang digunakan yaitu matriks yang entri-entrinya berupa polinomial yang selanjutnya dinamakan matriks polinomial. Dari matriks polinomial ini dapat diperoleh rantai eigen untuk mencari solusi dari suatu persamaan differensial.

Misalkan terdapat persamaan differensial linier berorde l dengan koefisien konstan berupa matriks yaitu

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1}x^{(l-1)}(t) + \ldots + L_0 x(t) = f(t),$$

dimana $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_l \in C^{n \times n}$, det $(L_l) \neq 0$ dan indeks pada x menyatakan turunan terhadap variabel bebas t untuk fungsi vektor $x(t)$ yang tidak diketahui.

Tulisan ini akan mencoba menguraikan bagaimana penggunaan rantai eigen dari matriks polinomial dalam mencari fungsi vektor $x(t)$ pada persamaan differensial linier.Untuk itulah penulis tertarik menuangkan dalam suatu tulisan dengan judul :

RANTAI EIGEN MATRIKS POLINOMIAL DAN CONTOH APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL

I.2. RUMUSAN MASALAH

Rumusan masalah dalam tulisan ini adalah bagaimana cara penggunaan rantai eigen matriks polinomial dalam mencari fungsi vektor $x(t)$ yang memenuhi persamaan differensial linier berorde l dengan koefisien konstan berupa matriks yaitu

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1} x^{(l-1)}(t) + \dots + L_0 x(t) = f(t).$$

I.3. BATASAN MASALAH

Adapun batasan masalah dalam tulisan ini adalah :

1. Pada persamaan differensial linier berorde l

   $$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1} x^{(l-1)}(t) + \dots + L_0 x(t) = f(t)$$

   penulis membatasi pada persamaan differensial linear homogen berorde 2 ($l=2$ dan $f(t)=0$) dimana $L_0, L_1, L_2, \dots, L_l \in C^{n\times n}$, $\det(L_l) \neq 0$ dan indeks pada x menyatakan turunan terhadap variabel bebas t.
2. Terdapat vektor $y \in C^n \setminus \{0\}$ dan $x \in C^n \setminus \{0\}$ yang berkorespondensi dengan vektor eigen kiri dan vektor eigen kanan . Dalam hal ini akan dibatasi pada penggunaan vektor eigen kanan sebagai wakil untuk keduanya.

I.4. TUJUAN PENULISAN

Adapun tujuan dari tulisan ini yaitu untuk mencari solusi dari sistem persamaan differensial dengan menggunakan rantai eigen matriks polinomial .

BAB II

TEORI PENDUKUNG

2.1. MATRIKS

Sebuah matriks A dapat ditulis dalam bentuk sederhana sebagai $A = \left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ atau $A = \left[a_{i,j}\right]$ dimana $a_{i,j}\left(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\right)$ melambangkan elemen dari matriks yang berada pada perpotongan dari baris ke-i dan kolom ke-j dari A.

Tinjau matriks $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

$$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

terbentuk dari baris-baris A yang dinamakan *vektor-vektor baris A*, dan vektor-vektor

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

yang terbentuk dari kolom-kolom A yang dinamakan *vektor-vektor kolom A*.

Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen real dilambangkan dengan $\Re^{m \times n}$. Sama halnya dengan $C^{m \times n}$ yang melambangkan himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen kompleks. Sedangkan $\Re^{m \times 1}$ dan $C^{m \times 1}$ melambangkan himpunan semua matriks kolom real dan kompleks dengan panjang *m*, yang berturut-turut biasa ditulis $\Re^{m}$ dan C^{m}.

Jika jumlah baris dari suatu matriks sama dengan jumlah kolomnya, yaitu $m = n$, maka matriks tersebut adalah *matriks kuadrat berorde n (square matrix of order n).* Jenis matriks kuadrat yang penting adalah *matriks identitas* yaitu matriks yang keseluruhan diagonal utamanya adalah bilangan satu sedangkan elemen yang lainnya adalah bilangan nol. Matriks identitas biasa dilambangkan dengan I yang memenuhi persamaan $AI = IA = A$ untuk setiap matriks berukuran *n x n.* Sedangkan sebuah matriks A yang memenuhi persamaan $A^2 = A$ disebut *matriks idempoten.*

Defenisi 2.1.1:

Misal diberikan sebuah matriks $A = [a_{i,j}]$ *berukuran* $m \times n$, *maka transpos dari matriks A yang dilambangkan dengan* A^T *adalah sebuah matriks* $C = [c_{i,j}]$ *berukuran* $n \times m$ *yang dihasilkan dengan memutar baris dan kolom dari A atau dengan kata lain* $[c_{i,j}] = [a_{j,i}]$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$.

Matriks bujur sangkar A dikatakan *matriks simetrik* jika $A^T = A$.

(Berdasarkan **Lancaster, Peter, MirionTismenetsky**, 1985. *The Theory of Matrices Second Edition With Applications*, Academic Press).

2.2. Determinan

Permutasi himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, . . ., n} adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan {1, 2, 3, . . ., n}, maka akan dituliskan $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\}$. Disini, j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasian , j_2 adalah bilangan kedua dan seterusnya. Sebuah *invers* dikatakan terjadi dalam permutasi $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\}$ jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Sebuah permutasi dinamakan *genap* jika jumlah invers elemen seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan *ganjil* jika jumlah invers elemen seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Jika ditinjau sebuah matriks berorde *n x n* misal *A*, maka yang diartikan *hasil kali elementer A* adalah setiap hasil kali *n* entri *A*, sedangkan dua diantaranya tidak boleh berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama. Jumlah keseluruhan hasil kali elementernya adalah *n*!. Hasil kali elementer tersebut adalah hasil kali yang berbentuk $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ dimana $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\}$ adalah permutasi himpunan {1, 2, 3, . . ., n}. Yang diartikan hasil kali elementer bertanda *A* adalah hasil kali elementer $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 atau -1. Digunakan tanda + jika $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\}$ adalah permutasi genap dan tanda – jika $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n\}$ adalah permutasi ganjil.

Defenisi 2.2.1:

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det,

$\det : M^{n\times n} \to \Re$, $M^{m\times n}$ *adalah himpunan matriks berordo* $n \times n$. *Dimana det (A) didefenisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det (A) kita namakan determinan A.*

2.3. Kebebasan Linear

Definisi 2.3.1 :

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor*

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$$

jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linear. Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linear.

Teorema 2.3.1 :

Himpunan S dengan dua vektor atau lebih adalah :

a. Tak bebas linear jika dan hanya jika paling tidak satu di antara vektor S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor S lainnya.

b. Bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dalam vektor lainnya.

Dimana kombinasi linear didefenisikan :

Sebuah vektor w dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor v_1, $v_2, \ldots, v_r$ *jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk :*

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_rv_r$$

untuk $k_1, k_2, \ldots, k_r$ *adalah skalar.*

Teorema 2.3.2 :

a. *Jika sebuah himpunan mengandung vektor nol, maka himpunan itu tak bebas linear.*
b. *Sebuah himpunan yang mempunyai dua vektor tak bebas linear jika dan hanya jika salah satu vektor itu adalah perkalian dari skalar lainnya.*

Teorema 2.3.3 :

Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *adalah himpunan vektor-vektor pada* R^n *jika* $r > n$, *maka S tak bebas linear.*

2.4. Rank Matriks

Definisi 2.4.1:

Subruang R^n *yang direntang oleh vektor-vektor baris dinamakan ruang baris A dan subruang* R^m *yang direntang oleh vektor-vektor kolom dinamakan ruang kolom dari A.*

Dimana definisi merentang :

Jika v_1, v_2, ... v_r adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear v_1, v_2, ... v_r maka dikatakan bahwa vektor-vektor ini merentang V.

Teorema 2.4.1 :

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris sebuah matriks.

Teorema 2.4.2:

Vektor-vektor baris tak nol berbentuk eselon baris dari matriks A membentuk basis untuk ruang baris A.

Dimana basis didefinisikan :

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V , maka S dinamakan basis untuk V jika :

1. *S bebas linear.*
2. *S merentang V.*

Jumlah baris tak nol pada matriks yang telah direduksi menjadi matriks eselon baris menyatakan dimensi ruang baris matriks tersebut.

Teorema 2.4.3 :

Jika A adalah sebarang matriks, maka ruang baris dan ruang kolom A mempunyai dimensi yang sama.

Definisi 2.4.2 :

Dimensi ruang baris dan ruang kolom A dinamakan rank A dan dinyatakan dengan rank (A) .

Matriks $A \in C^{mxn}$ dikatakan matriks full rank jika rank (A) = min (m,n).

(**Berdasarkan Anton, Howard,** 1995. *Aljabar Linear Elementer, Edisi kelima*; Erlangga.)

2.5. Nilai Eigen

Defenisi 2.5.1 :

Jika A adalah matriks yang berukuran n x n, maka vektor kolom tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Himpunan dari semua nilai eigen dari A disebut spektrum dari A dan dinotasikan dengan $\sigma(A)$.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A berukuran n x n, persamaan $Ax = \lambda x$ dapat ditulis sebagai :

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekivalen

$$(A - \lambda I)\, x = 0$$

Sistem persamaan linier (SPL) homogen mempunyai penyelesaian tak trivial (taknol) jika hanya jika determinan dari matriks koefisien sama dengan nol.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinan ini adalah suatu polinom dalam λ. *Suku berderajat tertinggi dalam* λ *pada polinom ini berasal dari hasil kali unsur-unsur diagonal. Jadi* $(-\lambda)^n$ *adalah suku berderajat tertinggi sehingga :*

$$\det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \cdots + b_1(-\lambda) + b_0 = 0$$

Persamaan diatas adalah polinom dalam λ *yang berderajat n dengan n adalah akar. Tidak perlu semua akar-akar ini berlainan, dan jika akarnya dihitung, maka ada n akar, yang salah satu dari akarnya dapat berupa bilangan real atau kompleks, dan mungkin ada yang sama dengan nol. Akar-akar persamaan diatas disebut akar karakteristik, akar laten atau nilai eigen dari A.*

2.6. Diagonalisasi

Defenisi 2.6.1:

Matriks kuadrat A dinamakan dapat didiagonalisasi (diagonalizable) jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga PAP^{-1} *diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.*

Teorema 2.6.1:

Jika A adalah matriks yang berukuran n x n , maka pernyataan- pernyataan berikut ekivalen satu sama lain

a. A dapat didiagonalisasi.

b. A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

Teorema 2.6.2 :

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *adalah vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *, maka* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *adalah himpunan bebas linier .*

Sebagai konsekuensi teorema 2.6.2, didapatkan hasil berikut :

Teorema 2.6.3 :

Jika matriks A berukuran nxn mempunyai nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi.

2.7. Bentuk Kanonik Matriks

Bentuk Kanonik Jordan:

Jika A mempunyai n vektor eigen bebas, matriks A similar dengan matriks J yang mempunyai n blok Jordan pada diagonalnya, artinya terdapat matriks M sehingga:

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix} = J$$

setiap blok mempunyai nilai eigen λ_1, *satu eigen vektor dan diagonal persamaan diatas :*

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Matriks A sama dengan matriks B jika bagiannya sama dengan matriks Jordan J dan sebaliknya.

(**Lancaster, Peter, MirionTismenetsky**, 1985. *The Theory of Matrices Second Edition With Applications,* Academic Press.)

BAB III

TEORI SPEKTRAL MATRIKS POLINOMIAL

Akar $\hat{\lambda}$ dari $\det(L(\lambda))$ dari matriks polinomial $L(\lambda)$ disebut nilai eigen dari $L(\lambda)$ dan masing-masing vektor $y \in C^n \setminus \{0\}$ dan $x \in C^n \setminus \{0\}$ adalah korespondensi vektor eigen kiri dan kanan jika masing-masing memenuhi $yL\left(\hat{\lambda}\right)=0$ dan $L\left(\hat{\lambda}\right)x=0$. Secara khusus, terdapat k vektor eigen kiri $y_1, y_2, ..., y_k$ dan vektor eigen kanan $x_1, x_2, ..., x_k$ dari akar kelipatan k dari $\det(L(\lambda))$.

Defenisi 3.1

Vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_k$, $u_1 \neq 0$ *membentuk rantai eigen pada nilai eigen* $\hat{\lambda}$ *dengan panjang k, jika persamaan berikut dipenuhi :*

$$\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \qquad j = 0,1,2,...,k-1$$

dimana $L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right)$ *menyatakan turunan ke-p dari L terhadap* λ *dalam* $\hat{\lambda}$.□

contoh *3.1*

Misalkan terdapat matriks polinomial berderajat dua yaitu

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0\\ \lambda+1 & \lambda(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

diperoleh :

- Nilai-nilai eigen dari $L(\lambda)$ adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1$

- Vektor-vektor $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ yang memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$ sehingga dikatakan vektor-vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_1 = 0$.

- Sedangkan vektor $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 1$ yang juga membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_2 = 1$ karena memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$.

Rantai Jordan untuk nilai eigen $\hat{\lambda}$ dengan mudah dapat diperoleh dari bentuk Smith berdasarkan langkah berikut :

Misalkan $diag[d_1(\lambda),\ldots,d_n(\lambda)] = E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda)$ adalah bentuk Smith dari matriks polinomial $L(\lambda)$. Notasikan dengan $f_i(\lambda)$ adalah kolom ke-i dari $F(\lambda)$ dan $e_i(\lambda)$ adalah kolom ke-i dari $E^{-1}(\lambda)$. Maka $L(\lambda)f_i(\lambda) = e_i(\lambda)d_i(\lambda)$, $i = 1,\ldots,n$.

Jika $d_i(\lambda)=\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^k r(\lambda)$ dengan $r\left(\hat{\lambda}\right)\neq 0, k\geq 1,$ maka $\hat{\lambda}$ adalah nilai eigen null dari $L(\lambda)$ dengan pembagi elementer $\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^k$.

Pendifferensialan $L(\lambda)f_i(\lambda)=e_i(\lambda)\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^k r(\lambda)$ sebanyak *(k-1)* kali dalam $\hat{\lambda}$ maka ruas kanan sama dengan nol dan menjumlahkan semua *k-1* persamaan memberikan persamaan

$$\sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p}L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right)f_i^{(j-p)}\left(\hat{\lambda}\right)=0, \qquad j=0,1,2,\ldots,k-1$$

sehingga vektor

$$f_i\left(\hat{\lambda}\right),\frac{1}{1!}f_i^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right),\ldots,\frac{1}{(k-1)!}f_i^{(k-1)}\left(\hat{\lambda}\right)$$

membentuk rantai eigen dengan panjang k pada nilai eigen $\left(\hat{\lambda}\right)$. Dengan bantuan dari rantai eigen kita juga dapat memperoleh sistem fundamental dari sistem persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan.

Lemma 3.1

Vektor-vektor $u_1,u_2,\ldots,u_k$ *dalam* C^n *dengan* $u_1\neq 0$ *membentuk rantai eigen pada nilai eigen* $\hat{\lambda}$ *dari matriks polinomial* $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}A_i\lambda^i$ *jika dan hanya jika fungsi*

$$v_{j+1}(\tau)=e^{\hat{\lambda}\tau}\sum_{p=0}^{j}\frac{\tau^p}{p!}u_{j+1-p} \qquad ,j=0,1,\dots,k-1$$

merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial homogen :

$$\sum_{l=0}^{m}A_l\frac{d^l}{d\tau^l}v(\tau)=0\,.\square \qquad \dots(*)$$

Bukti.

- **Pembuktian dari kiri ke kanan**

Perhitungan sederhana dicapai dengan menuliskan $A(\lambda)$ kedalam deret taylor dalam $\hat{\lambda}$:

$$A(\lambda)=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}A^{(l)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^l$$

dan mengganti λ dengan $\frac{d}{d\tau}$.

Diketahui:

Fungsi

$$v_{j+1}(\tau)=e^{\hat{\lambda}\tau}\sum_{p=0}^{j}\frac{\tau^p}{p!}u_{j+1-p} \qquad ,j=0,1,\dots,k-1$$

yaitu $v_1(\tau)=u_1e^{\hat{\lambda}\tau}$

$v_2(\tau)=(u_1\tau+u_2)e^{\hat{\lambda}\tau}$

$v_3(\tau)=\left(\frac{1}{2!}\tau^2u_1+u_2\tau+u_3\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$

$$v_k(\tau) = \left(\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} u_1 + \ldots + u_{k-1}\tau + u_k \right) e^{\hat{\lambda}\tau}$$

Akan dibuktikan :

Fungsi

$$v_{j+1}(\tau) = e^{\hat{\lambda}\tau} \sum_{p=0}^{j} \frac{\tau^p}{p!} u_{j+1-p} \qquad , j = 0, 1, \ldots, k-1$$

adalah solusi dari PD homogen $\sum_{i=0}^{m} A_i \frac{d^i}{d\tau^i} v(\tau) = 0$.

Bukti:

Dengan menuliskan $A(\lambda)$ kedalam deret taylor dalam $\hat{\lambda}$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} A^{(i)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\lambda - \hat{\lambda}\right)^i \\ &= A\left(\hat{\lambda}\right) + A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\lambda - \hat{\lambda}\right) + \ldots + \frac{1}{m!} A^{(m)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\lambda - \hat{\lambda}\right)^m \end{aligned}$$

dan mengganti λ dengan $\frac{d}{d\tau}$ maka :

$$A\left(\frac{d}{d\tau}\right) = A\left(\hat{\lambda}\right) + A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau} - \hat{\lambda}\right) + \ldots + \frac{1}{m!} A^{(m)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau} - \hat{\lambda}\right)^m.$$

Tinjau Fungsi $v_1(\tau)=u_1e^{\hat{\lambda}\tau}$

Kita amati bahwa jika $\hat{\lambda}$ adalah nilai eigen dari $A(\lambda)$ dengan vektor eigen u_1 sedemikian sehingga $A\left(\hat{\lambda}\right)u_1=0$, maka persamaan (*) mempunyai solusi $v_1(\tau)=u_1e^{\hat{\lambda}\tau}$ ini karena $\left(\frac{d}{d\tau}\right)^m\left(u_1e^{\hat{\lambda}\tau}\right)=\hat{\lambda}^m u_1e^{\hat{\lambda}\tau}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}A\left(\frac{d}{d\tau}\right)\left(u_1e^{\hat{\lambda}\tau}\right)&=\sum_{i=0}^{m}A_i\left(\frac{d}{d\tau}\right)^i\left(u_1e^{\hat{\lambda}\tau}\right)\\&=A\left(\hat{\lambda}\right)u_1\\&=0.\end{aligned}$$

Tinjau Fungsi $v_2(\tau)=(u_1\tau+u_2)e^{\hat{\lambda}\tau}$

$$A\left(\frac{d}{d\tau}\right)v_2=A\left(\hat{\lambda}\right)v_2+A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)v_2+\ldots+\frac{1}{m!}A^{(m)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^m v_2$$

dimana

$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)v_2=u_1e^{\hat{\lambda}\tau}=v_1$$

$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^2 v_2=0$$

$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^i v_2=0 \qquad untuk\ i=2,3,\ldots$$

sehingga

$$A\left(\frac{d}{d\tau}\right)(u_1\tau+u_2)e^{\hat{\lambda}\tau} = A\left(\hat{\lambda}\right)(u_1\tau+u_2)e^{\hat{\lambda}\tau} + A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)u_1 e^{\hat{\lambda}\tau}$$
$$= \left(A\left(\hat{\lambda}\right)u_1\right)\tau e^{\hat{\lambda}\tau} + \left(A\left(\hat{\lambda}\right)u_2 + A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)u_1\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$$
$$= 0.$$

karena

$$A\left(\hat{\lambda}\right)u_1 = 0, \quad A\left(\hat{\lambda}\right)u_2 = 0 \quad dan \quad A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)u_1 = 0.$$

Tinjau Fungsi $v_3(\tau) = \left(\frac{1}{2!}\tau^2 u_1 + u_2\tau + u_3\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$

$$A\left(\frac{d}{d\tau}\right)v_3 = A\left(\hat{\lambda}\right)v_3 + A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)v_3 + \ldots + \frac{1}{m!}A^{(m)}\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^m v_3$$

dimana

$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)v_3 = v_2$$
$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^2 v_3 = 0$$
$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^3 v_3 = 0$$
$$\left(\frac{d}{d\tau}-\hat{\lambda}\right)^i v_3 = 0 \qquad untuk\ i = 3,4,\ldots$$

sedemikian sehingga

$$A\left(\frac{d}{d\tau}\right)\left(\frac{\tau^2}{2!}u_1+u_2\tau+u_3\right)e^{\hat{\lambda}\tau}=A\left(\hat{\lambda}\right)\left(\frac{\tau^2}{2!}u_1+u_2\tau+u_3\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$$

$$+A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)(u_1\tau+u_2)e^{\hat{\lambda}\tau}+\frac{A^{(2)}\left(\hat{\lambda}\right)}{2!}u_1e^{\hat{\lambda}\tau}+0+\ldots+0$$

$$=\left(\frac{A^{(2)}\left(\hat{\lambda}\right)}{2!}u_1\right)\tau^2e^{\hat{\lambda}\tau}+\left(A\left(\hat{\lambda}\right)u_2+A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)u_1\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$$

$$+\left(A\left(\hat{\lambda}\right)u_3+A^{(1)}\left(\hat{\lambda}\right)u_2+\frac{A^{(2)}\left(\hat{\lambda}\right)}{2!}u_1\right)e^{\hat{\lambda}\tau}$$

$$=0.$$

Dari penjabaran diatas maka dapat kita simpulkan bahwa :

Fungsi $v_{j+1}(\tau)=e^{\hat{\lambda}\tau}\sum_{p=0}^{j}\frac{\tau^p}{p!}u_{j+1-p} \quad , j=0,1,\ldots,k-1$

adalah solusi dari PD homogen $\sum_{i=0}^{m}A_i\frac{d^i}{d\tau^i}v(\tau)=0$.

Ini berarti bahwa vektor-vektor $u_1,u_2,\ldots,u_k$ dalam C^n dengan $u_1\neq 0$ membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\hat{\lambda}$ dari matriks polinomial $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}A_i\lambda^i$.

- **Pembuktian dari kanan ke kiri**

Diketahui: Vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_k$ dalam C^n dengan $u_1 \neq 0$ membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\hat{\lambda}$ dari matriks polinomial $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i$

Akan dibuktikan: Vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_k$, $u_1 \neq 0$ memenuhi persamaan

$$\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} A^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ..., k-1.$$

Bukti :

Karna diketahui bahwa Vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_k$ dalam C^n dengan $u_1 \neq 0$ membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\hat{\lambda}$ dari matriks polinomial $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i$ maka sudah jelas bahwa vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_k$, $u_1 \neq 0$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} A^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ..., k-1$

(Berdasarkan defenisi *3.1*).

Ini berarti bahwa fungsi $v_{j+1}(\tau) = e^{\hat{\lambda}\tau} \sum_{p=0}^{j} \frac{\tau^p}{p!} u_{j+1-p} \quad , j = 0, 1, ..., k-1$

adalah solusi dari PD homogen $\sum_{i=0}^{m} A_i \frac{d^i}{d\tau^i} v(\tau) = 0$.

Banyaknya akar λ_i dari $\det(A(\xi))$ pada matriks polinomial

$$A(\xi)=\sum_{j=0}^{l} A_j\xi^j \,, A_j \in gl(n;C)$$

dihitung dengan mengalikan pangkat tertinggi dengan matriks berorde n. Polinomial $\det(A(\xi))$ dapat juga dituliskan

$$\det A(\xi)=k\prod_{i=1}^{\ln}(\xi-\lambda_i), \qquad k\in C$$

untuk setiap pembagi elementer non konstan $d_{\lambda i}(\xi)=(\xi-\lambda_i)^{r_i}$ berderajat r_i menentukan pasangan $\left(X_{d_{\lambda_i}}, J_{d_{\lambda_i}}\right)$, dimana $X_{d_{\lambda_i}}$ adalah matriks $n\times r_i$ dengan kolom-kolom $x_1,\dots,x_r$ adalah rantai eigen pada nilai eigen λ_i dan $J_{d_{\lambda i}}=\lambda_i\delta_{s,t}+\delta_{s+1,t}$ adalah blok Jordan $r_i\times r_i$:

$$X_{d_{\lambda_i}}=col[x_1,\dots x_r],\ J_{d_{\lambda_i}}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

jika $d_1(\lambda),\dots,d_s(\lambda)$ adalah penomoran dari semua pembagi elementer dari matriks polinomial $A(\lambda)$, tetapkan $X=col\left[X_{d_1},\dots,X_{d_s}\right]\in gl\left(\underbrace{ord(A)}_{n}\times\underbrace{\deg(\det A)}_{\ln};C\right)$

dimana matriks X disusun sedemikian sehingga kolom pertama dari X_{d_i} merentang

kernel dari $A(\lambda_i)$ dan $J = J_{d_1} \oplus \ldots \oplus J_{d_r} = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_r} \end{pmatrix}$

Defenisi 3.2

Pasangan (X, J) disebut pasangan spektral (berhingga) dan memuat semua data spektral.□

Berdasarkan struktur blok, pangkat ke-k dari J diperoleh dengan memangkatkan setiap sel Jordan dengan k.

Secara khusus

$$J_{d_i}^k = (\lambda_i Id + \delta_{l+1,j})^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \lambda_i^{k-n} \delta_{l+n,j}$$

semua data spektral dari matriks polinomial $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i$ dengan $A_i \in gl(n;C)$ adalah dituliskan dalam solusi dari persamaan matriks berukuran $n \times \ln$:

$$A_0 X + A_1 XJ + A_2 XJ^2 + \ldots + A_l XJ^l = 0$$

catat bahwa matriks

$$Q = col[X.J^i]_{i=0}^{l-1}$$

mempunyai rank maksimal dalam kasus khusus $\det(A_l) \neq 0$ mempunyai $Q \in GL(\ln;C)$ dan dapat membentuk matriks polinomial suatu matriks $\ln \times \ln$

$$L(\lambda)=\sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \rightarrow \mathcal{L}=\begin{pmatrix} 0 & I & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & I \\ -A_l^{-1}A_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -A_l^{-1}A_{l-1} \end{pmatrix}$$

Defenisi 3.3

$\mathcal{L}$ disebut matriks sekawan pertama, transpose $\mathcal{L}$ atau $\mathcal{L}^T$ adalah sekawan kedua dari matriks polinomial $L(\lambda)$.□

$x_0,\dots,x_{k-1}$ adalah rantai eigen dari L untuk nilai eigen λ jika vektor-vektor

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda x_0 \\ \lambda^2 x_0 \\ \vdots \\ \lambda^{l-1}x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_0 \\ \lambda^2 x_1 + 2x_0 \\ \vdots \\ \lambda^{l-1}x_1 + (l-1)\lambda^{l-2}x_0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ \lambda x_{k-1} + x_{k-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda^{l-1}x_{k-1} + \dots + x_{k-l} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

adalah rantai eigen dari $\mathcal{L}$ untuk nilai eigen λ. $\mathcal{L}$ similar dengan matriks Jordan yang adalah diagonal jika semua pembagi elementernya sederhana. Ini tidak perlu dicatat bahwa rantai dalam (**) bebas linear dan dua rantai untuk nilai eigen yang berbeda dari $\mathcal{L}$ bebas linear sedemikian sehingga himpunan dari semua rantai membentuk basis pada $gl(\ln;C)$. Lebih jelasnya tidak perlu vector $x_0,\dots,x_{k-1}$ bebas linear maupun rantai untuk nilai eigen yang berbeda bebas linear. Dalam kasus $\det(A_l)=0$ matriks polinomial $L(\lambda)$ mempunyai linearisasi:

$$C_L(\lambda)=\lambda\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & I & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_l \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & \cdots & -A_{l-1} \end{pmatrix}$$

dengan matriks $\ln\times\ln$ sedemikian sehingga kita juga mempunyai $\det(L(\lambda))=0$ jika $\det(C_L(\lambda))=0$. Jika $\det(L(\lambda))$ bukan identitas nol, ini mempunyai banyak keterbatasan, sedemikian sehingga invers, dimana keberadaannya dapat dituliskan:

$$L^{-1}(\lambda)=[Id_n,0,\ldots,0]C_L(\lambda)^{-1}[0,\ldots,0,Id_n]^T$$

dan untuk $L^{\#}(\lambda)=\lambda^l L\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ mempunyai $L^{\#}(\lambda)^{-1}=[0,\ldots,0,Id_n]C_L^{\#}(\lambda)^{-1}[0,\ldots,0,Id_n]$.

(Berdasarkan **Kilian, Martin**, 1999-10-29. *Spectral theory of polynomial Matrices.* www.gang.umass.edu/~kilian/mathesis/node 8.html.)

BAB IV
CONTOH APLIKASI RANTAI EIGEN PADA SISTEM PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Contoh 1.

Tentukan solusi dari sistem persamaan differensial berikut

$$\frac{dx_1}{dt} + 4\frac{dx_2}{dt} - x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 = 0$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan differensial diatas diubah kedalam bentuk persamaan yang umum

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1}x^{(l-1)}(t) + \ldots + L_0 x(t) = f(t)$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{(2)}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(1)}(t) + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kemudian dihubungkan dengan matriks polinomial $L(\lambda)$ yaitu

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 4\lambda - 4 \\ 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned} \det L(\lambda) &= \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= (\lambda^2 - 4)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas diperoleh tiga nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 2$

jadi $L(\lambda_1) = L(-2) = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $L(\lambda_2) = L(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $L(\lambda_3) = L(2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solusi dari sistem persamaan differensial diatas berbentuk $ue^{\lambda t}$ dimana u adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

- Untuk $\lambda_1 = -2$,

  $L(\lambda_1)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(-2)u_1 = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$. Jika $u_1 = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah

$$L(\lambda_1)u_2 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_1 = 0$$

yaitu

$$\begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -4\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$, maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = -2$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, dimana $\alpha \neq 0$. Jika dipilih $\alpha = 1$ maka diperoleh

$$u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$ maka vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_1 = -2$.

- Untuk $\lambda_2 = 1$,

  $L(\lambda_2)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(1)u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$. Jika $u_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah $L(\lambda_2)u_2 + \frac{1}{1!} L^{(1)}(\lambda_2)u_1 = 0$ yaitu :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$, maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 1$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, dimana $\alpha \neq 0$. Jika dipilih $\alpha = 1$ maka diperoleh $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$ maka vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_2 = 1$.

- Untuk $\lambda_3 = 2$,

$L(\lambda_3)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(2)u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$.

Jika $u_1 = \begin{bmatrix} -4\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah $L(\lambda_3)u_2 + \frac{1}{1!} L^{(1)}(\lambda_3)u_1 = 0$

yaitu

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}u_2+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}u_2+\begin{bmatrix}0\\ 4\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$, maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_3 = 2$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix}-4\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$, dimana $\alpha \neq 0$. Jika dipilih $\alpha = 1$ maka diperoleh $u_1 = \begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix}$.

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j}\frac{1}{p!}L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right)u_{j+1-p} = 0, \quad j=0,1,2,\ldots,k-1$ maka vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_3 = 2$.

Adapun solusi dari sistem persamaan differensial diatas yaitu :

- Untuk $\lambda_1 = -2$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_1 e^{\lambda_1 t} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2.t} \end{aligned}$$

- Untuk $\lambda_2 = 1$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= u_1 e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1.t} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} \end{aligned}$$

- Untuk $\lambda_3 = 2$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned} w_0(t) &= u_1 e^{\lambda_3 t} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2.t} \end{aligned}$$

Jadi solusi umum sistem persamaan differensial diatas adalah

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2.t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2.t}$$

Atau

$$\begin{aligned} x_1 &= -4e^{-2t} - e^{t} - 4e^{2t} \\ x_2 &= e^{-2t} + e^{t} + e^{2t} \end{aligned}$$

Contoh 2.

Tentukan solusi dari sistem persamaan differensial berikut

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}+x_1=0$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan differensial diatas diubah kedalam bentuk persamaan yang umum

$$L_l x^{(l)}(t)+L_{l-1}x^{(l-1)}(t)+\ldots+L_0 x(t)=f(t)$$

Dengan $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ yaitu

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x^{(2)}(t)+\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}x^{(1)}(t)+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}x(t)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

kemudian dihubungkan dengan matriks polinomial $L(\lambda)$ yaitu

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2&0\\\lambda+1&\lambda(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

dimana $\det L(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)=0$, sehingga diperoleh dua nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1=0$ dan $\lambda_2=1$

jadi $L(\lambda_1)=L(0)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ dan $L(\lambda_2)=L(1)=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$.

Solusi dari sistem persamaan differensial diatas berbentuk $ue^{\lambda t}$ dimana u adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

❖ Untuk $\lambda_1 = 0$,

$L(\lambda_1)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(0)u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$.

Jika $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah $L(\lambda_1)u_2 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_1 = 0$

yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

dimana β sembarang.

Anggota ketiga dari rantai yaitu u_3 diperoleh dari persamaan

$$L(\lambda_1)u_3 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_2 + \frac{1}{2!}L^{(2)}(\lambda_1)u_1 = 0$$

yaitu

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_3+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_3+\begin{bmatrix}0\\\alpha-\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_3+\begin{bmatrix}0\\\alpha-\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_3+\begin{bmatrix}0\\2\alpha-\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$u_3=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

dimana γ sembarang.

Anggota keempat dari rantai yaitu u_4 diperoleh dari persamaan

$$L(\lambda_1)u_4+\frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_3+\frac{1}{2!}L^{(2)}(\lambda_1)u_2+\frac{1}{3!}L^{(3)}(\lambda_1)u_1=0$$

yaitu:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_4+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta\\\gamma\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_4+\begin{bmatrix}0\\-2\alpha+\beta-\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_4+\begin{bmatrix}0\\-2\alpha+\beta-\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u_4+\begin{bmatrix}\alpha\\-2\alpha+2\beta-\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

karena $\alpha\neq 0$ maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh tiga buah vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$,

dimana $\alpha \neq 0$ dan β, γ sembarang. Jika dipilih $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ maka diperoleh

$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena vektor-vektor $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0$, $j = 0, 1, 2, ..., k-1$ maka vektor-vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_1 = 0$.

- Untuk $\lambda_2 = 1$,

  $L(\lambda_2)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(1)u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$.

Jika $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah

$$L(\lambda_2)u_2 + \frac{1}{1!} L^{(1)}(\lambda_2)u_1 = 0$$

yaitu :

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}u_2 + \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}u_2 + \begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$ maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 1$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}$. Jika di pilih $\alpha = 1$ maka diperoleh $u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j}\frac{1}{p!}L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right)u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,...,k-1$ maka vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_2 = 1$.

Adapun solusi dari sistem persamaan differensial diatas yaitu :

- Untuk $\lambda_1 = 0$ dengan vektor-vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ dan $u_3 = \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

  Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned}u_0(t) &= u_1 e^{\lambda_1 t}\\ &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{0.t}\\ &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= (tu_1 + u_2)e^{\lambda_1 t} \\
&= \left(t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)e^{0.t} \\
&= \begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(t) &= \left(\frac{1}{2!}t^2u_1 + tu_2 + u_3\right)e^{\lambda_1 t} \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}\right)e^{0.t} \\
&= \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-2+t\\\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Untuk $\lambda_2 = 1$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Solusinya yaitu :

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= u_1e^{\lambda_2 t} \\
&= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{1.t} \\
&= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{t}
\end{aligned}
$$

Jadi solusi umum sistem persamaan differensial diatas adalah

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2+t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

Atau

$$x_1 = -1 + t$$
$$x_2 = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + e^t \ .$$

Contoh 3.

Tentukan solusi dari sistem persamaan differensial berikut

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt}-x_2=0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}-2\frac{dx_1}{dt}-3\frac{dx_2}{dt}+2x_2=0$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan differensial diatas diubah kedalam bentuk persamaan yang umum

$$L_l x^{(l)}(t) + L_{l-1}x^{(l-1)}(t) + \dots + L_0 x(t) = f(t)$$

Dengan $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{(2)}(t)+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x^{(1)}(t)+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kemudian dihubungkan dengan matriks polinomial $L(\lambda)$ yaitu

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda-1 \\ -2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned}\det L(\lambda) &= (\lambda^2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)+2\lambda(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)((\lambda^2+\lambda)(\lambda-2)+2\lambda) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+2\lambda) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^3-\lambda^2) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2)(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda^2)=0\end{aligned}$$

sehingga diperoleh dua nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1$

jadi $L(\lambda_1) = L(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $L(\lambda_2) = L(1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solusi dari sistem persamaan differensial diatas berbentuk $ue^{\lambda t}$ dimana u adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

- Untuk $\lambda_1 = 0$,

  $L(\lambda_1)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(0)u_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$. Jika $u_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah

$$L(\lambda_1)u_2 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_1 = 0$$

yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana β *sembarang*.

Anggota ketiga dari rantai yaitu u_3 diperoleh dari persamaan

$L(\lambda_1)u_3 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_1)u_2 + \frac{1}{2!}L^{(2)}(\lambda_1)u_1 = 0$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ -3\alpha - 2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ -3\alpha - 2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -3\alpha - 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$ maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh dua vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$ dimana $\alpha \neq 0$. Jika di pilih $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$ maka diperoleh $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$ maka vektor-vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_1 = 0$.

- Untuk $\lambda_2 = 1$,

$L(\lambda_2)u_1 = 0$ dimana $u_1 \neq 0$ maka

$$L(1)u_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

dimana $\alpha \neq 0$. Jika $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $\alpha \neq 0$, persamaan untuk u_2 adalah

$$L(\lambda_2)u_2 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_2)u_1 = 0$$

yaitu :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

dimana β *sembarang*.

Anggota ketiga dari rantai yaitu u_3 diperoleh dari persamaan

$$L(\lambda_2)u_3 + \frac{1}{1!}L^{(1)}(\lambda_2)u_2 + \frac{1}{2!}L^{(2)}(\lambda_2)u_1 = 0$$

yaitu

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ 2\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena $\alpha \neq 0$ maka persamaan diatas tidak mempunyai solusi.

Jadi diperoleh dua vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ yaitu $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ dimana $\alpha \neq 0$. Jika di pilih $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$ maka diperoleh $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Karena vektor $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. memenuhi persamaan $\sum_{p=0}^{j} \frac{1}{p!} L^{(p)}\left(\hat{\lambda}\right) u_{j+1-p} = 0,\quad j = 0,1,2,\ldots,k-1$ maka vektor tersebut membentuk rantai eigen pada nilai eigen $\lambda_2 = 1$.

Adapun solusi dari sistem persamaan differensial diatas yaitu :

❖ Untuk $\lambda_1 = 0$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_1 e^{\lambda_1 t} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{0.t} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u_1(t) &= (tu_1 + u_2)e^{\lambda_1 t} \\ &= \left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{0.t} \\ &= \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

❖ Untuk $\lambda_2 = 1$ dengan vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Solusinya yaitu :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= u_1 e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1.t} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= (tu_1 + u_2)e^{\lambda_2 t} \\
&= \left(t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{1t} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{1t} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^{t}
\end{aligned}
$$

Jadi solusi umum sistem persamaan differensial diatas adalah

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^{t} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + t - \frac{1}{2}e^{t} \\ 1 + e^{t} + te^{t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Atau

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + t - \frac{1}{2}e^{t} \\
x_2 &= 1 + e^{t} + te^{t}
\end{aligned}
$$

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Dari uraian diatas dapat kita simpulkan bahwa :

1. Solusi dari sistem persamaan differensial linier homogen ordo 2 dengan koefisien konstan dengan menggunakan Metode Rantai Eigen Matriks Polinomial adalah $v_{j+1}(\tau) = e^{\hat{\lambda}\tau} \sum_{p=0}^{j} \frac{\tau^p}{p!} u_{j+1-p}$ $, j = 0,1,\ldots,k-1$ dimana *Vektor-vektor* $u_1, u_2, \ldots, u_k,$ $u_1 \neq 0$ *membentuk rantai eigen pada nilai eigen* $\hat{\lambda}$.
2. Vektor-vektor eigen dari matriks polinomial yang membentuk sebuah rantai eigen mempunyai pengaruh yang sangat besar dalam menentukan solusi dari sistem persamaan differensial linier homogen .

5.2. Saran

Diharapkan kepada mahasiswa F.MIPA khususnya jurusan matematika yang tertarik pada bidang aljabar agar dapat mengembangkan skripsi ini lebih jauh seperti penerapannya pada persamaan differensial linear inhomogen berorde *l* dengan menggunakan vektor eigen kiri.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, 1995. *Aljabar Linear Elementer, Edisi kelima*, Erlangga.

Ayres, Frank, 1983. *Theory and Problems of Matrices, SI (Metric) Edition*, Schaum's Outline Series.

Kilian, Martin, 1999-10-29. *Spectral theory of polynomial Matrices.* www.gang.umass.edu/~kilian/mathesis/node 8.html.

Lancaster, Peter, MirionTismenetsky, 1985. *The Theory of Matrices Second Edition With Applications*, Academic Press.