PENYELESAIAN NUMERIK

PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

OLEH:

HASMAWATI
H 111 01 002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2005

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Pada Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

OLEH:

HASMAWATI
H 111 01 002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2005

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

PENYELESAIAN NUMERIK

PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, Desember 2005

HASMAWATI
NIM. H111 01 002

PENYELESAIAN NUMERIK

PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama

Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc
NIP. 130 992 471

Pembimbing Pertama

N u r d i n, S.Si, M.Si
NIP. 132 259 080

Pada Tanggal : Desember 2005

Pada hari ini, Kamis Tanggal 15 Desember 2005, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 Desember 2005

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1.Ketua	: Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc	(……………………)
2.Sekretaris	: Drs. La Podje Talangko	(……………………)
3.Anggota	: Drs. Amir Kamal A., M.Sc	(……………………)
4.Anggota	: Nurdin, S.Si, M.Si	(……………………)
5.Anggota	: Drs. Muh. Hasbi, M.Sc	(……………………)

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada **Allah SWT** yang senantiasa mencurahkan rahmat, karunia, serta hidayah-Nya kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini. Salam dan salawat tercurah kepada **Rasulullah SAW** sebagai suri tauladan bagi setiap insan di dunia.

Penulisan skripsi ini diajukan sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari berbagai macam hambatan dan kendala, mulai dari tahap pembuatan proposal hingga tahap penulisan. Namun berkat usaha yang optimal, do'a serta bantuan dan motivasi dari berbagai pihak, hal tersebut dapat diatasi. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada **Ayahanda Laman (Alm)** dan **Ibunda Baharia** atas segala dukungan yang diberikan baik berupa do'a maupun dari segi materil yang sangat besar dan berarti.

Pada kesempatan ini pula penulis dengan tulus hati dan penuh kerendahan hati, menghaturkan ucapan terima kasih kepada :

1. **Bapak Drs. Amir Kamal Amir M.Sc** selaku Pembimbing Utama dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah memberikan bimbingan, petunjuk dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. **Bapak Nurdin, S.Si, M.Si** selaku pembimbing pertama yang telah menyediakan dan meluangkan waktu, tenaga dan pikiran dalam membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya skripsi ini dan sekaligus selaku Penasehat Akademik yang sudah banyak memberikan nasehat-nasehat kepada penulis selama perkuliahan.
3. **Bapak Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah banyak membantu penulis dalam perkuliahan.
4. **Bapak Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc, Bapak Drs. La Podje, dan Bapak Drs. Muh. Hasbi, M.Sc** selaku penguji yang telah meluangkan waktunya.
5. **Bapak Pimpinan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin** beserta seluruh stafnya yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menjalankan perkuliahan.
6. Para **Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unhas** yang telah memberikan banyak ilmunya selama proses perkuliahan.
7. Para pegawai FMIPA Unhas khususnya Jurusan Matematika : **Pak Zaimun, Pak Amin, dan Pak Nasir** yang telah membantu kelancaran studi Penulis.
8. Adik-adikku : **Yana 'n Hasim** atas doa dan dukungannya selama aku kuliah dan penulisan skripsi ini.

9. Sepupu-sepupuku **Wahid** makasih atas *dukunganmu,* **Neneng, Kurni,Citra, Kartini** dan seluruh keluarga besarku yang selalu mensupport dan mendoakan aku selama kuliah dan menyusun skripsi.
10. *Anak2 Pamessangi* : **Harma, Bardan, Ima, Warda, Yudhi, Yaya, Anto, Mudar, Phay, Ita', Daru, Padha' 'n Aja', Suaib, Ummu, Uttang, K' Ica, Diana, Uti, Ida, Ummy** yang telah menemaniku dalam suka dan duka selama empat tahun.
11. *Teman-temanku* : **Kadek, Almin, Uci** *(makasih atas komputernya!),* **Yunus, Iwan, Rifay, Dahlan, Ridho.**
12. Teman jalanku : **Dery** atas kebersamaan kita akhir-akhir ini dalam menyelasaikan skripsi ini.
13. Teman-teman **Angkatan '01 Ida S.Si, Maya S.Si, Arma, Esra, Fany, Hasnah , Rahma, Mujha, Chichy, Neldy, Dian, Nhunu, Ahsan, Sudi, Imran, Himawan, Ilyas, Yati, Sina, Fhivhy, Fahd, Dewi, Fidhia, Yemi, Widia, Rani, Anita, Ale, Uni, Uli, Wati, Hana, Marwa, Awi'.**
14. Kakak-kakak **Angkatan '98, '99,** dan **'00** serta adik-adikku **Angkatan '02, '03, '04,** dan **'05** dan semua pihak yang tak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas semua bantuannya yang telah diberikan kepada penulis.
15. Terakhir buat kamarku (***Kamarku Istanaku***) yang dengan setia menemani hari-hariku dalam suka dan duka.

Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga saran dan kritik dari pembaca sangat penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini.

Akhirnya, kepada **Allah SWT** kita bermohon, semoga berkah dan rahmat dan limpahan pahala yang berlipat ganda selalu dicurahkan kepada kita sekalian. Amin Yaa Rabbal Aalamin.

Makassar, Desember 2005

Penulis

ABSTRAK

Dalam penulisan ini akan ditunjukkan bagaimana menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks $AX^2 + BX + C = 0$ di mana A, B, C adalah suatu matriks kuadrat. Metode yang digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks adalah metode Numerik yaitu metode Newton, metode Bernoulli, Generalisasi Dekomposisi Schur dan Masalah nilai eigen kuadrat.

ABSTRACT

In this paper will show how to computing a solution of the quadratic matrix equation :

$$AX^2 + BX + C = 0; \quad A, B, C \text{ square matrix}$$

Methods that we used to show it, numeric methods is Newton's method, Bernoulli's method, Generalized Schur Decomposition and the quadratic eigenvalue problem.

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam aljabar matriks dikenal dua bentuk persamaan matriks yaitu matriks linear dan matriks non linear. Dalam tulisan ini yang akan dibahas adalah salah satu bentuk matriks non linear yaitu bentuk kuadratik matriks yang didefinisikan :

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = 0 \qquad \text{di mana } A, B, C \in C^{n\times n} \text{ } dan \text{ } A \neq 0$$

Motivasi untuk mempelajari persamaan kuadrat matriks berasal dari masalah nilai eigen kuadrat yang bermanfaat dalam bidang arsitektur dan masalah getaran (Nicholas, J.H, 1999).

Dari bentuk persamaan kuadrat matriks di atas, muncul pertanyaan apakah menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks digunakan metode seperti dalam menyelesaikan persamaan kuadrat skalar. Jawabnya tidak, kecuali pada kasus khusus di mana $A = I$, B dan C dapat dibalik, dan $B^2 - 4C$ mempunyai akar kuadrat. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat matriks adalah dengan metode numerik yaitu suatu metode untuk menyelesaikan suatu persoalan yang telah diformulasikan dengan hanya menggunakan operasi aritmetika saja (Benjamin, F.P,1992).

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji persamaan kuadrat matriks tersebut dalam bentuk tugas akhir dengan judul

"Penyelesaian Numerik Persamaan Kuadrat Matriks".

B. Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini yaitu bagaimana menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks dengan menggunakan metode numerik.

C. Batasan Masalah

Dalam kajian dan penulisan tugas akhir ini, metode yang akan digunakan adalah Generalisasi Dekomposisi Schur dan masalah nilai eigen kuadrat dan metode numerik yaitu metode Newton dan metode Bernoulli.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks dengan metode Newton, metode Bernoulli, Generalisasi Dekomposisi Schur dan masalah nilai eigen kuadratik serta menggambarkan dan membandingkan teknik solusi numerik tersebut.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

A. Matriks Uniter

Untuk matriks-matriks dengan unsur riil, matriks ortogonal $(A^{-1} = A')$ dan matriks simetri $(A = A')$ memainkan peranan yang penting dalam masalah pendiogonalan. Untuk matriks dengan unsur kompleks, matriks ortogonal dan simetri secara relatif kurang penting, matriks-matriks tersebut diungguli oleh dua kelas matriks baru, matriks *uniter* dan *Hermite.*

Jika A merupakan matriks dengan unsur kompleks, maka transpos sekawan A, dinyatakan oleh A^* didefinisikan oleh:

$$A^* = \overline{A}'$$

di mana $\overline{A}$ adalah matriks yang unsur-unsurnya adalah sekawan kompleks dari unsur-unsur yang seletak dalam A dan $\overline{A}'$ adalah transpos dari $\overline{A}$.

(Anton, Howard, 1998).

Matriks dengan unsur riil disebut *ortogonal* jika $A^{-1} = A'$. Analog kompleks dari matriks ortogonal disebut *matriks uniter* yang didefenisikan sebagai berikut:

Definisi 1.

Matriks bujur sangakar A dengan unsur kompleks disebut uniter jika $A^{-1} = A^*$.

(Anton, Howard, 1998)

Definisi 2.

Misalkan $A \in C^{n \times n}$, maka A adalah uniter jika $A^* A = I = AA^*$

(Stewart, G.W, 1973)

Teorema 1.

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan unsur-unsur kompleks dan k sebarang bilangan kompleks, maka

a. $(A^*)^* = A$

b. $(A + B)^* = A^* + B^*$

c. $(kA)^* = \bar{k}A^*$

d. $(AB)^* = B^* A^*$

B. Generalisasi Dekomposisi Schur

Misalkan A dan B adalah matriks kompleks $n \times n$, dan terdapat dua matriks uniter Q dan Z sedemikian sehingga

$$S = Q^* AZ \qquad \text{dan} \qquad T = Q^* BZ$$

di mana S dan T adalah matriks segitiga atas. Dekomposisi ini disebut *generalisasi dekomposisi Schur* .

(Gene, H. G, dan Charles, F. V. L, 1996)

C. Faktorisasi QR

Misalkan A adalah matriks $n \times k$ dengan vektor-vektor kolomnya yang saling bebas di $\Re^n$. Terdapat matriks Q berukuran $n \times k$ dengan vektor-vektor kolomnya adalah ortonormal dan matriks R adalah matriks segitiga atas yang dapat dibalik (invertible) berukuran $k \times k$ sedemikian sehingga $A = QR$.

(John, B. F, dan Raymond, A. B, 1989).

D. Basis Ortonormal

Definisi 3.

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal setiap vektornya mempunyai norm 1 dinamakan *ortonormal*.

(Anton, Howard, 1998)

Misalkan A matriks $n \times n$ dengan matriks kolom $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dikatakan membentuk suatu basis ortonormal untuk ruang $\Re^n$ jika dan hanya jika

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} 0 & jika\ i \neq j, \quad a_i \perp a_j \\ 1 & jika\ i = j, \quad \|a_i\| = 1 \end{cases}$$

Karena $A'A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ mempunyai $a_i \cdot a_j$ dalam baris ke-i dan kolom ke-j. Kolom dari A akan membentuk basis ortonormal dari $\Re^n$ jika dan hanya jika $A'A = I$.

(J. Supranto, M. A, 1992)

E. Metode Newton

Tedapat suatu persamaan $f(x)=0$ dengan suatu variabel x, misalkan x_0 adalah solusi yang mendekati $f(x)=0$ dan $x_1=x_0+h$ yang merupakan solusi yang lebih tepat agar $f(x_1)=0$. Dalam menyelesaikan persamaan $f(x)=0$, metode Newton dijabarkan dengan menggunakan expansi taylor untuk $f(x_0+h)$:

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots=0$$

dengan mengabaikan turunan kedua dan suku tingkat tinggi, maka dapat ditulis

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0$$

atau

$$h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Sebuah pendekatan yang lebih baik dari x_0 diberikan oleh x_1 di mana

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Kemudian pendekatan berturut-turut diberikan oleh $x_2, x_3 \ldots, x_{n+1}$ di mana

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

persamaan ini disebut Newton formula.

(Sastry S. S., 1997)

F. Metode Bernoulli

Misalkan persamaan polinomial dituliskan dalam bentuk

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Untuk menentukan solusi dari persamaan polinomial di atas, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Bernoulli di mana persamaan polinomial dituliskan dalam relasi rekurensi

$$a_n x_k + a_{n-1} x_{k-1} + \ldots + a_0 x_{k-n} = 0$$

atau dapat dituliskan

$$x_k = \frac{-a_{n-1} x_{k-1} - a_{n-2} x_{k-2} - \cdots - a_0 x_{k-n}}{a_n}$$

di mana $a_n \neq 0$

Barisan $\{x_k\} = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots$ dihitung dengan memilih satu atau beberapa nilai awal dan akan diperoleh barisan yang konvergen dengan menghitung rasio $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|}$.

(Benjamin, F. P, 1992)

BAB III

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS

A. Masalah Nilai Eigen Kuadrat

Untuk menentukan solusi dari persamaan kuadrat matriks, dapat diselesaikan secara langsung dengan menggunakan masalah nilai eigen kuadrat. Persamaan kuadrat matriks jika dihubungkan dengan masalah nilai eigen kuadratik adalah:

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0 \qquad \text{......(1)}$$

Teori matriks-λ: jika X adalah pemecahan dari $Q(X)$ maka $X - \lambda I$ adalah pembagi kanan dari $Q(\lambda)$ dan hal ini muda untuk dibuktikan karena hasil baginya dalam bentuk sederhana.

$$\lambda^2 A + \lambda B + C = -(B + AX + \lambda A)(X - \lambda I) \qquad \text{......(2)}$$

Karena pasangan nilai eigen dari X adalah pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$ maka solusinya dapat dikonstruksi dalam bentuk pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$. Jika $Q(\lambda_i)w_i = 0$, $\quad i = 1, 2, ..., n$ maka

$$AW(\,diag(\lambda_i))^2 + BW\,diag(\lambda_i) + CW = 0 \qquad \text{......(3)}$$

di mana $W = [w_1, ..., w_n]$ dengan W adalah nonsingular. Persamaan (3) dikalikan dengan W^{-1} dari kanan, maka diperoleh

$$AW\,diag((\lambda_i))^2 W^{-1} + BW\,diag(\lambda_i)W^{-1} + CW\,W^{-1} = 0$$

Jadi $X = W\,diag(\lambda_i)W^{-1}$ adalah solusi.

Teorema I.

Misalkan $Q(\lambda)$ mempunyai nilai eigen yang berbeda $\{\lambda_i\}_{i=1}^{p}$ dengan $n \le p \le 2n$ dan bersesuaian dengan himpunan vektor eigen $\{v_i\}_{i=1}^{p}$ yang memenuhi kondisi Haar (setiap subset dari n vektor eigen adalah bebas linear), maka terdapat paling sedikit C_n^p solusi yang berbeda dari *Q(X)* dan tepatnya jika $p = 2n$, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$X = W\, diag(\lambda_i) W^{-1} \qquad \text{dan} \qquad W = [w_1, ..., w_n] \qquad .....(4)$$

di mana pasangan nilai eigen $(\lambda_i, w_i)_{i=1}^{n}$ adalah dipilih diantara pasangan nilai eigen $(\lambda_i, w_i)_{i=1}^{p}$ dari *Q*.

Bukti

Terdapat C_n^p pilihan dari X pada persamaan (4).

Karena $\lambda_i^{\,2} A w_i + \lambda_i w_i + C w_i = 0$, maka

$$AW(\,diag(\lambda_i))^2 + BW\, diag(\lambda_i) + CW = 0$$

Dan selanjutnya dikalikan dari kanan dengan W^{-1}, maka

$$AW\, diag((\lambda_i))^2 W^{-1} + BW\, diag(\lambda_i) W^{-1} + CW\, W^{-1} = 0$$

Agar terdapat C_n^p solusi yang berbeda maka tidak boleh ada nilai eigen yang sama. Dari persamaan (2) diasumsikan bahwa $Q(\lambda)$ mempunyai p nilai eigen, maka terdapat solusi X dengan nilai eigen yang berbeda sehingga dapat didiagonalisasi.

Karena pasangan nilai eigen dari X juga merupakan pasangan nilai eigen dari $Q(\lambda)$, maka X dapat dituliskan

$$X = W\, diag(\lambda_i) W^{-1} \qquad W = [w_1, ..., w_n]$$

Contoh

$$Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Pasangan nilai eigen (λ_i, w_i) dari $Q(\lambda)$ adalah :

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & -6\lambda \\ 2\lambda & -9\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda & -6\lambda + 12 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 9\lambda + 14 \end{bmatrix}$$

$$\det Q(\lambda) = 0$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda & -6\lambda + 12 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 9\lambda + 14 \end{bmatrix} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik dalam λ

$$(\lambda^2 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) - (2\lambda - 2)(-6\lambda + 12) = 0$$

$$\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = 0$$

Maka diperoleh

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3 \qquad \lambda_4 = 4$$

Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen adalah

- Untuk $\lambda_1 = 1$

  Vektor eigennya adalah: $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Untuk $\lambda_2 = 2$

  Vektor eigennya adalah $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Untuk $\lambda_3 = 3$

  Vektor eigennya adalah $w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Untuk $\lambda_4 = 4$

  Vektor eigennya adalah $w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan ***teorema 1*** di atas maka diperoleh solusi dari pasangan nilai eigen yang berbeda kecuali 3 dan 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Didefinisikan

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \text{.......(5)}$$

Lemma 2.

X adalah solusi dari $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$ jika dan hanya jika

$$F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X \qquad \text{.......(6)}$$

Bukti

- Jika X adalah solusi dari $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$ maka :

$$F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$$

Bukti dari kiri :

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$$

$$AX^2 = -BX - C$$

atau dapat dituliskan

$$-C - BX = AX^2$$

$$\begin{bmatrix} X \\ -C - BX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ AX^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ AX \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$$

Sehingga dari persamaan (5), maka persamaan di atas dapat dituliskan

$$F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$$

- Jika $F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$ maka X adalah solusi dari $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$

Bukti dari kanan

$$F\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} X \\ -C-BX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ AX \end{bmatrix}X$$

$$\begin{bmatrix} X \\ -C-BX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ AX^2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$-C - BX = AX^2$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk $AX^2 + BX + C = 0$

B. Metode Schur

`Metode kedua adalah metode Schur, disini solusi akan dihitung dengan menggunakan generalisasi dekomposisi Schur $Q^*FZ = T$, $Q^*GZ = S$ dari F dan G pada (5). Teorema berikut akan menunjukkan bahwa jika Z_{11} adalah nonsingular maka $X = Z_{21}\, Z_{11}^{-1} = Q_{11}\, T_{11}\, S_{11}^{-1}\, Q_{11}^{-1}$ adalah solusi.

Teorema 3.

Setiap pemecahan dari $Q(X)$ adalah berbentuk $X = Z_{21}\, Z_{11}^{-1} = Q_{11}\, T_{11}\, S_{11}^{-1}\, Q_{11}^{-1}$

di mana

$$Q^* FZ = T\,, \qquad\qquad Q^* GZ = S \qquad\qquad \ldots\ldots(7)$$

adalah generalisasi dekomposisi Schur dengan Q dan Z adalah matriks uniter, T dan S adalah matriks segitiga atas dan setiap matriks adalah matriks blok 2×2.

Bukti

Pertama kita akan tunjukkan bahwa $X = Z_{21}\, Z_{11}^{-1}$ dengan Z_{11} nonsingular adalah solusi. Dari persamaan (7) yakni $Q^* FZ = T$ dan $Q^* FZ = T$ dikalikan dengan Q dari kiri, maka diperoleh

$$FZ = QT \qquad \text{dan} \qquad GZ = QS$$

- Untuk $FZ = QT$, maka

$$FZ = QT$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ -CZ_{11} - BZ_{21} & -CZ_{12} - BZ_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}T_{11} & Q_{11}T_{12} + Q_{12}T_{22} \\ Q_{21}T_{11} & Q_{21}T_{12} + Q_{22}T_{22} \end{bmatrix}$$

- Untuk $GZ = QS$, maka

$$GZ = QS$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ AZ_{21} & AZ_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}S_{11} & Q_{11}S_{12} + Q_{12}S_{22} \\ Q_{21}S_{11} & Q_{21}S_{12} + Q_{22}S_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$Z_{21} = Q_{11}T_{11} \quad \text{atau} \quad Q_{11}^{-1}Z_{21} = T_{11} \qquad \text{.......(8)}$$

$$-CZ_{11} - BZ_{21} = Q_{21}T_{11} \qquad \text{.......(9)}$$

$$Z_{11} = Q_{11}S_{11} \quad \text{atau} \quad Z_{11}^{-1}Q_{11} = S_{11}^{-1} \qquad \text{......(10)}$$

$$AZ_{21} = Q_{21}S_{11} \quad \text{atau} \quad AZ_{21}S_{11}^{-1} = Q_{21} \qquad \text{......(11)}$$

Dari persamaan (9) dikalikan dari kanan dengan Z_{11}^{-1}, maka diperoleh

$$(-CZ_{11} - BZ_{21})Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-CZ_{11}Z_{11}^{-1} - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-CI - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}T_{11}Z_{11}^{-1} \qquad \text{......(12)}$$

Selanjutnya persamaan (8) disubtitusi ke persamaan (12), maka diperoleh

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = Q_{21}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \qquad \text{......(13)}$$

Persamaan (11) disubtitusi ke persamaan (13), maka diperoleh

$$-C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} = AZ_{21}S_{11}^{-1}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \qquad \text{......(14)}$$

Persamaan (10) disubtitusi ke persamaan (14), maka diperoleh

$$\begin{aligned} -C - BZ_{21}Z_{11}^{-1} &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}Q_{11}Q_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \\ &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}IZ_{21}Z_{11}^{-1} \\ &= AZ_{21}Z_{11}^{-1}Z_{21}Z_{11}^{-1} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $X = Z_{21} Z_{11}^{-1}$

Misalkan X adalah solusi dari $Q(X)$ yang memenuhi *lemma 2* yakni persamaan (6).

Misalkan

$$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{.......(15)}$$

adalah faktorisasi QR. Itu mudah dilihat bahwa R dan Z_{11} adalah nonsingular dan $X = Z_{21}R = Z_{21}Z_{11}^{-1}$.

Dari persamaan (7) yaitu $Q^*GZ = S$ dikalikan dengan Q dari kiri, maka diperoleh

$$GZ = QS$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

adalah merupakan faktorisasi QR.

Persamaan (6) dikalikan dari kiri dengan Q^* dan gunakan persamaan (15)

$$Q^* F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = Q^* G \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X$$

Dan selanjutnya subtitusi persamaan (15), sehingga diperoleh

$$Q^* FZ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q^* G \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$T \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} R \\ T_{21} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} R \\ 0 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} R \\ T_{21} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} R X \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh $T_{21} R = 0$ dan mengakibatkan $T_{21} = 0$. Dan persamaan di atas, sebagai pelengkap generalisasi dekomposisi Schur untuk penguat $X = Z_{21} Z_{11}^{-1}$. Akhirnya diperoleh $X = Z_{21} Z_{11}^{-1} = Q_{11} T_{11} S_{11}^{-1} Q_{11}^{-1}$.

Aspek tersembunyi dari *teorema 3* adalah suatu catatan berharga. Jika A adalah singular maka persamaan (11) menunjukkan Q_{21} atau S_{11} adalah singular. Namun, sebaliknya bagian pembuktian menunjukkan bahwa jika solusinya ada maka akan dipilih generalisasi dekomposisi Schur dengan S_{11} dan Z_{11} adalah nonsingular. Untuk contoh jika $A = C = 0$ dan $B = I$, solusinya hanya matriks nol maka dapat diambil $Q = Z = I$ dan $S_{11} = Z_{11} = I$.

C. Metode Newton

Metode Newton untuk memecahkan persamaan kuadrat matriks dijabarkan dengan menggunakan ekspansi untuk $Q(X + E) = 0$

$$Q(X + E) = A(X + E)^2 + B(X + E) + C$$

$$= A(X+E)(X+E)+B(X+E)+C$$

$$= A(X^2+XE+EX+E^2)+BX+BE+C$$

$$= AX^2+AXE+AEX+AE^2+BX+BE+C$$

$$= Q(X)+AXE+AEX+BE+AE^2$$

$$= Q(X)+[AEX+(AX+B)E]+AE^2$$

Jadi diperoleh

$$Q(X)+[AEX+(AX+B)E]+AE^2=0$$

dengan mengabaikan AE^2 maka diperoleh :

$$[AEX+(AX+B)E]=-Q(X)$$

dengan iterasi dituliskan

$$[AE_kX_k+(AX_k+B)E_k]=-Q(X_k)$$

Dan untuk mendapatkan matrik X pada persamaan kuadrat matriks $Q(X)=AX^2+BX+C=0$, maka digunakan persamaan berikut :

$$X_{k+1}=X_k+E_k$$

untuk $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

D. Fungsi Iterasi

Salah satu cara untuk mencoba memecahkan persamaan kuadrat matriks $AX^2+BX+C=0$ adalah dapat dituliskan dengan bentuk

$$X = F(X)$$

Dan dengan iterasi didefenisikan : $X_{k+1} = F(X_k)$. Dan dengan asumsi bahwa A adalah nonsingular. Ini dapat diselesaikan dengan beberapa cara yaitu:

$$X_{k+1} = (-A^{-1}(B X_k + C))^{1/2} \qquad .....(16)$$

$$X_{k+1} = -B^{-1}(A X_k^2 + C) \qquad .....(17)$$

$$X_{k+1} = -A^{-1}(B + C X_k^{-1}) \qquad ......(18)$$

Persamaan (16) di atas dapat diperoleh dengan mengalikan A^{-1} dari kiri terhadap persamaan kuadrat matriks yang berbentuk $AX^2 + BX + C = 0$, maka diperoleh

$$A^{-1}AX^2 = -A^{-1}(BX + C)$$

$$X^2 = -A^{-1}(BX + C)$$

$$X = (-A^{-1}(BX + C))^{1/2}$$

Dengan iterasi dapat dituliskan

$$X_{k+1} = (-A^{-1}(B X_k + C))^{1/2}$$

Persamaan (17) di atas dapat diperoleh dengan mengalikan B^{-1} dari kiri terhadap persamaan kuadrat matriks yang berbentuk $AX^2 + BX + C = 0$, sehingga diperoleh

$$B^{-1}BX = -B^{-1}(AX^2 + C)$$

$$IX = -B^{-1}(AX^2 + C)$$

$$X = -B^{-1}(AX^2 + C)$$

Dengan iterasi dapat dituliskan

$$X_{k+1} = -B^{-1}(AX_k^2 + C)$$

Persamaan (18) di atas diperoleh dengan mengalikan X^{-1} dari kanan terhadap $AX^2 + BX + C = 0$, sehingga diperoleh

$$AXXX^{-1} + BXX^{-1} + CX^{-1} = 0$$

$$AX + B + CX^{-1} = 0$$

$$AX = -(B + CX^{-1})$$

Kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} dari kiri, maka diperoleh

$$A^{-1}AX = -A^{-1}(B + CX^{-1})$$

$$X = -A^{-1}(B + CX^{-1})$$

Dengan iterasi, dapat dituliskan

$$X_{k+1} = -A^{-1}(B + CX_k^{-1})$$

Iterasi di atas tidak dapat ditransformasikan ke bentuk sederhana, sehingga sulit untuk mendapatkan hasil yang konvergen dari aplikasi yang praktis. Oleh karena itu, akan digunakan iterasi Bernoulli dan metode lain yaitu menentukan solusi dominan dan solusi minimal dari $Q(X) = AX^2 + BX + C = 0$

1. Solusi Dominan dan Solusi Minimal dari *Q(X)*

Karena A adalah nonsingular, $Q(\lambda)x = (\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0$ mempunyai *2n* nilai eigen, di mana

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{2n}| \qquad \text{.....(19)}$$

Misalkan $\lambda(A)$ merupakan himpunan nilai eigen dari A.

Definisi 4.

S_1 adalah solusi dari $Q(X)$ disebut solusi dominan jika $\lambda(S_1)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ dan $|\lambda_n|>|\lambda_{n+1}|$, di mana nilai eigen λ_i dari $Q(\lambda)$ adalah terurut sesuai dengan persamaan (19). S_2 adalah solusi dari $Q(X)$ disebut solusi minimal jika $\lambda(S_2)=\{\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_{2n}\}$ dan $|\lambda_n|>|\lambda_{n+1}|$.

Jika S_1 adalah solusi dominan dan S_2 adalah solusi minimal maka berlaku

$$\min\{|\lambda|:\lambda\in\lambda(S_1)\}>maks\{|\lambda|:\lambda\in\lambda(S_2)\}$$

Teorema 5.

Misalkan bahwa nilai eigen dari $Q(\lambda)$, adalah terurut sesuai persamaan (19) yang memenuhi $|\lambda_n|>|\lambda_{n+1}|$ dan juga terdapat dua himpunan vektor eigen $\{w_1,\cdots,w_n\}$ dan $\{w_{n+1},\cdots,w_{2n}\}$ yang bebas linear yang bersesuaian dengan $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ dan $\{\lambda_i\}_{i=n+1}^{2n}$. Maka terdapat suatu solusi dominan dan suatu solusi minimal dari $Q(X)$.

Bukti

Misalkan $W_1=[w_1,\cdots,w_n]$ $W_2=[w_{n+1},\cdots,w_{2n}]$

Karena W_1 dan W_2 adalah nonsingular, maka

$S_1=W_1\,dig(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)W_1^{-1}$ $S_2=W_2\,dig(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_{2n})W_2^{-1}$

Sehingga jelas bahwa S_1 adalah solusi dominan dari $Q(X)$ dan S_2 adalah solusi minimal dari $Q(X)$.

Contoh :

$$Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda^2 - 1)\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{34} = 0$$

Nilai eigen dari $Q(\lambda)$ adalah 1,-1,0,0.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena w_1 dan w_2 adalah vektor-vektor eigen yang bebas linear, maka

$$S_1 = W \, diag[\lambda] \, W^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah solusi dominan $Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Untuk $\lambda_3 = 0$ dan $\lambda_4 = 0$, maka vektor-vektor eigennya adalah

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ dan $\lambda_4 = 0$ tidak bebas linear, maka tidak terdapat solusi minimal dari $Q(X)$.

2. Iterasi Bernoulli

Misalkan persamaan kuadrat matriks $AX^2 + BX + C = 0$ dituliskan dalam matriks rekurensi

$$AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1} = 0 \qquad Y_0, Y_1 \text{ diberikan.} \qquad \text{.....(20)}$$

Dan didefinisikan

$$V(S_1, S_2) = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.

Jika S_1 dan S_2 adalah solusi dari $Q(X)$ di mana $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular maka

$$Y_i = S_1^i\Omega_1 + S_2^i\Omega_2 \qquad \text{.....(21)}$$

adalah solusi umum dari persamaan (20), di mana Ω_1 dan Ω_2 adalah ditentukan oleh kondisi awal.

Bukti

Untuk Y_i didefinisikan oleh persamaan (21), maka persamaan (20) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1} &= A(S_1^{i+1}\Omega_1 + S_2^{i+1}\Omega_2) + B(S_1^i\Omega_1 + S_2^i\Omega_2) + C(S_1^{i-1}\Omega_1 + S_2^{i-1}\Omega_2) \\ &= (AS_1^{i+1} + BS_1^i + CS_1^{i-1})\Omega_1 + (AS_2^{i+1} + BS_2^i + CS_2^{i-1})\Omega_2 \\ &= (AS_1^2 + BS_1 + C)S_1^{i-1}\Omega_1 + (AS_2^2 + BS_2 + C)S_2^{i-1}\Omega_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi Y_i adalah solusi dari persamaan (20). Untuk $i = 0$ dan $i = 1$, maka persamaan (21) dapat dituliskan

$$Y_0 = S_1^0\Omega_1 + S_2^0\Omega_2 = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$Y_1 = S_1^1\Omega_1 + S_2^1\Omega_2$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

dan karena matriks koefisien $V(S_1, S_2)$ adalalah nonsingular, Ω_1 dan Ω_2 secara khusus ditentukan oleh Y_0 dan Y_1.

Misalkan Z_i adalah solusi dari persamaan (20) dan misalkan Y_i adalah solusi dari persamaan (21) dengan $Y_0 = Z_0$ dan $Y_1 = Z_1$, maka

$$AY_2 + BY + CY_0 = 0$$

$$\begin{aligned} AY_2 &= -BY - CY_0 \\ &= -BZ_1 - CZ_0 \\ &= AZ_2 \end{aligned}$$

Karena A nonsingular, $Z_2 = Y_2$. Dengan induksi $Z_i = Y_i$ untuk setiap i .

Secara umum S_1 dan S_2 dengan kondisi $\lambda(S_1) \cap \lambda(S_2) = \varnothing$ akan menjamin $V(S_1, S_2)$ nonsingular. Hal ini diperjelas dalam teorema berikut :

Teorema 7.

Jika S_1 dan S_2 adalah solusi dari $Q(X)$ dengan $\lambda(S_1) \cap \lambda(S_2) = \varnothing$ maka $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular.

Bukti

Andaikan $V(S_1, S_2)$ adalah singular. Dan misalkan $v \in N = null(V(S_1, S_2))$, maka $[S_1\ S_2]v = 0$ dan kesamaan

$$[A^{-1}C\ \ A^{-1}B]\begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} = -[S_1^2\ \ S_2^2]$$

Secara tidak langsung $[S_1^2\ S_2^2]v = 0$, sehingga

$$0 = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} v \qquad .....(22)$$

Jadi $diag(S_1,S_2)v \in N$ yang berarti bahwa N adalah invariant subspace untuk $diag(S_1,S_2)$. Oleh karena itu, N memuat vektor eigen w dari $diag(S_1,S_2)$. Karena nilai eigen S_1 dan S_2 berbeda, maka w mempunyai bentuk $w = [w_1^T \ 0]^T$ atau $w = [0 \ w_2^T]^T$.

Pada tiap kasus

$$0 = V(S_1,S_2)w = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} w$$

Sehingga mengakibatkan $w = 0$, yang mana kontradiksi dengan w adalah vektor eigen. Jadi $V(S_1,S_2)$ nonsingular.

Agar mendapatkan hasil yang konvergen pada metode Bernoulli, maka dibutuhkan lemma berikut

Lemma 8.

Misalkan Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat sehingga $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah nonsingular dan untuk setiap norm matriks

$$\lim_{i\to\infty} \|Z_2^i\| \|Z_1^{-i}\| = 0$$

Bukti

Karena Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat yang memenuhi kondisi $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah solusi dominan dari

Jadi $diag(S_1, S_2)v \in N$ yang berarti bahwa N adalah invariant subspace untuk $diag(S_1, S_2)$. Oleh karena itu, N memuat vektor eigen w dari $diag(S_1, S_2)$. Karena nilai eigen S_1 dan S_2 berbeda, maka w mempunyai bentuk $w = [w_1^T \ 0]^T$ atau $w = [0 \ w_2^T]^T$.

Pada tiap kasus

$$0 = V(S_1, S_2)w = \begin{bmatrix} I & I \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} w$$

Sehingga mengakibatkan $w = 0$, yang mana kontradiksi dengan w adalah vektor eigen. Jadi $V(S_1, S_2)$ nonsingular.

Agar mendapatkan hasil yang konvergen pada metode Bernoulli, maka dibutuhkan lemma berikut

Lemma 8.

Misalkan Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat sehingga $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah nonsingular dan untuk setiap norm matriks

$$\lim_{i \to \infty} \|Z_2^i\| \|Z_1^{-i}\| = 0$$

Bukti

Karena Z_1 dan Z_2 adalah matriks kuadrat yang memenuhi kondisi $\min\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_1)\} > maks\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(Z_2)\}$ maka Z_1 adalah solusi dominan dari

$Q(X)$ dan Z_2 adalah solusi minimal dari $Q(X)$. Karena Z_1 merupakan solusi dominan, maka akibatnya Z_1 nonsingular.

Sehingga jelas untuk $\lim_{i\to\infty}\|Z_2^i\|\|Z_1^{-i}\| = 0$

Teorema 9.

Misalkan $Q(X)$ mempunyai solusi dominan (S_1) dan solusi minimal (S_2) dan Y_i adalah solusi rekurensi (21) dengan $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$. Maka Y_i adalah nonsingular jika i cukup besar dan

$$\lim_{i\to\infty} Y_i Y_{i-1}^{-1} = S_1$$

Bukti

Dari teorema 7, diperoleh $V(S_1, S_2)$ adalah nonsingular dan persamaan (21) adalah solusi umum dari persamaan (20). Dengan kondisi awal $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$ maka

- Untuk $Y_0 = 0$, diperoleh

$$\Omega_1 + \Omega_2 = 0$$

- Untuk $Y_1 = I$, diperoleh

$$S_1\Omega_1 + S_2\Omega_2 = I$$

Sehingga diperoleh:

$$(S_1 - S_2)\Omega_1 = I$$

Karena Ω_1 nonsingular, maka pertama ditunjukkan bahwa Y_i adalah nonsingular untuk *i* yang cukup besar.

Karena S_1 nonsingular maka persamaan (21), dapat dituliskan menjadi

$$Y_i = S_1^i(\Omega_1 + S_1^{-i}S_2\Omega_2)$$

Dari lemma 8, diperoleh $S_1^{-i}S_2^i \to 0$ untuk *i* yang cukup besar, sehingga $Y_i = S_1^i\Omega_1$. Jadi Y_i adalah nonsingular untuk *i* yang cukup besar.

Dengan menggunakan persamaan (22)

$$Y_iY_{i-1}^{-1} = (S_1^i\Omega_1 + S_2^i\Omega_2)(S_1^{i-1}\Omega_1 + S_2^{i-1}\Omega_2)^{-1}$$

$$= (S_1 + S_2^i\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})(S_1^{i-1}\Omega_1)((I + S_2^{i-1}\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})(S_1^{i-1}\Omega_1))^{-1}$$

$$= (S_1 + S_2^i\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})\,(I + S_2^{i-1}\Omega_2\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)})^{-1}$$

Dari lemma 8 maka disimpulkan

$$\lim_{i\to\infty} S_2^i\Omega_1\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{i\to\infty} S_2^{i-1}\Omega_1\Omega_1^{-1}S_1^{-(i-1)} = 0$$

Jadi diperoleh:

$$\lim_{i\to\infty} Y_iY_{i-1}^{-1} = S_1$$

Contoh

$$Q(X) = X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan iterasi Bernoulli diperoleh :

Dengan menetapkan $Y_0 = 0$ dan $Y_1 = I$, dari persamaan (20) diperoeh

$$AY_2 + BY_1 + CY_0 = 0$$

$$AY_2 = -(BY_1 + CY_0)$$

$$AY_2 = -BI$$

$$Y_2 = -A^{-1}BI$$

$$= -A^{-1}B$$

$$Y_2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$AY_3 + BY_2 + CY_1 = 0$$

$$AY_3 = -(BY_2 + CY_1)$$

$$Y_3 = -A^{-1}(BY_2 + CY_1)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $Y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Jika iterasi ini diteruskan, maka akan diperoleh $Y_2 = Y_4 = Y_6 = \cdots$ dan $Y_3 = Y_5 = Y_7 = \cdots$, sehingga dapat ditulis untuk $Y_{2j} = Y_2$, $Y_{2j+1} = Y_3$ *untuk* $j \geq 1$. Oleh karena itu setiap Y_i adalah singular, sehingga untuk contoh di atas iterasi Bernoulli gagal.

3. Iterasi Untuk Menentukan Suatu Solusi

Agar perhitungannya lebih mudah, persamaan (20) dapat dituliskan dalam bentuk iterasi secara langsung untuk menentukan suatu solusi.

Persamaan (20) dikali dari kanan dengan Y_{i-1}^{-1}, maka diperoleh

$$AY_{i+1}Y_{i-1}^{-1} + BY_iY_{i-1}^{-1} + C = 0$$

yang dapat dituliskan

$$(AY_{i+1}Y_i^{-1} + B)Y_iY_{i-1}^{-1} + C = 0$$

Dengan mendefinisikan $X_i = Y_{i+1}Y_i^{-1}$ dan tetapkan $Y_0 = 0$, $Y_1 = I$, maka diperoleh iterasi

$$(AX_i + B)X_{i-1} + C = 0$$

$$(AX_i + B)X_{i-1} = -C$$

$$AX_i + B = -CX_{i-1}$$

Untuk $i = 1$, maka

$$X_{i-1}^{-1} = X_0^{-1} = Y_1Y_0^{-1} = 0$$

Jadi $\quad AX_1 + B = -CX_0^{-1}$

$$AX_1 = -B$$

$$X_1 = -A^{-1}B \qquad \text{......(23)}$$

Dengan cara yang sama, persamaan (21) dikali dari kanan dengan Y_{i+1}^{-1}, maka diperoleh

$$(AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1})Y_{i+1}^{-1} = 0$$

$$A + BY_iY_{i+1}^{-1} + CY_{i-1}Y_{i+1}^{-1} = 0$$

Misalkan $W_i = Y_iY_{i+1}^{-1}$

$$A + (B + CW_{i-1})W_i = 0 \qquad W_0 = 0 \qquad \text{......(24)}$$

Iterasi ini untuk memecahkan $CX^2 + BX + A = 0$, yang mana solusinya adalah nonsingular yang merupakan invers dari solusi $Q(X) = 0$.

Dari teorema 10 disimpulkan bahwa jika $Q(X)$ mempunyai solusi dominan S_1 dan solusi minimal S_2 serta barisan X_i dan W_i *didefinisikan*, maka

$$\lim_{i\to\infty} X_i = S_1 \qquad \lim_{i\to\infty} W_i = S_1^{-1}$$

Peranan Y_0 dan Y_1 pada pembuktian *teorema 9* adalah untuk menjamin bahwa Ω_1 adalah nonsingular. Pada umumnya pemilihan Y_0 dan Y_1 akan berdampak yang sama, jadi dapat dicoba mulai dengan matriks yang berbeda yaitu pada persamaan (23) dan (24), yang mungkin diperoleh jika iterasi mengalami kesulitan.

Iterasi (23) dan (24) adalah iterasi titik tertentu yang dapat diperoeh pada bentuk $AX^2 + BX + C = 0$. Iterasinya juga dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu

$$(AX_{i-1} + B)X_i + C = 0 \qquad X_0 = 0 \qquad .....(25)$$

Dan

$$A + (B + CW_i)W_{i-1} = 0 \qquad W_1 = -C^{-1}B \qquad ......(26)$$

Jika dihubungkan dengan rekurensi Bernoulli

$$AZ_{i-1} + BZ_i + CZ_{i+1} = 0 \qquad Z_0 = 0,\ Z_1 = I \qquad ......(27)$$

Jika *Q(X)* mempunyai solusi dominan S_1 dan suatu solusi minimal S_2 yang nonsingular maka solusi dari persamaan (27) adalah:

$$Z_i = S_1^i\Omega_1 + S_2^{-i}\Omega_2$$

dengan Ω_1 dan Ω_2 ditentukan oleh kondisi awal, dan

$$\lim_{i\to\infty} Z_{i+1}Z_i^{-1} = S_2^{-1}$$

Karena itu, selama barisan W_i dan X_i terdefinisi, maka

$$\lim_{i\to\infty} X_i = S_2 \qquad \lim_{i\to\infty} W_i = S_2^{-1}$$

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

1. Masalah nilai eigen kuadrat dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat matriks jika setiap nilai eigen dari $Q(X)$ berbeda, sehingga solusi $Q(X)$ dituliskan :

$$X = W\, diag(\lambda_i) W^{-1} \qquad \text{di mana} \quad W = [w_1, \ldots, w_n]$$

2. Metode Newton dalam menyelesaikan persamaan kuadrat matriks bekerja sebagai berikut: pertama persamaan kuadrat matriks dijabarkan dengan ekspansi untuk $Q(X+E)$, dari ekspansi ini akan diperoleh persamaan

$$[AEX + (AX + B)E] = -Q(X)$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk iterasi

$$[AE_k X_k + (AX_k + B)E_k] = -Q(X_k)$$

Di mana $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Selanjutnya akan dicari E_k dengan matriks awal yang diberikan yaitu X_0 dan akhirnya akan diperoleh X_{k+1} dengan rumus $X_{k+1} = X_k + E_k$.

3. Dengan generalisasi dekomposisi Schur diperoleh karakteristik dari solusi (Teorema 3).

4. Iterasi Bernoulli dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat matriks jika A adalah nonsingular. Persamaan kuadrat matriks tersebut dituliskan dalam matriks rekurensi :

$$AY_{i+1} + BY_i + CY_{i-1} = 0 \qquad Y_0, Y_1 \text{ diberikan}$$

5. $Q(X)$ mempunyai solusi dominan dan solusi minimal, jika nilai eigen dari $Q(\lambda)$ terurut yakni $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{2n}|$ dan memenuhi $|\lambda_n| > |\lambda_{n+1}|$ dan juga terdapat dua himpunan vektor eigen $\{w_1, \cdots, w_n\}$ dan $\{w_{n+1}, \cdots, w_{2n}\}$ yang bebas linear yang bersesuaian dengan $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ dan $\{\lambda_i\}_{i=n+1}^{2n}$

B. Saran

Bagi Mahasiswa Matematika Fakultas Mipa Universitas Hasanuddin yang ingin mengambil Tugas Akhir, dapat melanjutkan untuk persamaan kuadrat matriks non linear orde tiga atau orde yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, 1998, *Aljabar Linear Elementer*, Penerbit Erlangga, Edisi Ke Lima.

Stewart, G. W, 1973, *Introduction to Matrix Computations*, University of Maryland.

John, B. F, dan Raymond, A. B, 1989, *Linear Algebra*, University of Rhode Island, Second Edition.

Gene, H. G, dan Charles, F. V. L, 1996, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, Third Edition.

Benjamin, F. P, 1992, *An Introduction To Applied Numerical Analysis*, Pws-Kent Publishing Compony, Boston.

Sastry, S. S, 1997, *Introductory Methods of Numerical Analysis*, PHI.

J. Supranto, M. A, 1992, *Pengantar Matriks*, Lembaga Penerbit, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Edisi Ke Lima.

Nicholas, J. H, 1999, *Solving a Quadratic Matrix Equation by Newton's Method with Exact Line Searches*, University of Manchester, England.

LAMPIRAN

```
ENYELESAIKAN PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS(AX^2+BX+C=0) DENGAN METODE NEWTON
isp('HASIL ITERASI YANG DIPEROLEH ADALAH SEBAGAI BERIKUT :')

roses Input Matriks A,B,C
eye(2);
[0 0;1 0];
[-1 0;-1 0];
eye(2);
100;                       % iterasi yang digunakan
10^-7;                     % toleransi nilai maksimum yang mungkin

roses Perhitungan
=norm(A,'fro');                      % norm frobabinius dari A
=norm(B,'fro');                      % norm frobabinius dari B
=norm(C,'fro');                      % norm frobabinius dari B
(nB+sqrt(nB^2+4*nA*nC)/2*nA)*I       % matriks awal yang diberikan

r i=1:n
ms('e11','e12','e21','e22');         % mendefinisikan variabel simbolik e11,e12,e21,e22
[e11;e12;e21;e22];                   % E adalah matriks simbolik
(2*A(1,1)*X(1,1)+A(1,2)*X(2,1)+B(1,1) A(1,1)*X(2,1) A(1,1)*X(2,1)+A(1,2)*X(2,2)+B(1,2
A(1,2)*X(2,1);A(1,1)*X(1,2) A(1,1)*X(2,2)+A(1,1)*X(1,1)+A(1,2)*X(2,1)+B(1,1) A(1,2)*X
,2) 2*A(1,2)*X(2,2)+A(1,1)*X(1,2)+B(1,2);2*A(2,1)*X(1,1)+A(2,2)*X(2,1)+B(2,1) A(2,1)*
2,1) A(2,2)*X(1,1)+A(2,1)*X(1,2)+A(2,2)*X(2,2)+B(2,2) A(2,2)*X(2,1);A(2,1)*X(1,2) A(2
)*X(2,2)+A(2,1)*X(1,1)+A(2,2)*X(2,1)+B(2,1) A(2,2)*X(1,2) A(2,1)*X(1,2)+2*A(2,2)*X(2,
+B(2,2)];
-(A*X^2+B*X+C);
=[Q(1,1);Q(1,2);Q(2,1);Q(2,2)];
G\Qv;
(E(1,1) E(2,1);E(3,1) E(4,1)];
ext=X+E
Xnext;

rm_Xnext=norm(Xnext,'fro');       % norm frobabinius dari Xnext
next=A*Xnext^2+B*Xnext+C;         % menghitung nilai dari QXnext
rm_QXnext=norm(QXnext,'fro');     % menghitung norm frobabinius dari QXnext

Xnext=norm_QXnext/((nA*norm_Xnext^2)+(nB*norm_Xnext)+nC)

 F_Xnext <= u
  disp('sudah konvergen, dengan iterasi sebanyak = ');
  disp(i)
  disp('solusinya adalah :')
  disp(Xnext)
reak;
d;

 i==n
 disp('belum konvergen, perlu penambahan iterasi.... = ');
 disp(' ')
 end;
d;
```

HASIL ITERASI YANG DIPEROLEH ADALAH SEBAGAI BERIKUT :

```
3.1213         0
     0    3.1213


ext =

 1.7208         0
-0.1155    1.5607


Xnext =

 0.2762


ext =

 1.1517         0
-0.0937    0.7803


Xnext =

 0.1244


ext =

 1.0125         0
-0.0321    0.3902


Xnext =

 0.0379


ext =

 1.0005         0
-0.0051    0.1951


Xnext =

 0.0099


ext =

 1.0000         0
-0.0004    0.0975


Xnext =

 0.0025
```

```
xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0488


Xnext =

.2058e-004


xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0244


Xnext =

1.5528e-004


xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0122


Xnext =

3.8828e-005


xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0061


Xnext =

9.7075e-006


xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0030


Xnext =

2.4269e-006


xt =

 1.0000         0
-0.0000    0.0015
```

```
Xnext =

.0673e-007


ext =

  1.0000         0
 -0.0000    0.0008


Xnext =

.5168e-007


ext =

  1.0000         0
 -0.0000    0.0004


Xnext =

.7921e-008

dah konvergen, dengan iterasi sebanyak =
   13

lusinya adalah :
  1.0000         0
 -0.0000    0.0004
```

```
MENYELESAIKAN PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS DENGAN METODE ITERASI BERNOULLI

Proses Input Matriks A,B,C
[0 12;-2 14];
[-1 -6;2 -9];
eye(2);
[0 0;0 0];                  % matriks awal yang diberikan
[1 0;0 1];                  % matriks awal yang diberikan
100;                        % iterasi yang digunakan
10^-7;                      % toleransi kesalahan relatif yang mungkin

Proses Perhitungan
inv(A);                     % invers dari matriks A
(-x*((B*(j))+(C*(i))))
Y;
for s=2:n
   i=j;
   j=Y;
   Y=-x*((B*(j))+(C*(i)))
     W=Y-p;
        p=Y;

norm(W);            % Menghitung norm W
norm(Y);            % Menghitung norm Y
K/L

  if M <= u
    disp('sudah konvergen, dengan iterasi sebanyak : ');
    disp(s)
    disp('Y=');
    disp(Y);
  break;
 end;

 s==n
 disp('belum konvergen, perlu penambahan iterasi.... : ');
 disp(' ');
d;
d
```

```
1.5833   -1.0000
0.0833    0.5000

1.8403   -1.5833
0.0903    0.1667

0.2925

1.9416   -1.8403
0.0666    0.0347

0.1122

1.9792   -1.9416
0.0417   -0.0041

0.0404

1.9927   -1.9792
0.0240   -0.0105

0.0142

1.9975   -1.9927
0.0131   -0.0084

0.0057
```

=

```
1.9991   -1.9975
0.0070   -0.0053
```

=

```
0.0028
```

=

```
1.9997   -1.9991
0.0036   -0.0031
```

=

```
0.0015
```

=

```
1.9999   -1.9997
0.0019   -0.0017
```

=

```
.1303e-004
```

=

```
2.0000   -1.9999
0.0009   -0.0009
```

=

```
.2979e-004
```

=

```
2.0000   -2.0000
0.0005   -0.0005
```

=

```
.2372e-004
```

=

```
2.0000   -2.0000
0.0002   -0.0002
```

```
.1505e-004

 2.0000   -2.0000
 0.0001   -0.0001

.8645e-005

 2.0000   -2.0000
 0.0001   -0.0001

.9709e-005

 2.0000   -2.0000
 0.0000   -0.0000

.4987e-005

 2.0000   -2.0000
 0.0000   -0.0000

.5380e-006

 2.0000   -2.0000
 0.0000   -0.0000

.7841e-006
```

```
=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000


=

.8971e-006


=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000


=

.5025e-007


=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000


=

.7570e-007


=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000


=

2.3804e-007


=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000


=

.1908e-007


=

   2.0000   -2.0000
   0.0000   -0.0000
```

```
r

5.9562e-008

dah konvergen, dengan iterasi sebanyak :
  23


  2.0000   -2.0000
  0.0000   -0.0000
```

```
MENYELESAIKAN PERSAMAAN KUADRAT MATRIKS DENGAN METODE ITERASI BERNOULLI
sp('HASIL ITERASI YANG DIPEROLEH ADALAH SEBAGAI BERIKUT :')

Proses Input Matriks A,B,C
[1 0;0 1];
[0 0;1 0];
[-1 0;-1 0];
inv(A);                % menghitung invers dari A
[0 0;0 0];             % matriks awal yang diberikan
[1 0;0 1];             % matriks awal yang diberikan
6;                     % iterasi yang digunakan
10^-7;                 % toleransi kesalahan relatif yang mungkin

Proses Perhitungan
(-x*((B*(j))+(C*(i))))
Y;

for s=2:n
    i=j;
    j=Y;
    Y=-x*((B*(j))+(C*(i)))
      W=Y-p;
         p=Y;

=norm(W);             % Menghitung norm W
=norm(Y);             % Menghitung norm Y
=K/L;

   if M <= u
     disp('sudah konvergen, dengan nilai Y : ');
     disp(s)
     disp('Y =');
     disp(Y);
   break;
 end;

f s==n
 disp('belum konvergen, perlu penambahan iterasi.... : ');
 disp(' ');
d;
d
```

IL ITERASI YANG DIPEROLEH ADALAH SEBAGAI BERIKUT :

```
      0
      0


      0
      0


      0
      0


      0
      0


0     0
1     0


1     0
1     0
```

konvergen, perlu penambahan iterasi.... :