# APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL LAPLACE DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MENYANGKUT SATU RATA-RATA DAN DUA RATA-RATA



Oleh :

**HARDIANAH**
H 111 97 004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2002

# APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL LAPLACE DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MENYANGKUT SATU RATA-RATA DAN DUA RATA-RATA

*Tugas akhir sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi dan memperoleh gelar sarjana pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin*

Oleh :

**HARDIANAH**

**H 111 97 004**

## LEMBAR PENGESAHAN

# APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL LAPLACE DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MENYANGKUT SATU RATA-RATA DAN DUA RATA-RATA


Oleh :

**HARDIANAH**

**H 111 97 004**


Makassar, Januari 2003

**Disetujui oleh**

| | |
|---|---|
| **Pembimbing Utama** | **Pembimbing Pertama** |
| **Drs. Amir Kamal Amir. Msc** | **Drs. Loedje Talangko** |
| **NIP 131 992 471** | **NIP 131 650 920** |

# KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulisan tugas akhir ini merupakan persyaratan akademis untuk memperoleh gelar sarjana pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada ayahanda Haebar B dan ibunda Nuraminah, saudara-saudaraku serta seluruh keluarga tercinta yang telah mendoakan dan memberikan bantuan moril maupun material yang sangat berharga hingga tugas akhir ini dapat penulis rampungkan.

Demikian pula penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang tulus kepada :

1. Bapak Drs. Amir Kamal Amir, MSc selaku pembimbing utama yang telah memberikan segala motivasi, bimbingan dan kepercayaan kepada penulis sampai tugas akhir ini selesai.
2. Bapak Drs. Lapodje Talangko selaku pembimbing pertama yang juga senantiasa membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Bapak Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh Staf Universitas Hasanuddin.

4. Bapak Drs. Nirwan Ilyas, MSi selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas. Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
6. Uni, Lilis, Nana, Elvi, Hera, K' Apri, Ardi, Ayu, Erna, Umma, Sudir, dkk yang telah memberikan dorongan dan iringan doa.
7. Rekan-rekan Mahasiswa dan semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Sebagai manusia biasa, tentunya tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, karena itu kritik dan saran akan penulis terima dengan senang hati. Semoga karya ini bernilai ibadah di sisi Allah SWT dan dapat bermanfaat bagi pembaca.

Makassar, Agustus 2002

**penulis**

## ABSTRAK

Dalam tulisan ini akan dibahas peranan sistem persamaan linear untuk penyelesaian persamaan differensial Laplace dua dimensi.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Persamaan $u_{xx} + u_{yy} = 0$ didiskritisasi kemudian digunakan rumus

$$u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y) = 0$$

Untuk menaksir nilai-nilai u pada setiap titik. Pencarian nilai-nilai taksiran u ini akan membentuk masalah sistem persamaan linear $A\underline{x} = \underline{b}$

Sistem persamaan linear tersebut diselesaikan dengan program Pascal dengan menggunakan tiga metode: Eliminasi Gauss, Invers Matriks dan Faktorisasi LU.

Pengujian hipotesis menyangkut satu rata-rata dan dua rata-rata digunakan untuk menguji hipotesis apakah menolak atau menerima hipotesis. Untuk simpangan baku ($\delta$) diketahui digunakan statistik z yang berdistribusi normal baku dan untuk $\delta$ tidak diketahui digunakan statistik t yang berdistribusi Student.

# ABSTRACT

In this writing will be research about the system of linear equation for finishing Laplace differential equation two dimension.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Equation $u_{xx} + u_{yy} = 0$ discrititation and theused formula

$$u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y) = 0$$

To estimate the values at each point. The researhing of the values at will be form the system of linear equation $A\underline{x} = \underline{b}$.

The system of linear equation finished by Pascal program with use three method: Gauss Elimination, Matriks Invers and LU Faktoritation.

The hipotesis testing concern one rates and two rates is used to test hipotesis does this refuse or accept the hipotesis. To branching off standard ($\delta$) is know to be used z statistik of distribution normality of standard and to $\delta$ be known to used t statistik that distribution Student.

# DAFTAR ISI

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linear dapat muncul pada berbagai masalah baik teori maupun praktek, sehingga banyak persoalan yang mengharuskan kita menggunakan sistem persamaan linear untuk mendapatkan solusinya. Karena itu dalam makalah ini pada bagian pertama akan dibahas :

**" Aplikasi Sisten Persamaan Linear Pada Penyelesaian Persamaan Differensial Laplace ".**

Salah satu cabang ilmu pengetahuan yang juga cukup maju saat ini adalah bidang statistika yang merupakan ilmu yang banyak berhubungan dengan pengamatan dan pengolahan fakta. Oleh karena itu seorang statistikawan harus dapat mengamati suatu kejadian sebagai hasil dari suatu rencana. Untuk meningkatkan kualitas penelitian perlu adanya pembekalan bagi para peneliti dengan teori statistik termasuk materi pengujian hipotesis, karena itu dalam bagian kedua makalah ini diangkat suatu permasalahan :

**" Pengujian Hipotesis Menyangkut Satu Rata-Rata Dan Dua Rata-Rata"**

Demikianlah makalah atau tugas akhir ini dibahas sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada jurusan matematika.

### 1.2 Ruang Lingkup Pembahasan

Ruang Lingkup pembahasan meliputi dua topik utama :

1. Aplikasi sistem persamaan linear pada penyelesaian persamaan differensial Laplace.

   Pembahasn berkisar pada penyelesaian sistem persamaan Laplace 2D yang direduksi ke dalam bentuk persamaan linear dengan metode elemen hingga kemudian menyelesaikan sistem persamaan linearnya dengan beberapa metode.

2. Pengujian hipotesis menyangkut satu rata-rata dan dua rata-rata

   Pembahasan berkisar pada pengujian hipotesis menyangkut satu rata-rata dan dua rata-rata dengan melihat apakah simpangan baku diketahui atau tidak.

Masing-masing dibahas secara terpisah

# BAB II

## APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL LAPLACE

Solusi eksak suatu persamaan differensial kadang membutuhkan waktu yang cukup lama untuk pengerjaannya, untuk dapat menghindari hal ini metode numerik menjadi pilihan, salah satu metode yang bisa digunakan adalah metode elemen hingga.

Langkah – Langkah Yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan Laplace 2D dengan metode elemen hingga :

1. Menentukan syarat batas dari persamaan
2. Membagi kisi horisontal dan kisi vertikalnya
3. Mencari sistem persamaan linearnya dengan metode elemen hingga
4. Menyelesaikan sistem persamaan linearnya.

### 2.1. METODE ELEMEN HINGGA

Tinjau deret taylor dalam fungsi $f(x)$ berikut :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + ....$$

Untuk $h$ yang kecil $f'(x)$ dapat didekati oleh :

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

yang dikenal sebagai pendekatan fordward.

Adapun pendekatan backward dapat diperoleh dengan menggantikan $h$ dengan $-h$ sehingga didapat :

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

dari pendekatan fordward dan backward dapat ditulis :

$$f(x+h) \cong hf'(x) + f(x)$$

$$f(x-h) \cong -hf'(x) + f(x)$$

bila kedua persamaan diatas diperkurangkan maka diperoleh :

$$f(x+h) - f(x-h) \cong 2hf'(x)$$

atau

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Turunan kedua dapat pula diperoleh dengan memasukkan suku lain dari deret taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!}$$

kedua persamaan tersebut kemudian dijumlahkan dan didapatkan :

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

atau

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Turunan parsial $u_{xx}(x, y)$ dapat diperoleh dengan cara yang sama pada turunan fungsi satu peubah

$$u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + h^2 \frac{u_{xx}(x, y)}{2!}$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + h^2 \frac{u_{xx}(x, y)}{2!}$$

Kedua persamaan diatas kemudian dijumlahkan dan diperoleh

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) = 2u(x, y) + h^2 u_{xx}(x, y)$$

atau

$$u_{xx} = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \tag{2.1.1}$$

Dengan cara yang sama turunan parsial $u_{yy}(x, y)$ juga bisa didapat dalam bentuk :

$$u_{yy} = \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{k^2} \tag{2.1.2}$$

## 2.2.PERSAMAAN LAPLACE YANG DIREDUKSI KEPERSAMAAN LINEAR A$\underline{x}$=$\underline{b}$ DENGAN METODE LEMEN HINGGA

Akan ditinjau persamaan laplace yang berbentuk :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.2.1}$$

dengan syarat batas : $0 < x < 1$ $\quad 0 < y < 1$

$$u(x,0) = 0 \quad u(0, y) = 0$$
$$u(x,1) = 1 \quad u(1, y) = 0$$

dengan mensubtitusi persamaan (2.1.1) dan (2.1.2) ke (2.2.1) maka persamaan (2.2.1) akan menjadi :

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}+\frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2}=0$$

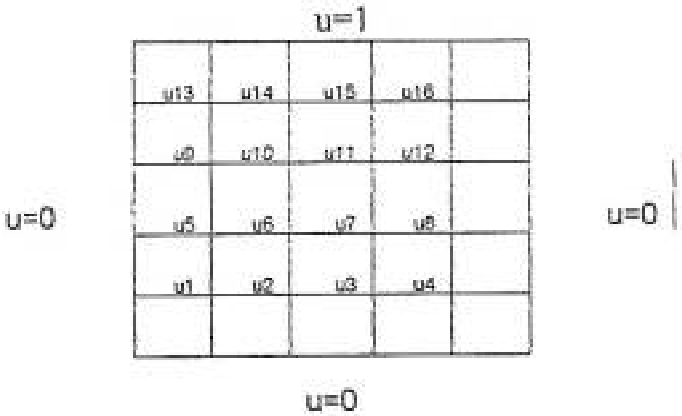
$$u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)+u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)=0$$

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-4u(x,y)=0$$

Contoh

Dengan mengambil nh = 5 dan nv = 5 (nh jumlah kisi horisontal, nv jumlah kisi vertikal),

Atau digambarkan dalam sistem grid pada bidang xy seperti berikut



$$
\begin{aligned}
u_2 + 0 + u_5 + 0 - 4u_1 &= 0\\
u_3 + u_1 + u_6 + 0 - 4u_2 &= 0\\
u_4 + u_2 + u_7 + 0 - 4u_3 &= 0\\
0 + u_3 + u_8 + 0 - 4u_4 &= 0\\
u_6 + 0 + u_9 + u_1 - 4u_5 &= 0\\
u_7 + u_5 + u_{10} + u_2 - 4u_6 &= 0\\
u_8 + u_6 + u_{11} + u_3 - 4u_7 &= 0\\
0 + u_7 + u_{12} + u_4 - 4u_8 &= 0\\
u_{10} + 0 + u_{13} + u_5 - 4u_9 &= 0\\
u_{11} + u_9 + u_{14} + u_6 - 4u_{10} &= 0\\
u_{12} + u_{10} + u_{15} + u_7 - 4u_{11} &= 0\\
0 + u_{11} + u_{16} + u_8 - 4u_{12} &= 0\\
u_{14} + 0 + u_9 - 4u_{13} &= -1\\
u_{15} + u_{13} + u_{10} + 0 - 4u_{14} &= -1\\
u_{16} + u_{14} + u_{11} - 4u_{15} &= -1\\
0 + u_{15} + u_{12} - 4u_{16} &= -1
\end{aligned}
$$

atau ditulis dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\\ u_8\\ u_9\\ u_{10}\\ u_{11}\\ u_{12}\\ u_{13}\\ u_{14}\\ u_{15}\\ u_{16} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1 \end{bmatrix}
\qquad (2.2.2)
$$

yang merupakan suatu persamaan linear A $\underline{x} = \underline{b}$.

## 2.3 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR YANG DIREDUKSI DARI PERSAMAAN LAPLACE

Untuk menyelesaikan persamaan matriks pada persamaan (2.2.2) akan digunakan tiga metode yaitu :

### 2.3.1 Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss merupakan suatu prosedur yang sistematik untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linear, prosedur tersebut didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang sederhana sehingga sistem persamaan tersebut dapat di pecahkan dengan memeriksa sistem tersebut.

Untuk mencari penyelesaian dengan menggunakan prosedur diatas maka matriks tersebut harus mempunyai sifat-sifat seperti berikut :

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah satu. (dinamakan 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdirir dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama dibawah matriks.
3. Dalam sebarang dua matriks yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh kekanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung satu utama mempunyai nol ditempat lain.

Persamaan (2.2.2) akan diselesaikan dengan eliminasi Gauss dengan menggunakan Program pascal dan diperoleh hasil berikut:

SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH:

$u_1$ = 0,04545455
$u_2$ = 0,07196970
$u_3$ = 0,07196970
$u_4$ = 0,04545455
$u_5$ = 0,10984848
$u_6$ = 0,17045455
$u_7$ = 0,17045455
$u_8$ = 0,10984848
$u_9$ = 0,22348485
$u_{10}$ = 0,32954545
$u_{11}$ = 0,32954545
$u_{12}$ = 0,22348485
$u_{13}$ = 0,45454545
$u_{14}$ = 0,59469697
$u_{15}$ = 0,59469697
$u_{16}$ = 0,45454545

### 2.3.2 Invers matriks

**Definisi.** Jika $A$ adalah matriks kuadrat, dan jika kita dapat mencari matriks $B$ sehingga $AB = BA = I$, maka $A$ dikatakan ***dapat dibalik (invertible)*** dan $B$ dinamakan ***invers (inverse)*** dari $A$.

**Teorema.** *Jika $A$ adalah matriks $n$ x $n$ yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks $B$ yang berukuran $n$ x $1$, sistem persamaan $AX = B$ mempunyai persis satu pemecahan yakni $X = A^{-1}B$.*

Untuk matiks invers yang berukuran n x n maka matriks invers akan dicari dengan metode elemen pivot dengan algoritma sebagai berikut:

1. Mencari elemen pivot/diagonal pada baris ke-i, dimana i berjalan dari 1 sampai n. Elemen pivot ke-i disimpan dengan nama p(i) dan lemen diagonal baris ke-i disamakan dengan satu
2. Elemen baris ke-i dibagi dengan elemen pivot atau p(i)
3. Selanjutnya entri-entri dari matriks tersebut dicari dengan rumus:

   $A(k,l) = A(k,l) - T \times A(k,l)$

   Dimana

   $T = A(k,i)$ dan elemen ke $A(k,l)$ disamakan dengan 0

   $k \neq 1,\qquad k = 1,2,3,\ldots n$

   $\qquad\qquad l = 1,2,3,\ldots,n$

Persamaan (2.2.2) akan diselesaikan dengan program pascal dengan metode diatas sehingga didapat hasil berikut:

MATRIKS INVERS ADALAH;

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.1 | -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.4 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.4 | -0.1 | -0.0 | -0.1 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.1 | -0.0 | -0.1 | -0.4 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.4 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.3 | -0.1 | -0.0 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.1 | -0.0 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 | -0.1 |
| -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.0 | -0.0 | -0.1 | -0.3 |

SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH:

$u_1 = 0{,}04545455$
$u_2 = 0{,}07196970$
$u_3 = 0{,}07196970$
$u_4 = 0{,}04545455$
$u_5 = 0{,}10984848$
$u_6 = 0{,}17045455$
$u_7 = 0{,}17045455$
$u_8 = 0{,}10984848$
$u_9 = 0{,}22348485$
$u_{10} = 0{,}32954545$
$u_{11} = 0{,}32954545$
$u_{12} = 0{,}22348485$
$u_{13} = 0{,}45454545$
$u_{14} = 0{,}59469697$
$u_{15} = 0{,}59469697$
$u_{16} = 0{,}45454545$

### 2.3.3 FAKTORISASI LU

**Teorema** . *Jika A adalah matriks kuadrat yang dapat direduksi terhadap bentuk eselon baris U tanpa menggunakan pertukaran baris, maka A dapat difaktorisasi sebagai A = LU dimana L adalah matriks segitiga bawah.*

**Defenisi.** Sebuah faktorisasi matriks A kuadrat seperti A = LU, dimana L adalah segitiga bawah dan U adalah segitiga atas dikatakan sebuah ***dekomposisi LU*** atau ***dekomposisi segitiga A.***

Untuk matriks nxn yang berbentuk :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat difaktorisasi sehingga diperoleh bentuk :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

atau

LU

Dimana L adalah matriks segitiga bawah dan U adalah matriks segitiga atas dengan elemen-elemen diagonalnya 1. Maka

$$LU = A \tag{2.3.1}$$

Tinjau persamaan matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{2..3.2}$$

Dari (2.3.1) dan (2.3.2) dapat ditulis

$$LU\underline{x} = \underline{b}$$

Kemudian dimisalkan

$$\underline{d} = U\underline{x} \tag{2.3.3}$$

maka diperoleh

$$L\underline{d} = \underline{b} \tag{2..3.4}$$

Untuk mendapatkan L dan U maka persamaan (2.3.1) ditulis dalam bentuk:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pertama, akan ditentukan kolom 1 dari L dengan mengalikan setiap baris dari L ke kolom 1 dari U sehingga

$l_{i1} = a_{i1}$ untuk i = 1,…,n

Kedua, akan ditentukan baris 1 dari U dengan mengalikan baris 1 dari L ke setiap kolom dari U sehingga

$$l_{11}u_{12} = a_{12}$$

$$l_{11}u_{13} = a_{13}$$

$$\vdots$$

$$l_{11}u_{1n} = a_{1n}$$

atau $u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}}$ untuk j = 2,3,...,n

ketiga, akan ditentukan kolom 2 dari L dengan mengalikan baris dari L ke kolom 2 dari U, sehingga

$$l_{21}u_{12} + l_{22} \text{ x } 1 = a_{22}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32} \text{ x } 1 = a_{32}$$

$$\vdots$$

$$l_{n1}u_{12} + l_{n2} \text{ x } 1 = a_{n2}$$

atau $l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}$ untuk i = 2,3,...,n

ke empat, akan ditentukan baris 2 dari U dengan mengalikan baris 2 dari L ke kolom dari U, sehingga

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24}$$

$$\vdots$$

$$l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} = a_{2n}$$

atau $u_{2j} = \dfrac{a_{2j} - l_{21}u_{1j}}{l_{22}}$ untuk j = 3,4,…,n

Selanjutnya ditentukan kolom 3 dari L, baris 3 dari U, dengan operasi yang sama, demikian seterusnya sampai semua elemen-elemen dari L dan U diketahui.

Sekali L dan U diketahui, d dapat diketahui dengan menggunakan subtitusi fordward pada (2.3.4) dan solusi x dapat diketahui dengan menggunakan subtitusi backward pada (2.3.3). sehingga

$$d = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$d_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j}{l_{ii}} \qquad \text{untuk } i = 2,3,\dots,n$$

dan $x_n = d_n$

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_i \qquad \text{untuk } i = n\text{-}1, n\text{-}2, \dots, 1$$

Persamaan (2.2.2) akan dicari dengan metode faktorisasi LU dengan program pascal dan diperoleh hasil berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

MATRIKS L

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -4,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 1,0 | -3,8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 1,0 | -3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 1,0 | -3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 1,0 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | -3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,1 | 1,1 | -3,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,0 | 1,1 | -3,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | 1,1 | -3,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | -3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,1 | 1,1 | -3,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,0 | 1,1 | -3,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | 1,1 | -3,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | -3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,1 | 1,1 | -3,3 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,3 | 0,0 | 1,1 | -3,3 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | 1,1 | -3,3 |

MATRIKS U

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1.0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | -0,1 | -0,3 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | -0,1 | -0,3 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 | 0,0 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | -0,3 |
| 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 |

Atau dapat ditulis dalam bentuk :

$$A = LU$$

SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH:

$u_1 = 0.04545455$
$u_2 = 0.07196970$
$u_3 = 0.07196970$
$u_4 = 0.04545455$
$u_5 = 0.10984848$
$u_6 = 0.17045455$
$u_7 = 0.17045455$
$u_8 = 0.10984848$
$u_9 = 0.22348485$
$u_{10} = 0.32954545$
$u_{11} = 0.32954545$
$u_{12} = 0.22348485$
$u_{13} = 0.45454545$
$u_{14} = 0.59469697$
$u_{15} = 0.59469697$
$u_{16} = 0.45454545$

## 2.4 SOLUSI ANALITIK UNTUK PERSAMAAN DIFFERENSIAL LAPLACE

Solusi persamaan (2.2.1) akan dicari dengan metode pemisahan variabel

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.4.1}$$

syarat batas :

$$u(0,y) = 0 \tag{2.4.2a}$$
$$u(1,y) = 0 \tag{2.4.2b}$$
$$u(x,0) = 0 \tag{2.4.2c}$$
$$u(x,1) = 1 \tag{2.4.2d}$$

Akan diselesaikan dengan metode pemisahan variabel (mpv)

Dengan mpv diperoleh

$$u(x,y) = x(x)\, y(y) \tag{2.4.3}$$

Subtitusi (2.4.3) ke (2.4.1) akan jadi $x''y + xy'' = 0$ atau $\dfrac{x''}{x} = -\dfrac{y''}{y} = k$ (2.4.4)

$$x'' - kx = 0 \tag{2.4.5a}$$

$$y'' + ky = 0 \tag{2.4.5b}$$

Solusi (2.4.5a) ada tiga macam tergantung dari nilai k

- Kasus I $k = 0$, $x'' = 0$

  $$x(x) = A_1 x + B_1 \tag{2.4.6}$$

  Gunakan (2.4.2a) di (2.4.6) maka diperoleh $B_1 = 0$ dan $A_1 = 0$ yang merupakan solusi trivial

- Kasus II $k > 0$, misalkan $k = \alpha^2$

  $x'' - \alpha^2 x = 0$ dengan solusi : $x(x) = A_2\, e^{\alpha x} + B_2\, e^{-\alpha x}$ (2.4.7)

  Gunakan (2.4.2a) di (2.4.7) maka

  $0 = A_2 + B_2$, $A_2 = -B_2$

$0 = A_2 e^{\alpha} + B_2 e^{-\alpha} = B_2 (e^{-\alpha} - e^{\alpha}), B_2 = 0$

$A_1 = B_2 = 0$, solusi trivial.

- Kasus III $k < 0$, $k = -\alpha^2$

  $x'' + \alpha^2 x = 0$, dengan solusi

  $x(x) = A_3 \cos \alpha x + B_3 \sin \alpha x$

Gunakan (2.4.2a) diperoleh :

$A_3 = 0$, $0 = B_3 \sin \alpha$ dengan $\alpha = n\pi$, $n = 1,2,3,...$

$x(x) = B_3 \sin (n\pi x)$, subtitusi ke (2.4.5b)

$$y'' - (n\pi)^2 y = 0$$ dengan solusi :

$$y(y) = A_4 e^{n\pi y} - B_4 e^{-n\pi y}$$

Gunakan (2.4.2c):

$x(x)y(0) = 0$ maka $y(0) = 0$

$$0 = B_4 ( e^{-n\pi y} - e^{n\pi y}) \qquad (2.4.8)$$

Subtitusi balik (2.4.7),(2.4.8) di (2.4.3)

$$u(x,y) = B_3 B_4 ( e^{-n\pi y} - e^{n\pi y}) \sin n\pi x \qquad (2.4.9)$$

Gunakan prinsip superposisi:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{n} A_n ( e^{-n\pi y} - e^{n\pi y}) \sin n\pi x \qquad (2.4.10)$$

Syarat batas (2.4.2d) memberikan hubungan :

$$1 = \sum_{n=1}^{n} A_n \,( e^{-n\pi} - e^{n\pi}) \sin n\pi x \qquad (2.4.11)$$

Kalikan kedua ruas (2.4.11) dengan $\sin m\pi x$ diperoleh

$$\sin m\pi x = \sum_{n=1}^{n} B_n \sin n\pi x \sin m\pi x \qquad (2.4.12)$$

Dimana $B_n = A_n \,( e^{-n\pi} - e^{n\pi})$ (2.4.13)

Atau $\sin m\pi x = \sum_{n=1}^{n} -\frac{B_n}{2} (\cos (n-m)\pi x \ - \cos (n-m)\pi x)$

Jika kedua ruas diintegralkan terhadap x=0 sampai x=1 didapat

$$\int_0^1 \sin m\pi x \, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{n} -\frac{B_n}{2} \{\cos(n-m)\, \pi x - \cos(n-m)\, \pi x\} dx$$

atau

$$\int_0^1 \sin m\pi x \, dx = \sum_{n=1}^{n} -\frac{B_n}{2} \{ \tfrac{1}{n+m} \sin (n+m)\, \pi x - \tfrac{1}{n-m} \sin(n-m)\, \pi x\} \Big|_0^1 , \quad \text{untuk} \quad m \neq n$$

$$\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \sum_{n=1}^{n} -\frac{B_n}{2} \{ \tfrac{1}{2n} \sin 2n\pi x - x\} \Big|_0^1 , \quad \text{untuk} \quad m = n$$

Jadi integral yang tidak nol hanyalah untuk $m = n$

$$\int_0^1 \sin n\pi x \, dx = -\frac{B_n}{2} (-1) = \frac{B_n}{2}$$

$$B_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x\, dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) - 1$$

Atau $$A_n = \frac{B_n}{e^{-n\pi} - e^{n\pi}} = \frac{2}{n\pi(e^{n\pi} - e^{-n\pi})}\cos(n\pi) - 1$$

Jadi $A_n = 0$ untuk n genap dan

$A_n = -\dfrac{4}{n\pi(e^{n\pi} - e^{-n\pi})}$ untuk n ganjil

Dari persamaan (2.4.10) didapat :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{n} \frac{4(e^{n\pi y} - e^{-n\pi y})}{n\pi(e^{n\pi} - e^{-n\pi})}\sin n\pi x$$

Untuk mecari nilai – nilai u akan dicari dengan persamaan berikut:

$$u(x,y) = \frac{4(e^{\pi y} - e^{-\pi y})}{\pi(e^{\pi} - e^{-\pi})}\sin \pi x \qquad (2.4.14)$$

Dari soal persamaan differensial Laplace sebelumnya diketahui:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_1 = u(1/5,1/5)$ | $u_5 = u(1/5,2/5)$ | $u_9 = u(1/5,3/5)$ | $u_{13} = u(1/5,4/5)$ |
| $u_2 = u(2/5,1/5)$ | $u_6 = u(2/5,2/5)$ | $u_{10} = u(2/5,3/5)$ | $u_{14} = u(2/5,4/5)$ |
| $u_3 = u(3/5,1/5)$ | $u_7 = u(3/5,2/5)$ | $u_{11} = u(3/5,3/5)$ | $u_{15} = u(3/5,4/5)$ |
| $u_4 = u(4/5,1/5)$ | $u_8 = u(4/5,2/5)$ | $u_{12} = u(4/5,3/5)$ | $u_{16} = u(4/5,4/5)$ |

Dengan menggunakan persamaan (2.4.14) nilai-nilai u dapat dicari sehingga didapat:

| | |
|---|---|
| $u_1 = 0{,}04349689$ | $u_9 = 0{,}20861713$ |
| $u_2 = 0{,}07039573$ | $u_{10} = 0{,}33762771$ |
| $u_3 = 0{,}07043215$ | $u_{11} = 0{,}33780238$ |
| $u_4 = 0{,}04359225$ | $u_{12} = 0{,}20907448$ |
| $u_5 = 0{,}10471951$ | $u_{13} = 0{,}39752981$ |
| $u_6 = 0{,}16947893$ | $u_{14} = 0{,}64336557$ |
| $u_7 = 0{,}16956661$ | $u_{15} = 0{,}64369840$ |
| $u_8 = 0{,}10494909$ | $u_{16} = 0{,}39840131$ |

Error untuk solusi numerik diperoleh dengan mencari selisih antara solusi analitik dengan solusi numerik yaitu :

| (x,y) | Solusi Analitik | Solusi Numerik | Error |
|---|---|---|---|
| (1/5,1/5) | 0,04349689 | 0.04545455 | 0,00195766 |
| (2/5,1/5) | 0,07039573 | 0.07196970 | 0,00157397 |
| (3/5,1/5) | 0,07043215 | 0.07196970 | 0,00153755 |
| (4/5,1/5) | 0,04359225 | 0.04545455 | 0,00186230 |
| (1/5,2/5) | 0,10471951 | 0.10984848 | 0,00512897 |
| (2/5,2/5) | 0,16947893 | 0.17045455 | 0,00097562 |
| (3/5,2/5) | 0,16956661 | 0.17045455 | 0,00088794 |
| (4/5,2/5) | 0,10494909 | 0.10984848 | 0,00489939 |
| (1/5,3/5) | 0,20861713 | 0.22348485 | 0,01486772 |
| (2/5,3/5) | 0,33762771 | 0.32954545 | 0,00808226 |
| (3/5,3/5) | 0,33780238 | 0.32954545 | 0,00825693 |
| (4/5,3/5) | 0,20907448 | 0.22348485 | 0,01441037 |
| (1/5,4/5) | 0,39752981 | 0.45454545 | 0,05701564 |
| (2/5,4/5) | 0,64336557 | 0.59469697 | 0,04866860 |
| (3/5,4/5) | 0,64369840 | 0.59469697 | 0,04900143 |
| (4/5,4/5) | 0,39840131 | 0.45454545 | 0,05614414 |

# BAB III

# PENGUJIAN HIPOTESIS MENYANGKUT SATU RATA-RATA DAN DUA RATA-RATA

Salah satu cara dari pengambilan kesimpulan adalah *pengujian hipotesis*. *Hipotesis* adalah asumsi atau dugaan mengenai sesuatu hal yang dibuat untuk menjelaskan hal yang sering dituntut untuk melakukan pengecekannya. *Hipotesis statistik* adalah suatu anggapan atau pernyataan yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih. Karenanya perlu diadakan penelitian sebelum hipotesis itu diterima atau ditolak. Cara untuk menentukan apakah menerima atau menolak hipotesis dinamakan *pengujian hipotesis*

Dalam melakukan pengujian hipoteis, ada dua macam kekeliruan (galat) yang dapat terjadi, yaitu :

1. Galat jenis I : menolak hipotesis nol yang seharusnya diterima.
2. Galat jenis II : menerima hipotesis nol yang seharusnya ditolak.

Peluang melakukan galat jenis I disebut *taraf keberartian* (ukuran daerah kritis) uji tersebut dan dinyatakan dengan $\alpha$, ditulis dalam perumusan berikut

$$\alpha = P(\text{galat jenis I})$$

Peluang melakukan galat jenis II, dinyatakan dengan $\beta$, yang tidak mungkin dihitung kecuali bila hipotesis tandingannya ditentukan secara khusus. $\beta$ dapat ditulis dalam persamaan berikut:

$$\beta = P(\text{galat jenis II})$$

Untuk ukuran sampel yang tetap, memperkecil peluang suatu galat biasanya akan menaikkan peluang melakukan galat jenis I. Untuk ukuran sampel yang tetap, memperkecil peluang suatu galat biasanya akan menaikkan peluang galat lainnya. Untungnya, peluang melakukan kedua jenis galat dapat diperkecil dengan memperbesar ukuran sampel.

Atau digambarkan dalam beberapa sifat penting berikut:

1. Galat jenis I dan II berkaitan. Memperkecil peluang yang satu biasanya memperbesar peluang yang lainnya
2. Ukuran daerah kritis, jadi juga peluang melakukan galat jenis I, selalu dapat diperkecil dengan menyesuaikan nilai kritis.
3. Menaikkar ukuran sampel n akan memperkecil $\alpha$ dan $\beta$ secara serentak.
4. Bila hipotesis nol salah, $\beta$ akan mencapai maksimum bila nilai parameter sesungguhnya dekat dengan nilai yang dihipotesiskan. Makin besar jarak antara nilai sesungguhnya dengan nilai yang dihipotesiskan, makin kecil pula $\beta$

## 3.1 LANGKAH-LANGKAH DALAM PENGUJIAN HIPOTESIS

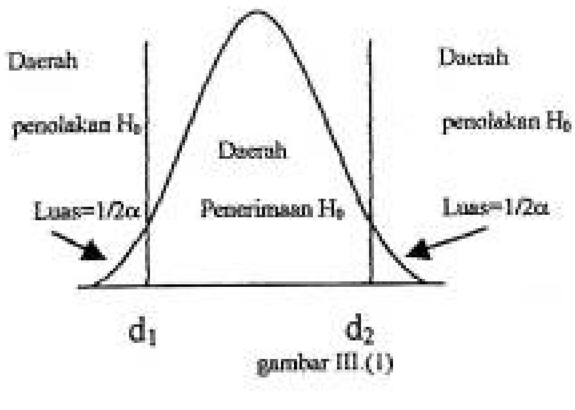
Langkah-langkah pengujian hipotesis mengenai parameter $\mu$ lawan suatu hipotesis tandingannya dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$
2. $H_1$ : hipotesis tandingan $H_0$ dengan lambang $H_1$ yang mengandung pengertian:

   $\mu \neq \mu_0$ , $\mu > \mu_0$ dan $\mu < \mu_0$
3. Memilih taraf keberartian $\alpha$
4. Memilih uji statistik yang sesuai kemudian mencari daerah kritis
5. Menghitung nilai statistik dari sampel acak ukuran n
6. Menarik kesimpulan: tolak $H_0$ bila statistik tersebut mempunyai nilai dalam daerah kritis dan jika tidak, terima $H_0$

Peran hipotesis tandingan $H_1$ dalam penetuan daerah kritis adalah

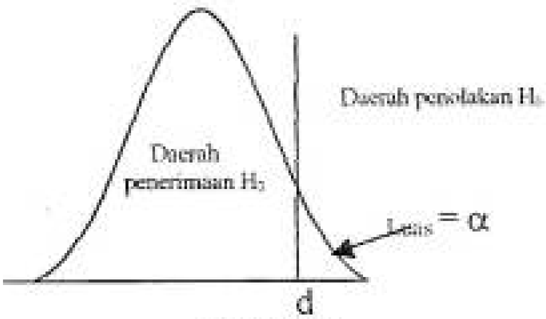
1) Jika tandingan $H_1$ mempunyai perumusan *tidak sama*, maka dalam distribusi statistik yang digunakan, normal untuk angka z, Student untuk angka t, dan seterusnya, didapat dua daerah kritis masing-masing pada ujung-ujung distribusi. Luas daerah kritis pada tiap ujung adalah ½ $\alpha$. Karena adanya dua daerah penolakan maka pengujian ini dinamakan *uji dua pihak* (uji dwiarah).



gambar III.(1)

Gambar diatas memperlihatkan sketsa distribusi yang digunakan disertai daerah-daerah penerimaan dan penolakan hipotesis. Kedua daerah ini dibatasi oleh $d_1$ dan $d_2$ yang harganya didapat dari daftar distribusi yang bersangkutan dengan menentukan peluang yang ditentukan oleh $\alpha$. Kriteria yang digunakan adalah : terima hipotesis $H_0$ jika harga statistik yang dihitung berdasarkan data penelitian jatuh antara $d_1$ dan $d_2$ , dalam hal lainnya $H_0$ ditolak.

2) Untuk tandingan $H_1$ yang mempunyai perumusan *lebih besar*, maka dalam distribusi yang digunakan didapat sebuah daerah kritis yang letaknya di ujung sebelah kanan. Luas daerah kritis atau daerah penolakan ini sama dengan $\alpha$.

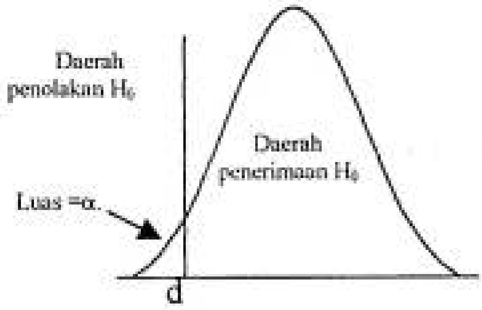



Gambar III(2)

Harga d, didapat dari daftar distribusi yang bersangkutan dengan peluang yang ditentukan oleh $\alpha$, menjadi batas antara daerah kritis dan daerah penolakan $H_0$. Kriteria yang dipakai adalah : Tolak $H_0$ jika statistik yang dihitung berdasarkan sampel tidak kurang dari d. Dalam hal lainnya $H_0$ diterima. Pengujian ini dinamakan uji satu pihak (uji ekaarah), tepatnya pihak kanan.

3) Jika tandingan $H_1$ mengandung pernyataan *lebih kecil*, maka daerah kritis ada di ujung kiri dari distribusi yang digunakan. Luas daerah ini sama dengan $\alpha$ yang

menjadi batas daerah penerimaan $H_0$ oleh bilangan d yang didapat dari daftar distribusi yang bersangkutan. Peluang untuk mendapatkan d ditentukan oleh taraf nyata $\alpha$.



Gambar III(3)

Kriteria yang digunakan adalah: terima $H_0$ jika statistik yang dihitung berdasarkan penelitian lebih besar dari d, dalam hal lainnya $H_0$ ditolak. Pengujian ini dinamakan uji satu pihak untuk pihak kiri.

Atas dasar hasil pengujian yang dilakukan, akhirnya kesimpulan dapat dirumuskan.

## 3.2 MENGUJI RATA-RATA

### 3.2.1 Menguji Rata-Rata $\mu$ : Uji Dua Pihak

Diumpamakan sebuah populasi berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu$ dan simpangan baku $\sigma$. Akan diuji mengenai parameter rata-rata $\mu$ dan diambil sebuah sampel acak berukuran n, lalu hitung statistik $\bar{x}$ dan s Kemudian dibedakan hal-hal berikut:

*a. $\sigma$ diketahui*

Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

Dengan $\mu_0$ sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{3.1}$$

dimana statistik z berdistribusi normal baku, sehingga untuk menentukan kriteria pengujian, seperti tertera dalam gambar III.(1), digunakan daftar distribusi normal baku. $H_0$ diterima jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dengan $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang ½(1- α). Dalam hal lainnya $H_0$ ditolak.

Contoh 1

Pengusaha lampu pijar A mengatakan bahwa lampunya bisa tahan pakai sekitar 800 jam. Namun diduga bahwa masa pakai lampu itu telah berubah. Untuk menentukan hal ini, dilakukan penelitian dengan jalan menguji 50 lampu. Ternyata rata-ratanya 792 jam. Dari pengalaman, diketahui bahwa simpangan baku masa hidup lampu 60 jam. Selidikilah dengan taraf nyata 0,05 apakah kualitas lampu itu sudah berubah atau belum.

Penyelesaian

Dengan memisalkan masa hidup lampu berdistribusi normal, maka akan

$$\text{diuji} \begin{cases} H_0 : \mu = 800 \\ H_1 : \mu \neq 800 \end{cases}$$

$H_0 : \mu = 800$ jam, berarti lampu itu masa pakainya sekitar 800 jam

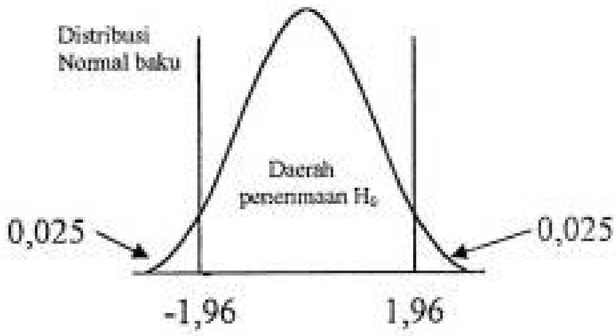
$H_1 : \mu \neq 800$ jam, berarti kualitas lampu telah berubah dan bukan 800 jam lagi.

Simpangan baku ( $\sigma$ ) = 60 jam.

Dari penelitian didapat $x = 792$ jam dengan $n = 50$. Statistik yang digunakan adalah seperti dalam persamaan (3.1) dengan mensubstitusikan $\mu_0 = 800$. Didapat :

$$z = \frac{792 - 800}{60/\sqrt{50}} = -0{,}94$$

Kriteria yang dipakai, dari daftar normal baku untuk uji dua pihak dengan $\alpha$ = 0,05 yang memberikan $z_{0,475} = 1{,}96$ adalah




Terima $H_0$ jika z hitung terletak antara –1,96 dan 1,96. Dalam hal lainnya $H_0$ ditolak. Dari penelitian sudah didapat $z = -0{,}94$ dan ini jelas terletak dalam daerah penerimaan $H_0$. Jadi $H_0$ diterima. Ini berarti dalam taraf nyata 0,05, penelitian memperlihatkan bahwa memang masa pakai lampu masih sekitar 800 jam.

b) $\sigma$ *tidak diketahui*

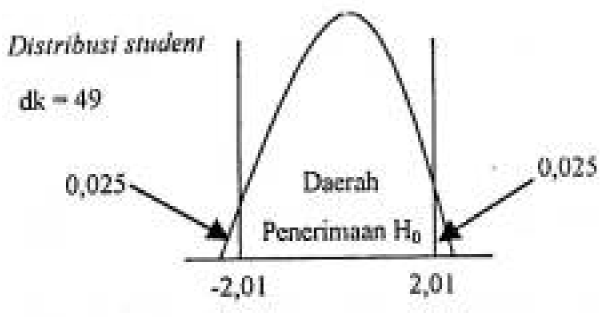
Dalam kenyataannya, simpangan baku $\sigma$ sering tidak diketahui, dalam hal ini, maka diambil taksirannya yaitu simpangan baku $s$ yang dihitung dari sampel dengan menggunakan rumus $s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ .Statistik yang digunakan untuk menguji persamaan hipotesis : $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$, adalah $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ (3.2).

untuk populasi normal diketahui bahwa t berdistribusi Student dengan dk = (n-1). Karena itu untuk menentukan kriteria pengujian digunakan distribusi Student dan batas-batas kriteria untuk uji dua pihak ini didapat dari daftar distribusi Student pula. $H_0$ diterima jika $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha}$ dengan $t_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan peluang (1-1/2α) dan dk = (n-1). Dalam hal lainnya, $H_0$ ditolak.

Contoh 2

Untuk contoh 1 di muka tentang masa pakai lampu, misalkan simpangan baku populasi tak diketahui, dan dari sampel didapat s = 55 jam. Maka dari rumus (3.2) dengan $\bar{x} = 792$, $\mu = 800$, s = 55 dan n = 50, didapat :

$$t = \frac{792 - 800}{55/\sqrt{50}} = -1{,}029$$



Dari daftar distribusi Student dengan $\alpha = 0{,}05$ dan dk = 49 untuk uji dua pihak, didapat t = 2,01. Kriteria pengujian: terima $H_0$ jika t hitung terletak antara – 2,01 dan 2,01 sedangkan dalam hal lainnya $H_0$ ditolak.

Penelitian menghasilkan t = -1,029 yang terletak dalam daerah penerimaan. Jadi $H_0$ diterima

3.2.2 Menguji Rata-Rata $\mu$ : Uji Satu Pihak

Perumusan yang umum untuk uji pihak kanan mengenai rata-rata $\mu$ berdasarkan $H_0$ dan $H_1$ adalah: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Dimisalkan populasi berdistribusi normal dan diambil sampel acak berukuran n dan dari sampel tersebut kemudian dihitung $\bar{x}$ dan s .Didapat hal-hal berikut:

a) $\sigma$ *diketahui*

Jika simpangan baku ($\sigma$) untuk populasi diketahui maka digunakan statistik z seperti dalam rumus (3.1). Sketsa untuk pengujian seperti nampak dalam gambar III(2), menggunakan distribusi normal baku. Batas kriteria didapat dari daftar normal baku. $H_0$ dtolak jika $z \geq z_{0.5-\alpha}$ didapat dari daftar normal baku menggunakan peluang (0,5 - $\alpha$). Dalam hal lainnya $H_0$ diterima.

Contoh 3

Proses pembuatan barang rata-rata menghasilkan 15,7 unit per jam. Hasil produksi mempunyai varians = 2,3. Metode baru diusulkan untuk mengganti yang lama jika rata-rata per jam menghasilkan paling sedikit 16 buah. Untuk menentukan apakah metode diganti atau tidak, metode baru dicoba 20 kali dan ternyata rata-rata per jam menghasilkan 16,9 buah. Pengusaha bermaksud mengambil resiko 5% untuk menggunakan metode baru apabila metode ini rata-rata menghasilkan lebih dari 16 buah. Bagaimanakah keputusan si pengusaha?

Penyelesaian

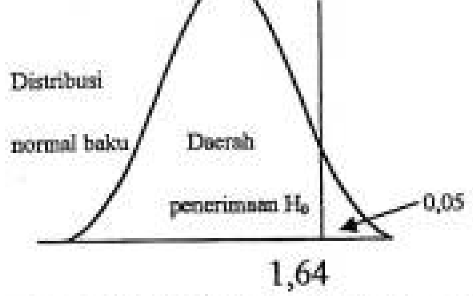
Dengan memisalkan hasil produksi berdistribusi normal, maka akan diuji pasangan hipotesis: $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

$H_0 : \mu = 16$, berarti rata-rata hasil metode baru paling tinggi 16, jika ini terjadi metode lama masih dipertahankan.

$H_1 : \mu > 16$, berarti rata-rata hasil metode baru lebih dari 16, dan karenanya metode lama masih dapat diganti.

Harga-harga yang perlu untuk menggunakan rumus (3.1) adalah $\bar{x} = 16{,}9$, $n = 20$, $\sigma = \sqrt{2{,}3}$ dan $\mu_0 = 16$. Didapat

$$z = \frac{16{,}9 - 16}{\sqrt{(2{,}3)/20}} = 2{,}65$$




Dari daftar normal standar dengan $\alpha = 0{,}05$ diperoleh $z = 1{,}64$. Kriteria pengujian adalah: tolak $H_0$ jika z hitung lebih besar atau sama dengan 1,64.

Jika z hitung lebih kecil dari 1,64 maka $H_0$ diterima. Dari penelitian didapat $z = 2,65$ yang jelas jatuh pada daerah kritis. Jadi $H_0$ ditolak.yang berarti bahwa metode baru dapat menggantikan metode lama dengan mengambil resiko 5%.

b). $\sigma$ *tidak diketahui*

Jika $\sigma$ tidak diketahui statistik yang digunakan untuk menguji $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Adalah statistik t seperti dalam rumus (3.2).Kriteria pengujian didapat dari daftar distribusi Student t dengan dk = (n-1) dan peluang $(1-\alpha)$. Jadi $H_0$ ditolak jika $t \geq t_{1-\alpha}$ dan terima $H_0$ dalam hal lainnya.

Contoh 4

Dikatakan bahwa dengan menyuntikkan semacam hormon tertentu kepada ayam akan menambah berat telurnya rata-rata dengan 4,5 gram. Sampel acak yang terdiri atas 31 butir telur dari ayam yang telah diberi suntikan hormon tersebut memberikan rata-rata berat 4,9 gram dan simpangan baku s = 0,8 gram. Cukup beralasankah untuk menerima pernyataan bahwa pertambahan rata-rata berat telur paling sedikit 4,5 gram?

Penyelesaian

Pasangan hipotesis yang digunakan adalah $\begin{cases} H_0 : \mu = 4,5 \\ H_1 : \mu > 4,5 \end{cases}$

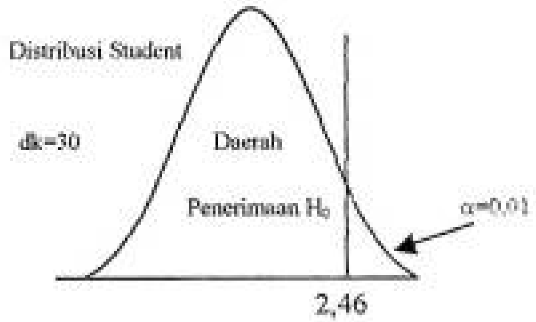
$H_0 : \mu = 4{,}5$ ;menyuntik ayam dengan hormon tidak menyebabkan bertambahnya rata-rata berat telur dengan 4,5 gram

$H_1 : \mu > 4{,}5$ ; Suntikan hormon mengakibatkan berat telur rata-rata bertambah paling sedikit 4,5 gram.

Dari persamaan (3.2), dengan $\bar{x} = 4{,}9$ gram, $s = 0{,}8$ gram, $n = 31$ dan $\mu_0 = 4{,}5$

Didapat:

$$t = \frac{4{,}9 - 4{,}5}{0{,}8/\sqrt{31}} = 2{,}78$$




Dengan mengambil $\alpha = 0{,}01$ dari daftar distribusi t dengan dk =30 didapat t = 2,46. Kriteria pengujiannya adalah: Tolak hipotesis $H_0$ jika t hitung lebih besar atau sama dengan 2,46 dan terima $H_0$ dalam hal lainnya. Penelitian memberikan hasil t = 2,78 dan ini jatuh pada daerah penolakan $H_0$. Jadi hipotesis $H_0$ ditolak. Penyuntikan hormon terhadap ayam meyakinkan kita dapat menambah berat telurnya rata-rata paling sedikit dengan 4,5 gram.

Untuk menguji pihak kiri $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$

Cara yang sama berlaku untuk uji pihak kanan. Jika $\sigma$ diketahui, maka statisik z seperti dalam persamaan (3.1) digunakan dan tolak $H_0$ jika $z \leq -z_{0,5-\alpha}$ dengan $z_{0,5-\alpha}$ didapat dari normal baku menggunakan peluang (0,5-$\alpha$). Dalam hal lainnya $H_0$ diterima. Disini $\alpha$ = taraf nyata.

Jika $\sigma$ tidak diketahui maka untuk uji pihak kiri tersebut digunakan statistik t seperti pada persamaan (3.2). Dalam hal ini hipotesis $H_0$ ditolak jika $t \leq -t_{1-\alpha}$ dengan $t_{1-\alpha}$ didapat dari daftar distribusi Student t menggunakan peluang (1 - $\alpha$ ) dan dk = ( n - 1). Untuk $t > -t_{1-\alpha}$, hipotesis $H_0$ diterima.

Contoh 5

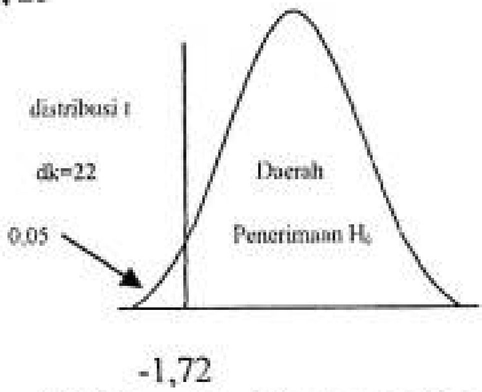
Akhir-akhir ini masyarakat mengeluh dan mengatakan bahwa isi bersih makanan A dalam kaleng tidak sesuai dengan yang tertulis pada etiketnya sebesar 5 ons. Untuk meneliti hal ini, 23 kaleng makanan A telah diteliti secara acak. Dari ke-23 isi kaleng tersebut, berat rata-ratanya 4,9 ons dan simpangan baku 0,2 ons. Dengan taraf nyata 0,05, tentukan apa yang akan dikatakan tentang keluhan masyarakat tersebut.

Penyelesaian

Jika rata-rata isi kaleng tidak kurang dari 5 ons, jelas masyarakat tidak akan mengeluh. Karenanya akan diuji pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu < 5 \end{cases}$

Disini simpangan baku $\sigma$ tidak diketahui. Dengan memisalkan isi kaleng berdistribusi normal, maka dari persamaan (3.2) didapat statistik t :

$$t = \frac{4{,}9 - 5}{0{,}2/\sqrt{23}} = -2{,}398$$




Dengan nilai $\alpha$ = 0,05 dan dk = 22, dari daftar distribusi t = 1,72. Aturan untuk menguji adalah : tolak $H_0$ jika t hitung $\leq$ -1,72 dan terima $H_0$ dalam hal lainnya. Dari perhitungan didapat t = -2,398 yang jelas jatuh pada daerah penolakan $H_0$. Jadi $H_0$ ditolak dan pengujian memberikan hasil yang berarti pada taraf 5%.

Kesimpulan: Penelitian tersebut menguatkan keluhan masyarakat bahwa isi bersih makanan dalam kaleng sudah berkurang dari yang tertera pada etiket.

## 3.3 MENGUJI KESAMAAN DUA RATA-RATA

### 3.3.1 Menguji Kesamaan Dua Rata-rata: Uji Dua Pihak

Banyak penelitian yang memerlukan perbandingan antara dua keadaan atau tepatnya dua populasi. Misalnya membandingkan dua cara mengajar, dua cara produksi dan lain sebagainya. Misalnya ada dua populasi normal masing-masing dengan rata-rata $\mu_1$ dan $\mu_2$ sedangkan simpangan bakunya $\sigma_1$ dan $\sigma_2$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n_1$ sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak berukuran $n_2$. Dari kedua sampel ini berturut-turut didapat $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$ akan diuji mengenai rata-rata $\mu_1$ dan $\mu_2$.

Pasangan hipotesis nol dan tandingannya yang akan diuji adalah: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

Untuk ini akan dibedakan hal-hal berikut:

*a). $\sigma_1$ & $\sigma_2$ diketahui*

Statistik yang digunakan jika $H_0$ benar, adalah: $z = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

(3.3)

Dengan taraf nyata $\alpha$, maka kriteria pengujian adalah : terima $H_0$ jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dengan $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang ½(1- $\alpha$). Dalam hal lainnya $H_0$ ditolak.

b). $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ *tetapi* $\sigma$ *tidak diketahui*

Jarang sekali $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ diketahui besarnya. Jika $H_0$ benar dan $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi $\sigma$ tidak diketahui harganya, statistik yang digunakan adalah $t = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ (3.4)

Dengan $s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ (3.5)

Menurut teori distribusi sampling, maka statistik t diatas berdistribusi Student dengan dk $= (n_1 + n_2 - 2)$. Kriteria pengujian adalah terima $H_0$ jika $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha}$ dengan

$t_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan $dk = (n_1 + n_2 - 2)$ dan peluang $(1 - 1/2\alpha)$.

Untuk harga-harga t lainnya $H_0$ ditolak.

Contoh 6

Dua macam makanan A dan B diberikan kepada ayam secara terpisah untuk jangka waktu tertentu. Ingin diketahui macam makanan yang mana yang lebih baik bagi ayam tersebut. Sampel acak yang terdiri atas 11 ayam diberi makanan A dan 10 ayam diberi makanan B. Tambah berat badan ayam (dalam ons) hasil percobaan adalah sebagai berikut:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Makanan A | 3,1 | 3,0 | 3,3 | 2,9 | 2,6 | 3,0 | 3,6 | 2,7 | 3,8 | 4,0 | 3,4 |
| Makanan B | 2,7 | 2,9 | 3,4 | 3,2 | 3,3 | 2,9 | 3,0 | 3,0 | 2,6 | 3,7 | |

Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, tentukan apakah kedua macam makanan itu sama baiknya atau tidak.

Penyelesaian

Dari data diatas didapat $\bar{x}_A = 3{,}22$, $\bar{x}_B = 3{,}07$, $s_A^2 = 0{,}1996$ dan $s_B^2 = 0{,}1112$. Simpangan baku gabungan dari rumus (3.5) didapat $s = 0{,}397$. Rumus (3.4) memberikan:

$$t = \frac{3{,}22 - 3{,}07}{0{,}397\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{10}}} = 0{,}862$$

Harga $t_{0,975}$ dengan dk = 19 dari daftar distribusi Student adalah 2,09. Kriteria pengujian adalah : terima $H_0$ jika t hitung terletak antara -2,09 dan 2,09 dan tolak $H_0$ jika t mempunyai harga-harga lain.

Dari penelitian didapat t = 0,862 dan ini jelas ada dalam daerah penerimaan. Jadi $H_0$ diterima.

Kesimpulan: Kedua macam makanan ayam itu memberikan tambahan berat daging yang sama terhadap ayam-ayam itu.

c). $\sigma_1 \neq \sigma_2$ *dan kedua-duanya tidak diketahui*

Jika kedua simpangan baku tidak sama tetapi kedua populasi berdistribusi normal, pendekatan yang dilakukan adalah dengan menggunakan statistik t' barikut:

$$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(s_1^2/n_1)+(s_2^2/n_2)}} \qquad (3.6)$$

Kriteri pengujian adalah: terima hipotesis $H_0$ jika

$$-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

dengan: $w_1 = s_1^2/n_1 \,;\, w_2 = s_2^2/n_2$

$t_1 = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha),(n_1-1)}$ dan $t_2 = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha),(n_2-1)}$

$t\beta$, m didapat dari daftar distribusi Student dengan peluang $\beta$ dan dk = m. Untuk harga-harga t lainnya $H_0$ ditolak.

Contoh 7

Suatu barang dihasilkan dengan menggunakan dua proses. Ingin diketahui apakah kedua proses itu menghasilkan hal yang sama atau tidak terhadap kualitas barang itu ditinjau dari rata-rata daya tekannya. Untuk ini diadakan percobaan sebanyak 20 dari hasil proses kesatu dan 20 pula dari hasil proses kedua. Rata-rata dan simpangan bakunya berturut-turut $\overline{x}_1$ = 9,25 kg, $s_1$ = 2,24 kg, $\overline{x}_2$ =10,40 kg dan $s_2$ =3,12 kg. Jika varians kedua populasi tidak sama, dengan taraf nyata 0,05, bagaimanakah hasilnya?

Penyelesaian

Hipotesis $H_0$ dan tandingannya $H_1$ adalah $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

Harga-harga yang diperlukan adalah:

$$t' = \frac{9{,}25 - 10{,}40}{\sqrt{(5{,}0176/20) + (9{,}7344/20)}} = 1{,}339$$

$$w_1 = \frac{5{,}0176}{20} = 0{,}2509 \text{ , dan } w_2 = \frac{9{,}7344}{20} = 0{,}4867$$

$t_1 = t_{(0,975),19} = 2{,}09$ dan $t_2 = t_{(0,975),19} = 2{,}09$

sehingga didapat:

$$\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} = \frac{(0{,}2509)(2{,}09) + (0{,}4867)(2{,}09)}{0{,}2509 + 0{,}4869} = 2{,}09$$

Kriteria pengujian adalah : terima $H_0$ jika $-2{,}09 < t' < 2{,}09$ dan tolak $H_0$ dalam hal lainnya. Jelas bahwa t' = 1,339 ada dalam daerah penerimaan $H_0$. Jadi $H_0$ diterima dalam taraf nyata 0,05.

d).*Observasi berpasangan*

Untuk observasi berpasangan, akan diambil $\mu B = \mu_1 - \mu_2$. Hipotesis nol dan tandingannya adalah $\begin{cases} H_0 : \mu B = 0 \\ H_1 : \mu B \neq 0 \end{cases}$

jika $B_1 = x_1 - y_1$, $B_2 = x_2 - y_2$,....., $B_n = x_n - y_n$, maka data $B_1, B_2, ..., B_n$ menghasilkan rata-rata $\overline{B}$ dan simpangan baku $s_B$. Untuk pengujian hipotesis digunakan statistik:

$$t = \frac{\overline{B}}{s_B / \sqrt{n}} \tag{3.7}$$

dan terima $H_0$ jika $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha}$ dengan $t_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan peluang $(1 - 1/2\alpha)$ dan dk = (n-1). Dalam hal lainnya $H_0$ ditolak.

Dimana, $\overline{B} = \sum \frac{Bi}{n}$ dan $s_B^2 = \frac{n\sum B_i^2 - (\sum B_i)^2}{n(n-1)}$

Contoh 8

Data berikut adalah mengenai tinggi anak laki-laki pertama (X) dan tinggi ayah (Y) dinyatakan dalam cm.

| Tinngi anak | Tinggi ayah | Beda(B) | $B^2$ |
|---|---|---|---|
| 158 | 161 | -3 | 9 |
| 160 | 159 | 1 | 1 |
| 163 | 162 | 1 | 1 |
| 157 | 160 | -3 | 9 |
| 154 | 156 | -2 | 4 |
| 164 | 159 | 5 | 25 |
| 169 | 163 | 6 | 36 |
| 158 | 160 | -2 | 4 |
| 162 | 158 | 4 | 16 |
| 161 | 160 | 1 | 1 |
| Jumlah | | 8 | 106 |

Didapat $n = 10$, $\overline{B} = 0{,}8$ dan $s_B^2 = 11{,}07$. maka

$$t = \frac{0{,}8}{\sqrt{11{,}07/10}} = 0{,}762$$

Dari daftar distribusi t dengan peluang 0,975 dan dk = 9 didapat $t_{0,975} = 2{,}26$. Ternyata $t = 0{,}762$ ada dalam daerah penerimaa $H_0$. Jadi penelitian menghasilkan uji yang tak berarti.

3.3.2 Menguji Kesamaan Dua Rata-rata: Uji Satu Pihak

Dimisalkan dua populasi berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu_1$ dan $\mu_2$ dan simpangan baku $\sigma_1$ dan $\sigma_2$. Karena umumnya $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ tidak diketahui, maka akan ditinjau hal-hal tersebut untuk keadaan $\sigma_1 = \sigma_2$ dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

a). Uji Pihak Kanan

Yang diuji adalah $\begin{cases} H_0 & : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 & : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$

Dalam hal $\sigma_1 = \sigma_2$, maka statistik yang digunakana adalah statistik t seperti dalam persamaan (3.4) dengan $s^2$ seperti dalam persamaan (3.5). Kriteria pengujia yang berlaku adalah: Terima $H_0$ jika $t < t_{1-\alpha}$ dan tolak $H_0$ jika t mempunyai harga-harga lain. Derajat kebebasan untuk daftar distribusi t adalah $(n_1 + n_2 - 2)$ dengan peluang $(1 - \alpha)$. Jika $\sigma_1 \neq \sigma_2$, maka statistik yang digunakan adalah statistik t' seperti dalam persamaan (3.7). Dalam hal ini, kriteria pengujian adalah: tolak hipotesis $H_0$ jika

$$t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

dan terima $H_0$ terjadi sebaliknya, dengan $w_1 = s_1^2/n_1$, $w_2 = s_2^2/n_2$, $t_1 = t_{(1-\alpha),(n_1-1)}$ dan $t_2 = t_{(1-\alpha),(n_2-1)}$. Peluang untuk penggunaan daftar distribusi t ialah $(1 - \alpha)$ sedangkan dk-nya masing-masing $(n_1 - 1)$ dan $(n_2 - 1)$.

Contoh 9

Diduga bahwa pemuda yang senang berenang rata-rata lebih tinggi badannya dari pada pemuda sebaya yang tidak senang berenang. Untuk meneliti ini telah diukur 15 pemuda ynag senang berenang dan 20 yang tidak senang berenang. Rata-rata tinggi badannya berturut-turut 167,2 cm 160,3 cm. Simpangan bakunya masing-masing 6,7 cm dan 7,1 cm. Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, dapatkah kita mendukung dugaan tersebut?

Penyelesaian

Jika distribusi tinggi badan untuk kedua kelompok pemuda itu normal dan $\sigma_1 = \sigma_2$ maka statistik t dalam persamaan (3.4) dapat digunakan. Telah diketahui $n_1 = 15$, $\bar{x}_1 =$ 167,2 cm, $s_1 = 6,7$ cm, $n_2 = 20$, $\bar{x}_2 = 160,3$ cm dan $s_2 = 7,1$ cm.dari persamaan (3.5) didapat variansi gabungan

$$s^2 = \frac{(15-1)(44,89)+(20-1)(50,41)}{15+20-2} = 48,07$$

sehingga statistik t mempunyai harga:

$$t = \frac{167,2 - 160,3}{\sqrt{(48,07)[(1/15)+(1/20)]}} = 2,913$$

Dari daftar distribusi t dengan peluang 0,95 dan dk = 33 didapat $t_{0,95} = 1,70$.

Dari penelitian didapat t = 2,913 dan ini lebih besar dari t = 1,70. Jadi $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ditolak, dimana indeks satu menyetakan pemuda yang senang berenang. Penyelidikan memberikan hasil yang berarti pada taraf 5%. Dugaan dimuka dapat diterima.

Untuk observasi berpasangan, pasangan hipotesis nol $H_0$ dan hipotesis tandingan $H_1$ untuk uji pihak kanan adalah: $\begin{cases} H_0 & : \mu_B = 0 \\ H_1 & : \mu_B > 0 \end{cases}$

Statistik yang digunakan masih statistik t dalam persamaan (3.7) dan tolak $H_0$ jika $t \geq t_{1-\alpha}$ dimana $t_{1-\alpha}$ didapat dari daftar distribusi Student dengan dk = (n – 1) dan peluang (1 - α).

b) Uji Pihak Kiri

Perumusan hipotesis $H_0$ dan hipotesis tandingan $H_1$ untuk uji pihak kiri adalah:

$$\begin{cases} H_0 & : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 & : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

Langkah-langkah yang ditempuh dalam hal ini sama halnya dengan uji pihak kanan.

Jika $\sigma_1 = \sigma_2$, kedua nilainya tak diketahui, maka digunakan statistik t dalam persamaan (3.4). Kriteria pengujian adalah : tolak $H_0$ jika $t \leq - t_{1-\alpha}$, dimana $t_{1-\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan dk = $(n_1 + n_2 - 2)$ dan peluang $(1 - \alpha)$. Untuk harga-harga lainnya, $H_0$ diterima.

Jika $\sigma_1 \neq \sigma_2$, maka yang digunakan adalah statistik t' dalam persamaan (3.6) dan tolak $H_0$ untuk:

$$t' \leq -\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

dimana $w_1$, $w_2$, $t_1$ dan $t_2$ semuanya seperti telah diuraikan dimuka. Jika t' lebih besar dari harga tersebut, maka $H_0$ diterima

Untuk observasi berpasangan, hipotesis $H_0$ dan tandingan yang akan diuji adalah : $\begin{cases} H_0 & : \mu = 0 \\ H_1 & : \mu < 0 \end{cases}$

Statistik yang digunakan ialah statistik t dalam persamaan (3.7) dan tolak $H_0$ jika $t \leq - t_{(1-\alpha),(n-1)}$ dan terima $H_0$ untuk $t > - t_{(1-\alpha),(n-1)}$.

Cara penyelesaian untuk persoalan ini sama halnya dengan uji pihak kanan, bedanya hanya terletak pada daerah kritisnya saja.

## DAFTAR PUSTAKA


Anton Howard (1994), *Aljabar Linear Elementer*, Edisi Ke-5 Erlangga , Jakarta

Jhon Willy dan Sons (1982), *Partial Differential Equation For Sientists and Ennginers*, Amerika

Leon Lapidus and George F Pinder (1982), *Numerical Solution of Partial Differensial Equation in Science and Enginering*, Singapore

Sudjana (1992), *Metode Statistika*, Edisi ke-5 Tarsito, Bandung

Walpole Ronald E (1986), *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Terbitan Ke-2 Diterjemahkan Oleh R.K Sembiring, ITB Bandung

```
PROGRAM GAUSS;
USES CRT,DOS;
VAR
  I,J,K,M,N:BYTE;
  T:REAL;
  U,B:ARRAY[1..16] OF REAL;
  A,C:ARRAY[1..16,1..17] OF REAL;
LABEL 5;
BEGIN
CLRSCR;
 WRITE('INPUT ORDE MATRIKS KOEFISIEN:');READLN(N);
 CLRSCR;
 M:=N+1;
 FOR I:= 1 TO N DO
 BEGIN
  FOR J:=1 TO N DO
  BEGIN
   GOTOXY(4*J-3,I);READLN(A[I,J]);
  END;
 END;
 CLRSCR;
FOR J:=1 TO N DO
BEGIN
 GOTOXY(4,J);WRITE('B[',J,']:');READLN(B[J]);
END;

R I:= 1 TO N DO
BEGIN
 FOR J:=1 TO M DO
 BEGIN
  C[I,J]:=A[I,J];
 END;
 C[I,M]:=B[I];
END;
FOR I := 1 TO N DO
BEGIN
 FOR J:= 1 TO N DO
 BEGIN
  IF J=I THEN GOTO 5;
  IF C[J,I]=0 THEN GOTO 5;
   T:=-C[J,I]/C[I,I];
   FOR K:= 1 TO M DO

   BEGIN
```

```
      C[J,K]:=C[J,K]+T*C[I,K];
    5:END;
   END;
  END;
   FOR J:= 1 TO N DO
  BEGIN
    U[J]:=C[J,M]/C[J,J];
   END;
CLRSCR;
   WRITE('                SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH:');
  FOR J:= 1 TO N DO
   BEGIN
     GOTOXY(25,J+2);WRITE('U[',J,']=',U[J]:1:8);
   END;
   READLN;
END.
```

```
PROGRAM INVERSI;
USES CRT,DOS;
VAR
    J,I,K,L,N,IJ:INTEGER;
    T:REAL;
    U,P,B:ARRAY[1..16] OF REAL;
    A:ARRAY[1..16,1..17] OF REAL;
LABEL 4,5;
BEGIN
  CLRSCR;
  WRITE('INPUT ORDE MATRIKS KOEFISIEN:');READLN(N);
  CLRSCR;
  FOR i:=1 TO N DO
  BEGIN
    FOR j:=1 TO N DO
    BEGIN
      GOTOXY(4*j-3,I);READLN(A[I,J]);
    END;
   END;
   CLRSCR;
 FOR I:=1 TO N DO
 BEGIN
  GOTOXY(10*I,0);WRITE('B[',I,']:');READLN(B[I]);
 END;
 CLRSCR;
 FOR I:=1 TO N DO
 BEGIN
   P[I]:=A[I,I];
   A[I,I]:=1;
   FOR J:=1 TO N DO
   BEGIN
     A[I,J]:=A[I,J]/P[I];
   END;
   FOR K:= 1 TO N DO
   BEGIN
     IF (K=I) THEN GOTO 4;
     T:=A[K,I];
     A[K,I]:=0;
     FOR L:= 1 TO N DO
       BEGIN
         A[K,L]:=A[K,L]-A[I,L]*T;
     4:END;
     END;
   END;
```

```
{CLRSCR;}
FOR I:= 1 TO N DO
BEGIN
 U[I]:=0;
 FOR J:= 1 TO N DO
 BEGIN
  U[I]:=U[I]+A[I,J]*B[J];
 END;
END;
READLN;
CLRSCR;
WRITE('                    MATRIKS INVERS ADALAH;');
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
 FOR J:=1 TO N DO
 BEGIN
  GOTOXY(5*J-4,I+1);
  5:WRITE(A[I,J]:1:2);
 END;
END;
READLN;
CLRSCR;
WRITE('            SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH;');
FOR I:= 1 TO N DO
BEGIN
 GOTOXY(25,I+2);WRITELN('U[',I,']=',U[I]:1:8);
END;
READLN;
END.
```

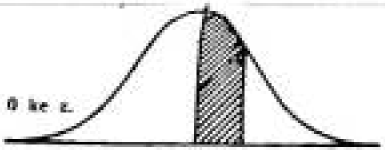
```
PROGRAM FAKTORISASI_LU;
USES CRT,DOS;
VAR
   I,J,K,N,L,M,O,IJ:INTEGER;
   A,AL,U:ARRAY[1..16,1..17] OF REAL;
   B,X,Y:ARRAY[1..16] OF REAL;
   SUM,SUM1,SUM2:REAL; S:STRING;
LABEL 30,40,70;

BEGIN
  CLRSCR;
  WRITE('INPUT ORDO MATRIKS:');READLN(N);
  CLRSCR;
  WRITE('INPUT MATRIKS KOEFISIEN:');
  FOR I := 1 TO N DO
  BEGIN
    FOR J := 1 TO N DO
    BEGIN
      GOTOXY(4*J-3,I+1);READLN(A[I,J]);
    END;
 END;
 CLRSCR;
 WRITE(' VEKTOR B:');
 FOR J:=1 TO N DO
 BEGIN
   GOTOXY(5,J+1);WRITE('B(',J,'): ');READLN(B[J]);
 END;
 CLRSCR;
 FOR I:= 1 TO N DO
 BEGIN
   FOR J:= 1 TO N DO
   BEGIN
     AL[I,J]:=0;
     U[I,I]:=0;
   END;
 END;
 FOR I:= 1 TO N DO
 BEGIN
   U[I,I]:=1;
 END;
 FOR I:=1 TO N DO
 BEGIN
   L:=I+1;
   AL[I,1]:=A[I,1];
```

```
 U[1,L]:=A[1,L]/AL[1,1];
END;
FOR I:= 2 TO N DO
BEGIN
 FOR J:=I TO N DO
 BEGIN
  M:=J+1;
  SUM1:=0;
  SUM2:=0;
  FOR K:=1 TO I-1 DO
   BEGIN
    SUM1:=SUM1-AL[J,K]*U[K,I];
    SUM2:=SUM2-AL[I,K]*U[K,M];
   END;
  70:AL[J,I]:=A[J,I]+SUM1;
  IF J=N THEN
   BEGIN
    GOTO 40;
   END;
   U[I,M]:=(A[I,M]+SUM2)/AL[I,I];
  40:END;
 END;
 Y[1]:=B[1]/AL[1,1];{routine mencari matriks Y}
 FOR I:= 2 TO N DO
 BEGIN
  SUM:=0;
  FOR J:= 1 TO I-1 DO
  BEGIN
   SUM:=SUM-AL[I,J]*Y[J];
  END;
  Y[I]:=(B[I]+SUM)/AL[I,I];
 END;
 X[N]:=Y[N]; {routine mencari SPL}
 FOR I:= 1 TO N-1 DO
 BEGIN
  O:=N-I;
  SUM:=0;
  FOR J:= O+1 TO N DO
  BEGIN
   SUM:=SUM-U[O,J]*X[J];
  END;
  X[O]:=Y[O]+SUM;
 END;
 READLN;
```

```
CLRSCR;
WRITE('        MATRIKS L ');
FOR I:= 1 TO N DO
BEGIN
  FOR J:= 1 TO N DO
  BEGIN
    GOTOXY(7*J-6,I+2);WRITE(AL[I,J]:1:2);
  END;
END;
READLN;
CLRSCR;
WRITE('        MATRIKS U  ');
FOR I:= 1 TO N DO
BEGIN
  FOR J:= 1 TO N DO
  BEGIN
    GOTOXY(7*J-6,I+2);WRITE(U[I,J]:1:2);
  END;
END;
READLN;
CLRSCR;
WRITELN('  SOLUSI DARI SPL TERSEBUT ADALAH:');
FOR I:= 1 TO N DO
BEGIN
 GOTOXY(8,I+2);WRITELN(X[I]:1:8);
END;
READLN;
END.
```

DAFTAR F

**LUAS DIBAWAH LENGKUNGAN NORMAL STANDAR Dari 0 ke z.**
**(Bilangan dalam badan daftar menyatakan desimal).**



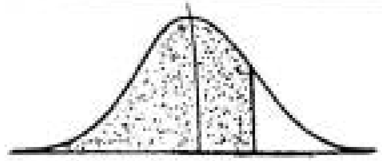

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0000 | 0040 | 0080 | 0120 | 0160 | 0199 | 0239 | 0279 | 0319 | 0359 |
| 0,1 | 0398 | 0438 | 0478 | 0517 | 0557 | 0596 | 0636 | 0675 | 0714 | 0754 |
| 0,2 | 0793 | 0832 | 0871 | 0910 | 0948 | 0987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 2258 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2518 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2612 | 2642 | 2673 | 2704 | 2734 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2996 | 3023 | 3051 | 3078 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1,0 | 3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3554 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4429 | 4441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4484 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4699 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4761 | 4767 |
| 2,0 | 4772 | 4778 | 4783 | 4788 | 4793 | 4798 | 4803 | 4808 | 4812 | 4817 |
| 2,1 | 4821 | 4826 | 4830 | 4834 | 4838 | 4842 | 4846 | 4850 | 4854 | 4857 |
| 2,2 | 4861 | 4864 | 4868 | 4871 | 4875 | 4878 | 4881 | 4884 | 4887 | 4890 |
| 2,3 | 4893 | 4896 | 4898 | 4901 | 4904 | 4906 | 4909 | 4911 | 4913 | 4916 |
| 2,4 | 4918 | 4920 | 4922 | 4925 | 4927 | 4929 | 4931 | 4932 | 4934 | 4936 |
| 2,5 | 4938 | 4940 | 4941 | 4943 | 4945 | 4946 | 4948 | 4949 | 4951 | 4952 |
| 2,6 | 4953 | 4955 | 4956 | 4957 | 4959 | 4960 | 4961 | 4962 | 4963 | 4964 |
| 2,7 | 4965 | 4966 | 4967 | 4968 | 4969 | 4970 | 4971 | 4972 | 4973 | 4974 |
| 2,8 | 4974 | 4975 | 4976 | 4977 | 4977 | 4978 | 4979 | 4979 | 4980 | 4981 |
| 2,9 | 4981 | 4982 | 4982 | 4983 | 4984 | 4984 | 4985 | 4985 | 4986 | 4986 |
| 3,0 | 4987 | 4987 | 4987 | 4988 | 4988 | 4989 | 4989 | 4989 | 4990 | 4990 |
| 3,1 | 4990 | 4991 | 4991 | 4991 | 4992 | 4992 | 4992 | 4992 | 4993 | 4993 |
| 3,2 | 4993 | 4993 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4995 | 4995 | 4995 |
| 3,3 | 4995 | 4995 | 4995 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4996 | 4997 |
| 3,4 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4998 |
| 3,5 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 | 4998 |
| 3,6 | 4998 | 4998 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 |
| 3,7 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 |
| 3,8 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 |
| 3,9 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 | 5000 |

Sumber : *Theory and Problems of Statistics*, Spiegel, M.R., Ph.D., Schaum Publishing Co., New York, 1961.



DAFTAR G

Nilai Persentil
Untuk Distribusi t
$\nu$ = dk
( Bilangan Dalam Badan Daftar
Menyatakan $t_p$ )




| $\nu$ | $t_{0,995}$ | $t_{0,99}$ | $t_{0,975}$ | $t_{0,95}$ | $t_{0,90}$ | $t_{0,80}$ | $t_{0,75}$ | $t_{0,70}$ | $t_{0,60}$ | $t_{0,55}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63,66 | 31,82 | 12,71 | 6,31 | 3,08 | 1,376 | 1,000 | 0,727 | 0,325 | 0,158 |
| 2 | 9,92 | 6,96 | 4,30 | 2,92 | 1,89 | 1,061 | 0,816 | 0,617 | 0,289 | 0,142 |
| 3 | 5,84 | 4,54 | 3,18 | 2,35 | 1,64 | 0,978 | 0,765 | 0,584 | 0,277 | 0,137 |
| 4 | 4,60 | 3,75 | 2,78 | 2,13 | 1,53 | 0,941 | 0,741 | 0,569 | 0,271 | 0,134 |
| 5 | 4,03 | 3,36 | 2,57 | 2,02 | 1,48 | 0,920 | 0,727 | 0,559 | 0,267 | 0,132 |
| 6 | 3,71 | 3,14 | 2,45 | 1,94 | 1,44 | 0,906 | 0,718 | 0,553 | 0,265 | 0,131 |
| 7 | 3,50 | 3,00 | 2,36 | 1,90 | 1,42 | 0,896 | 0,711 | 0,549 | 0,263 | 0,130 |
| 8 | 3,36 | 2,90 | 2,31 | 1,86 | 1,40 | 0,889 | 0,706 | 0,546 | 0,262 | 0,130 |
| 9 | 3,25 | 2,82 | 2,26 | 1,83 | 1,38 | 0,883 | 0,703 | 0,543 | 0,261 | 0,129 |
| 10 | 3,17 | 2,76 | 2,23 | 1,81 | 1,37 | 0,879 | 0,700 | 0,542 | 0,260 | 0,129 |
| 11 | 3,11 | 2,72 | 2,20 | 1,80 | 1,36 | 0,876 | 0,697 | 0,540 | 0,260 | 0,129 |
| 12 | 3,06 | 2,68 | 2,18 | 1,78 | 1,36 | 0,873 | 0,695 | 0,539 | 0,259 | 0,128 |
| 13 | 3,01 | 2,66 | 2,16 | 1,77 | 1,35 | 0,870 | 0,694 | 0,538 | 0,259 | 0,128 |
| 14 | 2,98 | 2,62 | 2,14 | 1,76 | 1,34 | 0,868 | 0,692 | 0,537 | 0,258 | 0,128 |
| 15 | 2,95 | 2,60 | 2,13 | 1,75 | 1,34 | 0,866 | 0,691 | 0,536 | 0,258 | 0,128 |
| 16 | 2,92 | 2,58 | 2,12 | 1,75 | 1,34 | 0,865 | 0,690 | 0,535 | 0,258 | 0,128 |
| 17 | 2,90 | 2,57 | 2,11 | 1,74 | 1,33 | 0,863 | 0,689 | 0,534 | 0,257 | 0,128 |
| 18 | 2,88 | 2,55 | 2,10 | 1,73 | 1,33 | 0,862 | 0,688 | 0,534 | 0,257 | 0,127 |
| 19 | 2,86 | 2,54 | 2,09 | 1,73 | 1,33 | 0,861 | 0,688 | 0,533 | 0,257 | 0,127 |
| 20 | 2,84 | 2,53 | 2,09 | 1,72 | 1,32 | 0,860 | 0,687 | 0,533 | 0,257 | 0,127 |
| 21 | 2,83 | 2,52 | 2,08 | 1,72 | 1,32 | 0,859 | 0,686 | 0,532 | 0,257 | 0,127 |
| 22 | 2,82 | 2,51 | 2,07 | 1,72 | 1,32 | 0,858 | 0,686 | 0,532 | 0,256 | 0,127 |
| 23 | 2,81 | 2,50 | 2,07 | 1,71 | 1,32 | 0,858 | 0,685 | 0,532 | 0,256 | 0,127 |
| 24 | 2,80 | 2,49 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,857 | 0,685 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 25 | 2,79 | 2,48 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,856 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 26 | 2,78 | 2,48 | 2,06 | 1,71 | 1,32 | 0,856 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 27 | 2,77 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 | 0,855 | 0,684 | 0,531 | 0,256 | 0,127 |
| 28 | 2,76 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 | 0,855 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 29 | 2,76 | 2,46 | 2,04 | 1,70 | 1,31 | 0,854 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 30 | 2,75 | 2,46 | 2,01 | 1,70 | 1,31 | 0,854 | 0,683 | 0,530 | 0,256 | 0,127 |
| 40 | 2,70 | 2,42 | 2,02 | 1,68 | 1,30 | 0,851 | 0,681 | 0,529 | 0,255 | 0,126 |
| 60 | 2,66 | 2,39 | 2,00 | 1,67 | 1,30 | 0,848 | 0,679 | 0,527 | 0,254 | 0,126 |
| 120 | 2,62 | 2,36 | 1,98 | 1,66 | 1,29 | 0,845 | 0,677 | 0,526 | 0,254 | 0,126 |
| ∞ | 2,58 | 2,33 | 1,96 | 1,645 | 1,28 | 0,842 | 0,674 | 0,524 | 0,253 | 0,126 |

Sumber : *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Fisher, R.A. dan Yates, F., Table III, Oliver & Boyd Ltd. Edinburgh.