

*SKRIPSI FISIKA*

***Wormhole* dalam Persamaan Medan Gravitasi Einstein  
Efektif Dunia *Brane* Didukung oleh Energi *Phantom***

**MUH. HILAL HAMDI**

**H021181010**



**DEPARTEMEN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2022**

***Wormhole*** dalam Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif  
***Dunia Brane*** Didukung oleh Energi *Phantom*

**SKRIPSI**

*Diajukan sebagai Salah Satu Syarat*

*Memperoleh Gelar Sarjana Sains*

*pada Program Studi Fisika Departemen Fisika*

*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*

*Universitas Hasanuddin*

**MUH. HILAL HAMDI AMRULLAH**

**H021181010**

**DEPARTEMEN FISIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**  
**MAKASSAR**

**2022**

## HALAMAN PENGESAHAN

*Wormhole* dalam Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif  
Dunia *Brane* Didukung oleh Energi *Phantom*

Disusun dan diajukan oleh:  
MUH. HILAL HAMDJ AMRULLAH

H021181010

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka  
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Fisika Fakultas Matematika  
dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada 8 Juli 2022

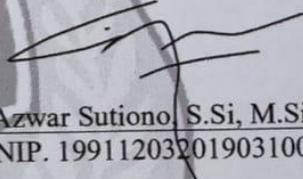
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui

Pembimbing Utama,

  
Drs. Bansawang BJ, M.Si  
NIP. 196312061994121001

Pembimbing Pertama,

  
Azwar Sutiono, S.Si, M.Si  
NIP. 199112032019031007

Ketua Program Studi,

  
Prof. Dr. Arifin, M. T.  
NIP. 196705201994031002

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muh. Hilal Hamdi Amrullah  
NIM : H021181010  
Program Studi : Fisika  
Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

***Wormhole dalam Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif Dunia Brane  
Didukung oleh Energi Phantom***

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau seluruh skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 9 Juli 2022

Yang Menyatakan



Muh. Hilal Hamdi Amrullah

## ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian mengenai *wormhole* dalam persamaan medan gravitasi Einstein dunia *brane*. pada penelitian ini dikonstruksi suatu *wormhole* pada *brane* dengan menggunakan metrik statik dan simetri bola untuk *wormhole* seperti yang diajukan oleh Morris dan Thorne dengan skalar Ricci pada *brane* yang tidak nol. Dilakukan peninjauan pada *brane* yang tidak vakum dan *bulk* yang vakum. Tensor energi-momentum efektif dirancang sehingga melanggar kondisi energi nol. *Wormhole* akan dibuat sedemikian rupa sehingga dapat didukung oleh kehadiran *phantom energy*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa, *wormhole* yang dikonstruksi ternyata didukung oleh *phantom energy*. Telah diperoleh visualisasi 2-dimensi dan 3-dimensi dari *wormhole*.

**Kata Kunci:** *wormhole, braneworld, phantom energy*

## ABSTRACT

Research has been carried out on wormholes in the Einstein gravitational field equations of the braneworld. In this study, a wormhole was constructed on the brane using static and spherically symmetry metrics for the wormhole as proposed by Morris and Thorne with non-zero Ricci scalars on branes. A review was carried out on the non-vacuum brane and the vacuum bulk. The effective energy-momentum tensor is designed so that it violates the zero energy condition. The wormhole will be made in such a way that it can be supported by the presence of phantom energy. The results showed that the constructed wormhole was supported by phantom energy. 2-dimensional and 3-dimensional visualizations of the wormhole were obtained.

**Keywords:** *wormhole, braneworld, phantom energy*

## KATA PENGANTAR

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur atas kehadiran **Allah SWT** atas berkah, rahmat dan karunia-Nya, Tuhan Yang Maha Kuasa. Salawat serta salam panjatkan kepada baginda **Rasulullah Nabi Muhammad SAW**, Nabi yang membaea syafaat kepada umat Islam. *Alhamdulillahirabbil Alamin*, penulis telah diberikan Kesehatan dan kesempatan sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul “**Wormhole dalam Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif Dunia Brane Didukung oleh Energi Phantom**” yang merupakan salah satu syarat dalam menyelesaikan studi dan mendapatkan gelar Sarjana Sains di Departemen Fisika Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Dalam penyelesaian skripsi penulis telah mengalami berbagai hambatan dari tahap awal penelitian hingga tahap penyusunan skripsi. Oleh karena itu, penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan karena keterbatasan pengetahuan yang dimiliki oleh penulis. Namun atas kehendak-Nya dan dukungan dari banyak pihak yang sangat berarti sehingga penulis termotivasi dan semangat untuk menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Dengan segala kerendahan hati, penulis mengucapkan banyak terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Orang tua tercinta, Ayahanda **Amrullah** dan Ibunda **Hj. Sadariah** yang selalu mengirimkan doa, memberikan kasih sayang, perhatian, nasehat dan dukungan baik secara moral maupun materi, serta kakak tersayang **Adi Suqardi, Nur Fadhilah, Nur Astri** juga keluarga tercinta (**tante, om dan semua penghuni grup keluarga**) yang selalu memberikan semangat, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini dibuat khusus agar kedua orang tua tetap semangat dan senantiasa diberi Kesehatan dari Allah SWT serta meridhai penulis untuk selalu membanggakan dan membahagiakan beliau.

2. **Bapak Drs. Bansawang BJ, M.Si.** selaku Dosen Pembimbing Utama dan Penasehat Akademik (PA) serta **Bapak Azwar Sutiono, S.Si, M.Si** selaku Dosen Pembimbing Pertama yang telah banyak membimbing dan meluangkan waktu, tenaga, serta pemikirannya untuk penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan baik.
3. **Bapak Prof. Dr-rer-nat. Wira Bahari Nurdin dan Ibu Prof. Dr. Sri Suriani, DEA** selaku Dosen Penguji yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan saran, diskusi dan ilmu untuk memnjadikan skripsi ini lebih baik.
4. **Prof. Dr. Arifin, MT** selaku Ketua Departemen Fisika serta **Bapak dan Ibu Dosen Pengajar Departemen Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**, terima kasih telah senantiasa memberikan ilmu yang bermanfaat dan menjadi bekal yang bermanfaat untuk masa depan.
5. Bapak/Ibu **Staf Pegawai FMIPA UNHAS**, terutama **Staf Departemen Fisika; Pak Syukur, Ibu Evi dan Kakak Rana** yang selalu membantu selama proses administrasi di departemen hingga kampus dan keramahan serta cemilannya.
6. Kakak-kakak **Laboratorium Fisika Teoritik dan Komputasi (Kak Ghazali dan Kak Fauzi)** yang selalu memberikan bantuan selama penelitian dengan berdiskusi.
7. **Nurhikmah Indah**, yang telah menjadi penyemangat.
8. Adik-adik **Himafi 2019 dan Himafi 2020** terima kasih atas dukungan yang diberikan
9. **Seluruh Fisika UH angkatan 2018**, banyak cerita telah dilalui bersama mulai dari maba, kerja laporan sampe nda tidur 3 hari, dikumpul, ditappe, dan semua masa kelamnya sampe now. Semoga kita semua sukses dimasa mendatang dan silaturahmi diantara kita tetap terjalin.
10. **Seluruh Sirkerl Hengamerd**, Aji S.Komp. (Sarjana Kompor-kompore), DununG S.KG. (Sarjana Kesehatan Gigi), Hasbih S.T. (Sangat Tersiksa). Teman seperjuangan pas SMA, mulai dari perwibuan sampai perkuliahan

disikat semua. Semua anggotanya overpower di bidangnya. Telah menjadi teman nongkrong-nongkong, tertawa, bersantai di tengah dunia yang kejam.

11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan semangat, dukungan serta doa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Harapan dari penulis skripsi, hasil penelitian yang telah dilakukan semoga dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca. Memohon maaf atas segala kekurangan yang terdapat dalam skripsi. Semoga ilmu yang diperoleh menjadi berkah, Aamiin.

*Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Makassar, 9 Juli 2022

Muh. Hilal Hamdi Amrullah

## DAFTAR ISI

<b>I. PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
I.1 Latar Belakang .....	3
I.2 Rumusan Masalah .....	3
I.3 Tujuan Penelitian.....	3
<b>II. TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>4</b>
II.1 Formulasi Tetrad/ <i>Vierbein</i> .....	4
II.2 Perkalian Eksterior atau <i>Wedge Product</i> .....	7
II.3 Perumusan Persamaan Medan Gravitasi Einstein.....	8
II.4 Prinsip Aksi Einstein-Hilbert dalam Dunia <i>Brane</i> .....	11
II.5 Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif Dunia <i>Brane</i> .....	13
II.6 Persamaan Struktur Cartan Pertama .....	15
II.7 Persamaan Struktur Cartan Kedua .....	16
II.8 Pengenalan <i>Wormhole</i> .....	18
II.9 Pengenalan Materi Eksotik .....	20
II.10 Metrik Ruang-Waktu dari <i>Wormhole</i> .....	21
II.11 Prinsip Matematis dari Diagram Penyatuan.....	21
<b>III. METODE PENELITIAN .....</b>	<b>23</b>
III.1 Prosedur Penelitian .....	23
III.2 Bagan Alir Penelitian.....	25
<b>IV. HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>26</b>
IV.1 Hasil Penelitian.....	26
IV.2 Pembahasan.....	43
<b>V. KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>	<b>48</b>
V.1 Kesimpulan.....	48
V.2 Saran.....	48
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>49</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>80</b>

# BAB I

## PENDAHULUAN

### I.1 Latar Belakang

Salah satu solusi persamaan medan gravitasi Einstein yang cukup menarik perhatian adalah *wormhole* [1]. *Wormhole* memiliki ciri-ciri yaitu tidak memiliki cakrawala peristiwa (*event horizon*), tidak memiliki singularitas, dan memiliki jembatan yang dapat dilalui. Jembatan tersebut menghubungkan dua alam semesta atau dua wilayah berbeda dalam ruang-waktu yang sama [2]. *Wormhole* dapat menghubungkan dua wilayah di alam semesta yang berada pada jarak yang sangat jauh [3]. Studi tentang *wormhole* memiliki sejarah yang panjang dan berbeda. Solusi persamaan medan gravitasi Einstein pada *wormhole* pertama kali ditemukan oleh Albert Einstein dan Nathan Rosen pada tahun 1935. Solusi yang disajikan oleh Einstein dan Rosen ini menghasilkan *wormhole* yang tidak dapat dilalui dikarenakan masih terdapat suatu singularitas akibat ketidakstabilan jembatan Einstein-Rosen pada modelnya tersebut [4].

Michael S. Morris dan Kip S. Thorne dalam penelitiannya telah menemukan konstruksi matematis mengenai *wormhole* yang dapat dilalui dengan menggunakan metrik statik dan simetri bola untuk *wormhole* [5]. De-Chang Dai, Djordje Minic, dan Dejan Stockovic menunjukkan cara mengkonstruksi *wormhole* dengan memodelkan alam semesta sebagai *brane* 3 + 1 dimensi, tetapi hasil konstruksinya belum menjamin akan menghasilkan *wormhole* yang stabil [3]. Dalam penelitian tersebut, dibuat solusi baru untuk *wormhole* untuk ruang de-Sitter sebagai solusi eksak vakum terbaru dari persamaan medan gravitasi Einstein [3].

Terdapat berbagai model dalam literatur di mana alam semesta dimodelkan sebagai sub-ruang atau *brane* yang memiliki 3 + 1 dimensi yang tertanam pada ruang dimensi 5. Sebuah *brane* (dalam hal ini digunakan *p-brane*) memiliki  $p+1$  dimensi [3]. *Brane* berperilaku seperti materi biasa, dapat mempertahankan fluktuasi kuantum dari awal sejak penciptaannya. Fluktuasi kuantum menyebabkan *brane* melipat, memutar, dan bahkan menyilang. Sebuah ruang yang terlipat berpotensi mendukung jalan pintas antara dua titik yang jauh [3]. Oleh karena itu,

beberapa titik ruang mungkin berjauhan sepanjang *brane* tetapi dapat dikatakan sangat dekat apabila bulk ditinjau. Shiromizu, Maeda, dan Sasaki dalam penelitiannya telah menemukan persamaan medan gravitasi Einstein efektif dunia *brane* yang disederhanakan sehingga serupa dengan persamaan medan gravitasi Einstein pada limit energi rendah [6].

K.A Bronnikov dan Sung-Won Kim dalam penelitiannya, telah melakukan penelitian mengenai solusi persamaan medan gravitasi Einstein pada *brane* yang vakum untuk *wormhole* yang datar, statik, dan simetri bola dengan skalar Ricci yang bernilai nol [7]. Pada penelitian berikutnya, Fransisco S.N. Lobo kemudian melakukan generalisasi untuk *brane* yang tidak vakum dengan materi yang non-eksotik. Digunakan skalar Ricci yang tidak nol dalam penelitiannya ini [8]. Lemos, Lobo, dan Olivera telah meninjau *wormhole* Thorne-Morris dengan konstanta kosmologis yang tidak nol tetapi tidak dilakukan pada persamaan medan gravitasi Einstein yang termodifikasi [9]. Anchordoqui dan Bergliaffa dalam penelitiannya, menunjukkan bahwa model dimensi 5 yang ditunjukkan oleh Model Randall-Sundrum adalah setengah dari *wormhole* [10]. M. La Camera juga menemukan solusi *wormhole* pada model sederhana dari Model Randall-Sundrum [11].

Komposisi penting dari suatu *wormhole* adalah pelanggaran dari kondisi energi nol (*Null Energy Condition*) [8]. Agar konstruksi *wormhole* tetap stabil maka dibutuhkan kondisi seperti ini. Persamaan medan gravitasi Einstein dapat menjadi solusi untuk geometri *wormhole* apabila tensor energi-momentum melanggar kondisi energi nol. Terdapat suatu materi yang dapat melanggar kondisi energi nol ini. Materi ini disebut sebagai materi eksotik dikarenakan tekanan radial yang bernilai negatif.

Tentunya, terdapat banyak versi dari materi eksotik tersebut yang melanggar kondisi energi nol dan mendukung eksistensi *wormhole* [5,7]. Salah satu kandidat yang mungkin adalah *phantom energy* sebagai materi eksotik [8]. Terdapat penelitian terkait yang mengasumsikan bahwa *phantom energy* diasumsikan memiliki rapat energi positif tetapi tekanan memiliki tekanan radial yang negatif. Studi mengenai distribusi *phantom energy* pada *wormhole* telah dilakukan oleh Sushkov dengan melakukan pemilihan spesifik terhadap rapat energi [12].

Francisco S.N. Lobo telah melakukan studi mengenai *wormhole* yang didukung oleh *phantom energy* pada persamaan medan gravitasi Einstein yang tidak termodifikasi [13].

Oleh karena itu, berdasarkan penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dikonstruksi suatu *wormhole* pada *brane* dengan menggunakan metrik statik dan simetri bola untuk *wormhole* seperti yang diajukan oleh Morris dan Thorne dengan skalar Ricci pada *brane* yang tidak nol. Akan ditinjau *brane* yang tidak vakum dan *bulk* yang vakum. Tensor energi-momentum efektif akan dirancang agar melanggar kondisi energi nol. Akan digunakan juga persamaan keadaan dari *phantom energy* untuk memperoleh solusi dari persamaan medan gravitasi Einstein efektif itu sendiri dimana properti efektifnya pada *brane*  $\omega_{eff} < -1$ . *Wormhole* akan dibuat sedemikian rupa sehingga dapat didukung oleh kehadiran *phantom energy*.

## I.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana solusi persamaan medan gravitasi Einstein efektif pada dunia *brane* untuk *wormhole* didukung oleh *phantom energy*?
2. Bagaimana perumusan kerapatan energi, tekanan radial, dan tekanan transversal efektif dari *phantom energy* pada *phantom energy wormhole* dunia *brane*?
3. Bagaimana tensor energi-momentum efektif melanggar kondisi energi nol?

## I.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Menemukan solusi persamaan medan gravitasi Einstein efektif pada dunia *brane* untuk *wormhole* yang didukung oleh *phantom energy*.
2. Merumuskan rapat energi, tekanan radial, dan tekanan transversal efektif dari *phantom energy* pada *phantom energy wormhole* dunia *brane*.
3. Melakukan analisa terhadap tensor energi-momentum agar melanggar kondisi energi nol.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### II.1 Formulasi Tetrad/*Vierbein*

Tetrad memiliki peran penting dalam penelusuran solusi persamaan medan gravitasi Einstein menggunakan konsep diferensial geometri. Konsep diferensial geometri memberikan kemudahan dalam penelusuran solusi persamaan medan gravitasi Einstein untuk *wormhole*. Keterkaitan antara tetrad dan *wormhole* dalam persamaan medan gravitasi Einstein adalah tetrad digunakan untuk menemukan tensor kelengkungan yang digunakan untuk mencari solusi persamaan medan gravitasi Einstein untuk *wormhole*.

Manifold ruang-waktu disimbolkan sebagai  $\mathcal{M}$ . Kemudian, suatu kegiatan pengukuran akan dilakukan disekitar posisi pengamat dimana  $P \in \mathcal{M}$ .  $P$  merupakan titik yang ditinjau sebagai posisi pengamat yang merupakan elemen dari manifold  $\mathcal{M}$ . Kemudian, diberikan lagi titik disekitar  $P$  yaitu  $I$  dimana  $I \in \mathcal{M}$ . Untuk suatu tujuan praktis dalam kosmologi,  $I$  dapat dipertimbangkan sebagai elemen luasan yang kecil (*infinitesimal extent*). Elemen luasan yang kecil ini cukup untuk memberikan akses terhadap ruang singgung (*tangent space*) yang disimbolkan  $T_P\mathcal{M}$ . Apa yang akan diukur adalah komponen dari suatu tensor di titik  $P$  ini. Untuk basis dari ruang singgung ini, agar sesuai dengan kerangka tempat pengamat melakukan pengukuran pada  $P$ , kerangka tersebut harus ortonormal terhadap suatu tensor metrik  $g$  di  $P$ . Basis ini kemudian disebut sebagai “kerangka pengamat (*observer frame*)” [14].

Sebuah himpunan dari vektor-4  $e_{\hat{a}}$  yang merupakan elemen dari ruang singgung (*tangent space*)  $e_{\hat{a}} \in T_P\mathcal{M}$ ,  $\hat{a} = (\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$  dan memenuhi kondisi ortonormalitas yakni [14,15]

$$g(e_{\hat{a}}, e_{\hat{b}}) \equiv g_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} \quad (2.1)$$

Suatu basis  $e_{\hat{a}}$  disebut sebagai “tetrad” atau “*vierbein*”. Tetrad disebut juga sebagai kerangka medan (*field frame*) [16]. Ketika dilakukan interpretasi sebagai kerangka

pengamat. Elemen rupa-waktu (*time like*) yang berupa  $e_{\hat{0}}$  merepresentasikan kecepatan-4 (*4-velocity*) dari pengamat, sedangkan elemen rupa ruang yaitu  $\{e_i\}_{i=1}^3$  memberikan informasi berupa basis kartesian dari kerangka rehat (*rest frame*) pengamat. Tetrad tidak bergantung terhadap koordinat apa yang digunakan dan  $e_{\hat{a}}$  invarian terhadap transformasi Lorentz dimana

$$e_{\hat{a}} \rightarrow \Lambda_{\hat{a}}{}^b e_b \quad (2.2)$$

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \dots$  itu merupakan indeks tetrad

Tetrad diasosiasikan sebagai suatu himpunan dari koordinat lokal  $x^\mu$  yang hanya valid pada daerah disekitar acuan dimana  $x^\mu = \{t, x, y, z\}$  disekitar  $P$ . Dapat di definisikan vektor tetrad atau vektor ortonormal dimana

$$e_{\hat{a}} \equiv e_{\hat{a}}{}^\mu \partial_\mu, \quad \partial_\mu \equiv e_\mu \quad (2.3)$$

$e_{\hat{a}}{}^\mu$  disebut sebagai tetapan transformasi. Persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$g(e_{\hat{a}}{}^\mu \partial_\mu, e_{\hat{a}}{}^\nu \partial_\nu) = g_{\mu\nu} e_{\hat{a}}{}^\mu e_{\hat{b}}{}^\nu = g_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} \quad (2.4)$$

Pindahkan  $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$  dan  $e_{\hat{a}}{}^\mu$  akan diperoleh [15]

$$e^{\hat{a}}{}_\mu = \eta^{\hat{a}\hat{b}} g_{\mu\nu} e_{\hat{b}}{}^\nu \quad (2.5)$$

dan untuk  $e^{\hat{a}}{}_\mu dx^\mu$  merupakan elemen dari ruang *co-tangent* (ruang singgung kovarian) dimana  $e^{\hat{a}}{}_\mu dx^\mu \in T_p^* \mathcal{M}$  dengan  $dx^\mu$  merupakan *co-basis*.  $dx^\mu$  membentuk interval koordinat lokal yang diberikan sebagai

$$dx = e_{\hat{\mu}} dx^\mu \quad (2.6)$$

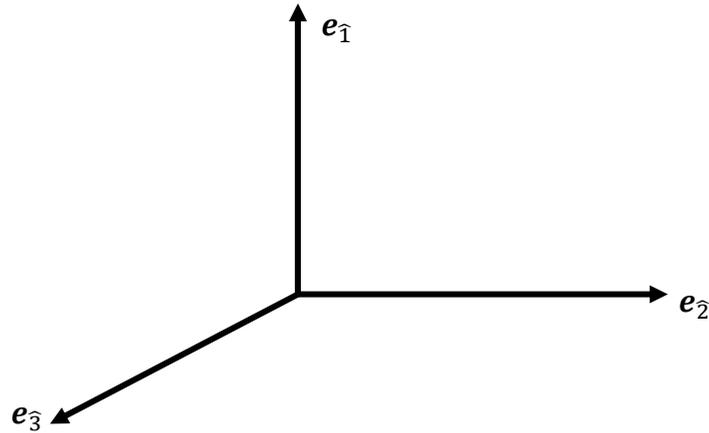
Dimana  $\hat{\mu}$  merupakan indeks tetrad dan  $\mu$  merupakan indeks ruang-waktu. Kemudian ditambahkan lagi satu interval koordinat lokal yang diberikan sebagai

$$dx = e_{\hat{\nu}} dx^\nu \quad (2.7)$$

bersama-sama, persamaan tersebut membentuk elemen garis  $ds^2$  dimana

$$ds^2 = dx \cdot dx = (e_{\hat{\mu}} \cdot e_{\hat{\nu}}) dx^\mu dx^\nu \quad (2.8)$$

Karena elemen rupa ruang  $\{e_i\}_{i=1}^3$  menyediakan/memberikan informasi berupa basis kartesian dari kerangka rehat maka, dibuat sumbu 3 dimensi dari elemen ini dan digambarkan sebagai berikut



**Gambar 2.1** Sumbu 3 dimensi yang dibentuk oleh vektor tetrad

sumbu 3 dimensi ini membentuk kerangka acuan inersia lokal yang maksudnya adalah perkalian dot antara vektor tetrad ini membentuk metrik Minkowski

$$\mathbf{e}_{\hat{\mu}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dimasukkan ke persamaan (2.8), diperoleh [15]

$$ds^2 = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} dx^{\hat{\mu}} dx^{\hat{\nu}} \quad (2.10)$$

Sekarang akan dilihat apa yang terjadi jika tidak digunakan vektor tetrad  $\mathbf{e}_{\hat{\mu}}$  pada  $P$ . Pada kasus tersebut, basis yang tersedia pada  $T_P\mathcal{M}$  adalah  $\partial_{\mu}$ . Secara umum, basis  $\partial_{\mu}$  tidak akan ortonormal pada  $P$  sehingga [14]

$$g(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) \equiv g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Sebagai sebuah contoh sederhana, dicari tetapan transformasi dari suatu persamaan metrik sebagai berikut

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.12)$$

persamaan (2.3) dinyatakan sebagai

$$\mathbf{e}_{\hat{a}} = \mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu} g_{\mu} \quad , \quad \partial_{\mu} \equiv g_{\mu} \quad (2.13)$$

Kemudian  $g_{\mu}$  dinyatakan sebagai

$$g_{\mu} = \mathbf{e}_{\hat{a}}^{\hat{\mu}} \mathbf{e}_{\hat{\mu}} \quad (2.14)$$

dengan cara yang sama, dapat diperoleh  $g_{\nu}$

$$g_{\nu} = \mathbf{e}_{\hat{b}}^{\hat{\nu}} \mathbf{e}_{\hat{\nu}} \quad (2.15)$$

kemudian akan dicari  $g_{\mu\nu}$  dimana

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu} \cdot g_{\nu} = (\mathbf{e}_{\hat{a}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{b}})(\mathbf{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} \mathbf{e}_{\hat{\nu}}^{\hat{b}}) \quad (2.16)$$

karena  $\mathbf{e}_{\hat{a}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}$  sehingga

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} \mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu} \mathbf{e}_{\hat{b}}^{\nu} \quad (2.17)$$

suatu tetapan transformasi  $\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu}$  ditentukan dengan mengambil bentuk akar kuadrat dari masing-masing komponen metrik tersebut sehingga

$$\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu} = \text{diag}(1 \quad 1 \quad r \quad r \sin \theta) \quad (2.18)$$

dengan cara yang serupa akan diperoleh

$$\mathbf{e}_{\hat{b}}^{\nu} = \text{diag}(1 \quad 1 \quad r \quad r \sin \theta) \quad (2.19)$$

Karena  $\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu} = (\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu})^{-1}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{b}}^{\nu} = (\mathbf{e}_{\hat{b}}^{\nu})^{-1}$  maka

$$\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu} = \text{diag}\left(1 \quad 1 \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r \sin \theta}\right) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{b}}^{\nu} = \text{diag}\left(1 \quad 1 \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r \sin \theta}\right) \quad (2.21)$$

dengan begitu, dapat diperoleh  $\mathbf{e}_{\hat{a}}^{\mu}$  sebagai tetapan transformasinya [15].

## II.2 Perkalian Eksterior atau *Wedge Product*

Dikenal suatu variabel/objek yang memiliki indeks atas dan indeks bawah sebagai tensor. Suatu tensor dengan  $n$  indeks atas dan  $m$  indeks bawah disebut sebagai tensor dengan *rank*  $(n, m)$ . Sebagai contoh, tensor dengan *rank*  $(0, 0)$  disebut sebagai skalar, tensor dengan *rank*  $(1, 0)$  disebut sebagai vektor, dan tensor dengan *rank*  $(0, 1)$  disebut sebagai kovarian vektor atau basis. Didefinisikan suatu  $p$ -form sebagai suatu tensor dengan *rank*  $(0, p)$  dinotasikan sebagai  $\alpha$  dengan komponen  $\alpha_{i_1 \dots i_p}$  dengan basis  $\mathbf{e}^i$ . Didefinisikan lagi suatu  $q$ -form sebagai suatu tensor dengan *rank*  $(0, q)$  dinotasikan sebagai  $\beta$  dengan komponen  $\beta_{j_1 \dots j_q}$  dengan basis  $\mathbf{e}^j$  [16]

Perkalian antara bentuk  $p$ -form dengan  $q$ -form tidak dapat diselesaikan secara langsung dikarenakan sifat antisimetrinya sehingga, digunakan suatu *wedge product* atau *Cartan product* yang didefinisikan sebagai [16]

$$\alpha \wedge \beta \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!} (\alpha \otimes \beta)_a \quad (2.22)$$

$\alpha$  menandakan bahwa perkalian antara  $p$ -form dengan  $q$ -form bersifat antisimetris. Apabila,  $e^i$  adalah basis dari ruang kotangen maka, basis alami dari suatu  $p$ -form adalah  $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \dots \wedge e^{i_p}$  dengan  $i_1 < i_2 \dots < i_p$ . Oleh karena itu, suatu  $p$ -form dapat dikomposisi sebagai [16]

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \dots \wedge e^{i_p} \quad (2.23)$$

Sebagai contoh, suatu 1-form  $e^i$  dan  $e^j$  akan dilakukan perkalian maka,

$$e^i \wedge e^j = 2(e^i \otimes e^j) = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i \quad (2.24)$$

Dengan menuliskan persamaan (2.22) sebagai

$$e^i \wedge e^j = -(e^j \otimes e^i - e^i \otimes e^j) \quad (2.25)$$

Dapat diperoleh identitas dari *wedge product* sebagai berikut

$$e^i \wedge e^j = -(e^j \otimes e^i - e^i \otimes e^j) = -e^j \wedge e^i \quad (2.26)$$

Apabila  $i = j$  diperoleh

$$e^i \wedge e^i = e^i \otimes e^i - e^i \otimes e^i = 0 \quad (2.27)$$

### II.3 Perumusan Persamaan Medan Gravitasi Einstein

Perumusan persamaan medan gravitasi Einstein pada bab ini diperoleh melalui prinsip aksi sesuai dengan yang digagas oleh David Hilbert pada tahun 1915. Melalui prinsip aksi, akan diperoleh hubungan matematis dari suatu tensor energi-momentum yang berada pada ruas kanan persamaan medan gravitasi Einstein dengan Lagrangian materi [17]. Besaran aksi merupakan integral dari Lagrangian sistem terhadap waktu sesuai dengan konsep mekanika klasik pada suatu benda titik, yang dinyatakan sebagai berikut

$$S = \int L dt \quad (2.28)$$

Dalam teori medan klasik (*classic field theory*) yang merupakan perluasan dari mekanika benda titik, apabila diambil banyak titik-titik menjadi tak berhingga sehingga variabel yang digunakan adalah variabel kontinu dalam ruang-waktu, yang kemudian dinyatakan sebagai rapat Lagrangian  $\mathcal{L}$  [18]. Rapat Lagrangian diberikan sebagai  $\mathcal{L} = dL/dV$ , sehingga persamaan (2.28) menjadi

$$S = \int \mathcal{L} dV dt = \int d^4x (\mathcal{L}\sqrt{-g}) \quad (2.29)$$

dimana  $\sqrt{-g}$  merupakan Jacobian untuk ruang-waktu setelah dilakukan penggabungan komponen ruang  $dV = |J|d^3x$  dan komponen waktu ( $dt$ ). Rapat lagrangian dalam aksi Einstein-Hilbert diberikan sebagai

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \quad (2.30)$$

Sehingga persamaan (2.29) menjadi

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \right) \quad (2.31)$$

Berdasarkan prinsip aksi terkecil, variasi dari aksi bernilai nol dimana  $\delta S = 0$  sehingga persamaan (2.29) menjadi

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int \delta \left[ \left( \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) - \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pertama-tama, akan ditinjau suku pertama dari persamaan (2.32)

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \left( \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right) + \int d^4x \left( R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Integral dari suku pertama pada persamaan (2.33) akan lenyap karena berubah menjadi integral permukaan dimana variasinya adalah nol [18], sehingga tersisa suku kedua yang apabila diuraikan menjadi

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) = \int d^4x \left( \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \right) + \int d^4x g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) \quad (2.34)$$

$\delta(\sqrt{-g})$  memenuhi hubungan matematis dimana

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.35)$$

Masukkan persamaan (2.35) ke persamaan (2.34) sehingga

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) = \int d^4x \left( \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \right) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\mathcal{R}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.36)$$

kemudian dilakukan penyederhanaan sehingga

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

dimana  $G_{\mu\nu}$  adalah bentuk dari tensor Einstein dimana  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$

Selanjutnya, akan dilakukan peninjauan terhadap rapat Lagrangian materi  $\mathcal{L}_M$  pada integrasi suku kedua pada persamaan (2.32). Mengingat bahwa Lagrangian merupakan fungsi dari posisi dan turunan pertamanya sehingga dapat dituliskan  $\mathcal{L}_M \equiv \mathcal{L}_M(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{,\alpha})$  [17,18]. Variasi suku kedua pada persamaan (2.32) dapat dituliskan menjadi

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

dengan mengingat

$$\partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right] = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu} + \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

maka persamaan (2.39) menjadi

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

dengan mengacu pada prinsip Hamilton untuk variasi, maka suku terakhir persamaan (2.41) menjadi integral luasan Gauss sehingga

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) = \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

dengan memasukkan persamaan (2.38) dan (2.40) ke persamaan (2.32) maka

$$\int \left\{ G_{\mu\nu} - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (2.41)$$

dari persamaan tersebut dapat diperoleh

$$G_{\mu\nu} - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right] = 0 \quad (2.42)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right] \quad (2.43)$$

Persamaan (2.43) dapat dituliskan sebagai

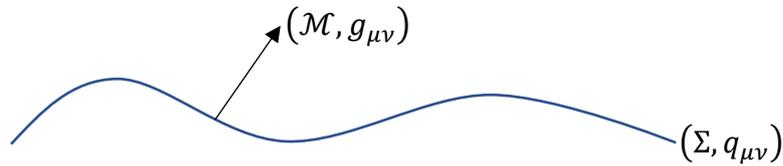
$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.44)$$

dimana  $\kappa = 8\pi G/c^4$  dan  $T_{\mu\nu}$  merupakan tensor energi momentum

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right] \right] \quad (2.45)$$

## II.4 Prinsip Aksi Einstein-Hilbert dalam Dunia Brane

Persamaan Einstein dalam dunia *brane* telah diturunkan oleh Kanno dan Soda melalui aksi Einstein-Hilbert dalam penelitiannya tetapi hanya terbatas pada limit energi rendah [19]. Ruang-waktu 4D dalam skenario dunia *brane* digambarkan sebagai dinding domain *3-brane* ( $\Sigma, q_{\mu\nu}$ ) yang terkungkung dalam ruang-waktu 5D ( $\mathcal{M}, g_{\mu\nu}$ ) yang disebut *bulk* dan  $q$  dikenal sebagai metrik induksi pada sebuah brane dengan indeks  $\mu$  dan  $\nu$  berjalan dari 0 sampai 3 ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). Sedangkan dalam ruang-waktu 5D, tensor metrik diberikan oleh  $g_{\mu\nu}$ , dimana indeks  $\mu$  dan  $\nu$  pada kasus ini berjalan dari 0, 1, 2, 3, 5. Gambaran dari skenario dunia brane ditunjukkan pada Gambar 2.1 berikut [18].



**Gambar 2.1** Skenario dunia brane dalam ruang-waktu 5D

dalam hal ini,  $n_A$  merupakan vektor satuan normal pada sebuah permukaan hiper  $\Sigma$ . Prinsip aksi Einstein-Hilbert dalam dunia *brane* diberikan sebagai [18]

$$S = S_{Brane} + S_{Bulk} \quad (2.46)$$

dimana

$$S_{Brane} = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} \left( {}^{(4)}R - 2\Lambda_4 \right) - \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^4 \quad (2.47)$$

$$S_{Bulk} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) - \int_{\Sigma} d^5x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m^5 \quad (2.48)$$

dengan  $\kappa_4^2 = 8\pi G_4$  merupakan konstanta kopling gravitasi pada brane 4D, sedangkan  $\kappa_5^2$  adalah konstanta kopling gravitasi pada *bulk*.  $\Lambda_4$  dan  $\mathcal{L}_m^4$  masing-masing adalah konstanta kosmologi dan lagrangian materi pada brane, sedangkan  $\Lambda_5$  dan  $\mathcal{L}_m^5$  masing-masing adalah konstanta kosmologi dan lagrangian materi dalam *bulk*. Dengan menghitung variasi aksi Einstein-Hilbert dalam dunia brane, dimana  $\delta S = \delta S_{Brane} + \delta S_{Bulk}$ , maka dapat diperoleh persamaan medan Einstein dalam skenario dunia *brane*. Berdasarkan prinsip aksi Hamilton, variasi dari suatu aksi haruslah sama dengan nol. Jadi variasi aksi pada brane dari persamaan (2.46) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \delta S_{Brane} = 0 &= \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \delta \left[ \sqrt{-q} \left( {}^{(4)}R - 2\Lambda_4 \right) \right] \\ &\quad - \int_{\Sigma} d^4x \delta \left[ \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^4 \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{\Sigma} d^4x \delta \left[ \sqrt{-q} \left( {}^{(4)}R - 2\Lambda_4 \right) \right] + \delta S_M^{(4)} \quad (2.49)$$

dimana

$$\delta S_M^{(4)} = - \int_{\Sigma} d^4x \delta \left[ \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^4 \right] \quad (2.50)$$

diperoleh persamaan medan Einstein lokal brane 4D yang diberikan sebagai

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda q_{\mu\nu} + k^2 T_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

dengan

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} \equiv {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} {}^{(4)}R \quad (2.52)$$

merupakan tensor Einstein pada *brane*. Penurunan persamaan (2.51) akan diuraikan secara lengkap pada bagian lampiran A. Diperoleh pula relasi antara tensor energi-

momentum terlokalisasi pada brane,  $T_{\mu\nu}$  dengan lagrangian medan materi pada *brane* melalui aksi medan materi yang diberikan sebagai

$$\delta S_M^4 = - \int_{\Sigma} d^4x \delta \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(4)} = - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-q} T_{\mu\nu} \delta q^{\mu\nu} \quad (2.53)$$

maka  $T_{\mu\nu}$  dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih kompak menjadi:

$$T_{\mu\nu} \equiv - \frac{2\delta \mathcal{L}_m^{(4)}}{\delta q^{\mu\nu}} + q_{\mu\nu} \mathcal{L}_m^{(4)} \quad (2.54)$$

Selanjutnya ditinjau variasi aksi dalam bulk pada persamaan (2.48) yang diberikan sebagai

$$\delta S_{Bulk} = 0 = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\Sigma} d^5x \delta \left[ \sqrt{-q} \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) \right] - \int_{\Sigma} d^5x \delta \left[ \sqrt{-q} \mathcal{L}_m^{(5)} \right] \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\Sigma} d^5x \delta \left[ \sqrt{-q} \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) \right] + \delta S_M^{(5)} \quad (2.56)$$

Berdasarkan variasi aksi, maka diperoleh persamaan medan Einstein dalam bulk 5D yang diberikan sebagai

$${}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} q_{\rho\sigma} {}^{(5)}R = -\Lambda_5 g_{\rho\sigma} + k_5^2 \tau_{\rho\sigma}^{(5)} \quad (2.57)$$

dimana  ${}^{(5)}G_{\rho\sigma} \equiv {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} q_{\rho\sigma} {}^{(5)}R$  merupakan tensor Einstein dalam bulk. Penurunan persamaan (2.57) dituliskan secara rinci pada bagian lampiran A.  $\tau_{\rho\sigma}^{(5)}$  merupakan tensor energi-momentum dari medan materi dalam bulk yang relasinya dengan lagrangian medan materi dalam bulk diberikan dalam bentuk kompak sebagai berikut

$$\tau_{\rho\sigma}^{(5)} \equiv - \frac{2\delta \mathcal{L}_m^{(5)}}{\delta q^{\mu\nu}} + q_{\mu\nu} \mathcal{L}_m^{(5)} \quad (2.58)$$

Persamaan (3.10) dan (3.14) masing-masing merupakan tensor energi-momentum “efektif” dari medan materi yang terlokalisasi pada brane dan tensor energi-momentum dari medan materi dalam bulk [18].

## II.5 Persamaan Medan Gravitasi Einstein Efektif Dunia *Brane*

Kata efektif memberikan arti bahwa pada ruas kanan persamaan medan gravitasi Einstein terdapat medan materi lokal, medan elektromagnetik, suku koreksi energi tinggi, dan medan materi non-lokal yang tergabung menjadi satu. Persamaan medan gravitasi Einstein efektif dengan kontribusi suku koreksi energi tinggi diberikan sebagai berikut [18,19]

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda q_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{6\kappa^2}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \kappa_5^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \quad (2.59)$$

$\Lambda$  merupakan konstanta kosmologi pada brane,  $\kappa^2$  dan  $\kappa_5^2$  dinyatakan sebagai

$$\Lambda \equiv \frac{1}{2} (\Lambda_5 + \kappa^2 \lambda) , \quad \kappa^2 = \frac{\lambda \kappa_5^4}{6} \quad (2.60)$$

$\kappa^2$  dan  $\kappa_5^2$  juga disebut sebagai konstanta kopling gravitasi.  $G_{\mu\nu}$  merupakan tensor Einstein pada *brane* dan  $q_{\mu\nu}$  merupakan metrik induksi pada *brane*. Pada persamaan (2.59), terdapat  $\Pi_{\mu\nu}$  yang merupakan suku kuadratik tensor energi momentum dimana [8]

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu + \frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \left( T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} T^2 \right) \quad (2.61)$$

Suku kuadratik dari sumber yang menjadi relevan pada energi tinggi yang ditunjukkan oleh persamaan (2.61) ini muncul akibat kelengkungan ekstrinsik yang diproyeksikan pada tensor Einstein dengan  $T_{\mu\nu}$  merupakan tensor stress-energi atau tensor energi-momentum, sedangkan suku  $E_{\mu\nu}$  adalah koreksi kedua yang merupakan proyeksi tensor Weyl dimana [18]

$$E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha n_\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma \quad (2.62)$$

dimana  ${}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha$  merupakan tensor kelengkungan Weyl 5D. Suku koreksi terakhir adalah suku medan materi non-lokal  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  yang menggeneralisasi persamaan medan Einstein efektif diberikan sebagai [18,19]

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \tau_{AB}^{(5)} q_\mu^A q_\nu^B + q_{\mu\nu} \left( \tau_{AB}^{(5)} n^A n^B - \frac{1}{4} \tau^{(5)} \right) \quad (2.63)$$

Pada skenario dunia *brane*, diasumsikan bahwa hanya ada medan gravitasi tanpa ada medan materi dalam di dalam *bulk* maka, suku medan materi non-lokal lenyap dimana  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$  sehingga persamaan (2.59) menjadi [8,18]

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda q_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{6\kappa^2}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (2.64)$$

Jika  $\Lambda = 0$  maka persamaan (2.64) menjadi

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{6\kappa^2}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (2.65)$$

Dengan mengambil  $\kappa^2 = 8\pi$  dimana digunakan satuan alami  $\hbar = c = G = 1$  maka persamaan (2.65) menjadi [8]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - \frac{E_{\mu\nu}}{8\pi} \right) \quad (2.66)$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{eff} \quad (2.67)$$

dimana

$$T_{\mu\nu}^{eff} \equiv T_{\mu\nu} + \frac{6}{\lambda} \Pi_{\mu\nu} - \frac{E_{\mu\nu}}{8\pi} \quad (2.68)$$

## II.6 Persamaan Struktur Cartan Pertama

Pada bagian ini akan dibahas mengenai persamaan struktur Cartan pertama. Persamaan struktur Cartan terdiri atas persamaan struktur Cartan pertama dan persamaan struktur Cartan kedua. Persamaan struktur Cartan digunakan untuk mencari tensor kelengkungan. Penggunaan persamaan struktur Cartan dalam mencari tensor kelengkungan relatif lebih mudah dilakukan.

Suatu basis  $\mathbf{e}_i$  merupakan basis dari ruang singgung dan  $\mathbf{e}^j$  merupakan dual basis terasosiasi. Diperkenalkan suatu manifold  $\mathcal{M}$  dengan suatu koneksi affine  $D$  didefinisikan sebagai

$$D_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j = \gamma_{kj}^i \mathbf{e}_i \quad (2.69)$$

dengan  $\gamma_{kj}^i$  merupakan koefisien rotasi Ricci. Apabila  $\mathbf{e}_i$  merupakan basis alami dimana  $\mathbf{e}_i = \partial_i$  maka,  $\gamma_{kj}^i$  berubah menjadi simbol Christoffel  $\Gamma_{kj}^i$  [16].  $\gamma_{kj}^i$  diperlakukan sebagai hasil dari aksi suatu 1-form  $\omega_j^i$  yang disebut sebagai bentuk koneksi terhadap suatu basis ortonormal  $\mathbf{e}_k$  sehingga

$$\gamma_{kj}^i = \omega_j^i(\mathbf{e}_k) \Leftrightarrow \omega_j^i = \gamma_{kj}^i \mathbf{e}^k \quad (2.70)$$

Suatu torsi yang bekerja terhadap suatu vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{w}$  sehingga dituliskan sebagai  $T^\nabla(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  didefinisikan sebagai

$$T^\nabla(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{w}] \quad (2.71)$$

dimana  $[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$  merupakan notasi kurung Lie (*Lie Bracket*) dimana

$$[\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \circ \mathbf{w} - \mathbf{w} \circ \mathbf{u} \quad (2.72)$$

Berdasarkan (2.69) dan hubungan (2.70) dengan (2.71) diperoleh

$$\begin{aligned} T^D(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) &\equiv D_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j - D_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_k - [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] \\ &= \omega_j^i(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_i - \omega_k^i(\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i + \{d\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\}\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2.73)$$

Suku terakhir persamaan (2.73) memenuhi sifat

$$-[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \{d\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\}\mathbf{e}_i \quad (2.74)$$

Skalar  $\omega_j^i(\mathbf{e}_k)$  dapat dipandang sebagai 2-form dimana  $(\omega_h^i \otimes \mathbf{e}^h)$  bekerja pada suatu pasangan vektor basis  $(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  sehingga skalar tersebut dituliskan sebagai  $\omega_j^i(\mathbf{e}_k) = (\omega_h^i \otimes \mathbf{e}^h)(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ . Demikian pula dengan  $\omega_k^i(\mathbf{e}_j)$ ,  $\omega_k^i(\mathbf{e}_j)$  dituliskan sebagai  $\omega_k^i(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}^h \otimes \omega_h^i)(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  [16]. Maka dari itu,  $T^D(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  dapat dituliskan ulang sebagai

$$T^D(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \{(\omega_h^i \wedge \mathbf{e}^h + d\mathbf{e}^i)(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\}\mathbf{e}_i \quad (2.75)$$

Apabila  $T^D(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$  maka, persamaan (2.75) dinyatakan bebas torsi (*torsion free*) sehingga, persamaan (2.75) menjadi

$$d\mathbf{e}^i + \omega_h^i \wedge \mathbf{e}^h = 0 \quad (2.76)$$

Persamaan (2.76) dikenal sebagai persamaan struktur Cartan pertama [16].

## II.7 Persamaan Struktur Cartan Kedua

Suatu tensor kelengkungan Riemann-Christoffel  $R^D$  dari turunan kovarian  $D$  yang bekerja pada suatu triplet vektor basis  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  dinyatakan sebagai

$$R_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j}^D \mathbf{e}_k \equiv D_{\mathbf{e}_i}D_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_k - D_{\mathbf{e}_j}D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_k - D_{[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]}\mathbf{e}_k \quad (2.77)$$

Notasi kurung Lie untuk suatu vektor basis adalah nol  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = 0$ , maka

$$R_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j}^D \mathbf{e}_k \equiv D_{\mathbf{e}_i}D_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_k - D_{\mathbf{e}_j}D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_k \quad (2.78)$$

Dengan menggunakan kalkulasi yang sama untuk memperoleh persamaan (2.75) maka, persamaan (2.78) menjadi

$$R_{e_i, e_j}^D \mathbf{e}_k = \{(d\omega_k^m + \omega_l^m \wedge \omega_k^l)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\} \mathbf{e}_m \quad (2.79)$$

dari persamaan (2.79) dapat diperoleh

$$\Omega_k^m = d\omega_k^m + \omega_l^m \wedge \omega_k^l \quad (2.80)$$

Persamaan (2.80) dikenal sebagai persamaan struktur Cartan kedua. Apabila  $\mathbf{e}_i$  dan  $\mathbf{e}_j$  merupakan basis natural dengan  $\mathbf{e}_i \equiv \partial_i$  dan  $\mathbf{e}_j \equiv \partial_j$  maka  $\omega_k^m = \Gamma_{jk}^m dx^j$  dengan  $\mathbf{e}^j = dx^j$  [16]. Dari hubungan tersebut, persamaan (2.80) menjadi

$$\Omega_k^m = d(\Gamma_{jk}^m dx^j) + \omega_l^m \wedge \omega_k^l \quad (2.81)$$

dilakukan penguraian pada  $d(\Gamma_{jk}^m dx^j)$  sehingga diperoleh

$$\Omega_k^m = \partial_i \Gamma_{jk}^m dx^i \wedge dx^j + \omega_l^m \wedge \omega_k^l \quad (2.82)$$

Pada  $dx^i \wedge dx^j$  berlaku  $dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$  maka persamaan (2.82) menjadi

$$\Omega_k^m = (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) dx^i \otimes dx^j + \omega_l^m \wedge \omega_k^l \quad (2.83)$$

Pada suku kedua persamaan (2.83) berlaku aturan pada perkalian eksterior sehingga

$$\Omega_k^m = (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) dx^i \otimes dx^j + (\omega_l^m \otimes \omega_k^l - \omega_k^l \otimes \omega_l^m) \quad (2.84)$$

Berdasarkan  $\omega_k^m = \Gamma_{jk}^m dx^j$  maka persamaan (2.84) menjadi

$$\begin{aligned} \Omega_k^m &= (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) dx^i \otimes dx^j \\ &+ (\Gamma_{il}^m dx^i \otimes \Gamma_{jk}^l dx^j - \Gamma_{jk}^l dx^j \otimes \Gamma_{il}^m dx^i) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Apabila pada persamaan (2.85) dilakukan kontraksi maka,

$$\begin{aligned} \Omega_k^m &= (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) dx^i \otimes dx^j \\ &+ (\Gamma_{il}^m dx^i \otimes \Gamma_{jk}^l dx^j - \Gamma_{ik}^l dx^i \otimes \Gamma_{jl}^m dx^j) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Persamaan (2.86) dapat dituliskan menjadi

$$\Omega_k^m = R_{kij}^m dx^i \otimes dx^j \quad (2.87)$$

dimana  $R_{kij}^m = \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{il}^m \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m$

Dari persamaan (2.22) dapat diperoleh

$$dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2} (dx^i \wedge dx^j) \quad (2.88)$$

Dengan memasukkan persamaan (2.85) ke persamaan (2.88) dengan  $dx^i \equiv \mathbf{e}^i$  dan  $dx^j \equiv \mathbf{e}^j$  maka,

$$\Omega_k^m = \frac{1}{2} R_{kij}^m \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \quad (2.89)$$

Dengan demikian, persamaan (2.80) dapat dituliskan sebagai

$$\Omega_k^m = d\omega_k^m + \omega_l^m \wedge \omega_k^l = \frac{1}{2} R_{kij}^m \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \quad (2.90)$$

## II.8 Pengenalan *Wormhole*

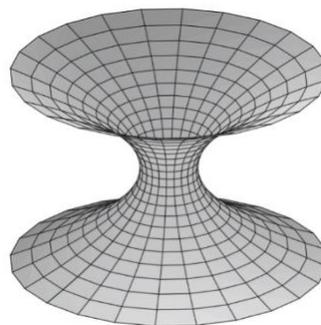
Gagasan tentang *wormhole* berasal dari teori relativitas umum yang digagas oleh Albert Einstein. Gagasan tentang *wormhole* bermula dari seorang fisikawan yang bernama Karl Schwarzschild yang memprediksikan eksistensi lubang hitam (*black hole*) melalui persamaan medan gravitasi Einstein. Model *black hole* yang diprediksikan oleh Karl Schwarzschild memiliki singularitas. Singularitas adalah suatu titik dengan kerapatan massa tak terhingga yang berada di dalam suatu *black hole* [20]. Pada suatu singularitas, semua hukum fisika akan menjadi tak berarti. Hal tersebut sangat mengganggu Einstein. Albert Einstein tidak menyukai gagasan mengenai *black hole* tersebut dan semakin menggangukannya dikarenakan singularitas tersembunyi dari dunia luar oleh suatu cakrawala peristiwa (*event horizon*). Akhirnya, pada tahun 1935, Albert Einstein dan kolaboratornya bernama Nathan Rosen menggunakan trik matematik yang disebut transformasi koordinat untuk menghasilkan *black hole* Schwarzschild tanpa singularitas [20].

Hal yang mengejutkan terjadi, ternyata mereka menemukan bahwa singularitas tersebut berubah menjadi suatu jembatan yang menghubungkan suatu lokasi tertentu di alam semesta. Jembatan tersebut dikenal sebagai Jembatan Einstein-Rosen. Asumsi yang berlaku pada saat itu ialah objek yang masuk ke dalam *black hole*, akan keluar melalui suatu objek yang disebut *white hole*. *White hole* merupakan pasangan dari suatu *black hole* yang memiliki sifat yang berlawanan dengan *black hole* [20]. *White hole* memiliki *antihorizon* sedangkan *black hole* memiliki suatu *event horizon*. *Antihorizon* merupakan kebalikan dari *event horizon*. Suatu *white hole* dikelilingi oleh *antihorizon* sebagaimana *black hole* dikelilingi oleh *event horizon*. Sayangnya, *antihorizon* ini sangatlah tidak stabil dan

berubah menjadi *event horizon* dalam waktu yang singkat. Jadi, saat suatu objek masuk ke dalam *black hole*, objek tersebut akan menemui *event horizon* selanjutnya yang menghalangi objek tersebut untuk keluar [20].

Masalah utama dalam jembatan Einstein-Rosen adalah konstruksinya tidak stabil. Jembatan Einstein-Rosen hanya akan bertahan dalam waktu yang singkat dan akhirnya terputus. Faktanya, karena umur dari jembatan Einstein-Rosen ini sangat singkat menyebabkan cahaya tidak cukup cepat melewatinya. Objek yang jatuh ke dalam *black hole* hanya akan terjebak selamanya dalam singularitas. Jembatan Einstein-Rosen tidak akan pernah bisa menjadi fasilitas dalam mengunjungi tempat yang jauh di alam semesta dalam waktu singkat [20].

Kip Thorne dan Michael Morris akhirnya berhasil mengkonstruksi suatu *wormhole* yang tidak memiliki singularitas, tidak memiliki *event horizon*, memiliki jembatan yang dapat dilalui, dan memiliki lubang yang terbuka terus. Apabila terdapat singularitas maka, objek yang masuk tidak akan pernah dapat keluar. Apabila terdapat *event horizon*, maka hanya perjalanan satu arah saja yang dapat dimungkinkan [20]. Model *wormhole* yang menarik adalah *Lorentzian wormhole*. Gambaran mengenai *Lorentzian wormhole* diberikan pada Gambar 2.3. *Wormhole* jenis ini terbagi atas dua, yaitu permanen dan sementara. Masing-masing subjenis ini kemudian terbagi lagi menjadi dua yaitu, *inter-universe wormhole* dan *intra-universe wormhole*. *Inter-universe wormhole* adalah suatu *wormhole* yang dapat menghubungkan dua alam semesta berbeda, sedangkan *intra-universe wormhole* adalah *wormhole* yang menghubungkan dua wilayah yang berjauhan pada alam semesta yang sama.



**Gambar 2.2** Skema *Lorentzian Wormhole*

Sumber: F. S. N. Lobo, *Wormhole, Warp Drives, and Energy Condition*

Masing-masing subjenis tersebut terdiri atas dua varietas, yaitu makroskopis dan varietas mikroskopis. Varietas makroskopis menyiratkan *wormhole* yang dapat dilalui, sedangkan varietas mikroskopis menyiratkan *quantum wormhole* dari jenis yang pertama kali dipelajari oleh Wheeler [20].

## II.9 Pengenalan Materi Eksotik

Salah satu syarat yang ingin diterapkan Kip Thorne pada *wormhole* yang dapat dilalui adalah bahwa *wormhole* itu tidak akan menutup dengan cepat seperti jembatan Einstein–Rosen. Namun, Kip Thorne menemukan bahwa ini tidak akan menjadi masalah yang mudah. Tenggorokan *wormhole* (*wormhole throat*) tidak akan terbuka dengan sendirinya dan membutuhkan banyak bantuan. Ditemukan bahwa tidak ada materi yang diketahui di alam semesta yang dapat memenuhi persyaratan Thorne. Thorne menyadari bahwa satu-satunya cara agar *wormhole* tetap terbuka adalah jika lubang itu dijalin dengan bahan yang sangat aneh yang harus memiliki massa negatif. Secara teknis, dikatakan juga memiliki energi negatif disebabkan karena massa dan energi dapat dipertukarkan dan pada saat itu gagasan ini tidaklah masuk akal. Dalam pernyataan ilmiah yang khas, Thorne menjuluki materi ini sebagai materi eksotik [20].

Suatu materi yang memiliki massa positif tentunya mematuhi hukum fisika, jika berada pada sekitar sumber medan gravitasi, gaya gravitasi pun akan menarik materi tersebut. Tetapi, materi yang memiliki massa negatif tidak mematuhi hukum fisika, akan terjadi suatu gaya gravitasi yang repulsif apabila materi tersebut berada di sekitar sumber medan gravitasi. Suatu materi eksotik dapat mempertahankan struktur suatu *wormhole* dan mempertahankannya agar tetap terbuka dikarenakan gaya gravitasi yang repulsif menyebabkan timbulnya suatu tekanan negatif yang mengarah keluar. Materi eksotik akan sangat sulit dibayangkan sebagai suatu materi seperti halnya dibayangkan suatu partikel proton atau elektron. Akan lebih mudah dibayangkan jika materi eksotik ini eksis sebagai suatu fluida. Salah satu kandidat materi eksotik adalah *phantom energy* [20].

## II.10 Metrik Ruang-Waktu dari *Wormhole*

Diberikan metrik statik dan simetri bola untuk *wormhole* [21]

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.91)$$

dimana  $\Phi(r)$  dan  $b(r)$  merupakan fungsi arbitrer dari kordinat radial  $r$  [7,8,9,21]. Koordinat radial  $r$  merepresentasikan lokasi dari suatu *wormhole*.  $\Phi(r)$  berhubungan dengan fungsi pergeseran merah (*redshift function*) dan  $b(r)$  berhubungan dengan fungsi bentuk yang menentukan bentuk dari *wormhole* itu sendiri. Agar *wormhole* dapat dilalui, maka harus dipastikan agar tidak memiliki *event horizon* dimana  $e^{2\Phi(r)} \neq 0$  sehingga  $\Phi(r)$  haruslah memiliki nilai berhingga dimanapun [21].

Meskipun komponen  $g_{rr}$  menjadi divergen apabila  $b(r) = r$ , yang mana memberikan suatu singularitas koordinat maka,  $l(r) = \pm \int_{r_0}^r (1 - b(r)/r)^{-1/2} dr$  dibutuhkan agar memiliki nilai berhingga dimanapun.  $l(r)$  merupakan jarak radial yang tepat (*proper radial distance*). Nilai  $l(r)$  tersebut menurun dari  $l = +\infty$  pada bagian atas alam semesta ke  $l = -\infty$  pada bagian bawah alam semesta [21].

## II.11 Prinsip Matematis dari Diagram Penyatuan

Diagram penyatuan digunakan untuk membuat visualisasi dari *wormhole* dalam bentuk gambar [21,22]. Diagram penyatuan juga dapat digunakan untuk mengekstrak informasi yang penting dari pemilihan fungsi bentuk  $b(r)$ . Dikarenakan sifat alami dari metrik yang digunakan yakni simetri bola, dapat dipertimbangkan  $\theta = \pi/2$  dan variabel waktu yang bernilai tetap. Dari pertimbangan tersebut, metrik pada persamaan (2.91) dituliskan menjadi

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2 \quad (2.92)$$

Selanjutnya, metrik pada persamaan (2.92) disatukan dengan metrik pada suatu koordinat silinder  $(r, \phi, z)$  yakni

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2.93)$$

Melalui persamaan (2.92) dan (2.93) diperoleh

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left[ \frac{r}{b(r)} - 1 \right]^{-1/2} \quad (2.94)$$

Agar dapat menjadi solusi dari *wormhole*, harus dipastikan bahwa leher dari *wormhole* mengalami kondisi pelebaran (*flaring-out condition*). Kondisi pelebaran memerlukan bahwa  $d^2r/dz^2 > 0$ . Persamaan (2.94) dituliskan ulang menjadi

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left[ \frac{r}{b(r)} - 1 \right]^{1/2} \quad (2.95)$$

Apabila dilakukan diferensiasi terhadap  $z$ , persamaan (2.95) menjadi

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (2.96)$$

Kondisi pelebaran inilah merupakan bagian yang fundamental dari *wormhole* dan memiliki peran utama dalam melakukan analisa terhadap pelanggaran kondisi energi nol. Dibagian leher *wormhole*  $b(r_0) = r_0$ , dapat dilakukan verifikasi bahwa fungsi bentuk memenuhi  $b'(r_0) < 1$  [21].