SKRIPSI FISIKA

SIMULASI SEBARAN PARTIKEL MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI DAN DIFUSI 2D DENGAN METODE BEDA HINGGA

LA FARRAS

H211 16 507

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2022

SIMULASI SEBARAN PARTIKEL MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI DAN DIFUSI 2D DENGAN METODE BEDA HINGGA

SKRIPSI

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Fisika Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin.

LA FARRAS
H211 16 507

DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2022

SIMULASI SEBARAN PARTIKEL MENGGUNAKAN PERSAMAAN ADVEKSI DAN DIFUSI 2D DENGAN METODE BEDA HINGGA

Disusun dan diajukan oleh:

LA FARRAS
H21116507

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang di bentuk dalam rangka Penyelesaiian Studi Program Sarjana Program Studi Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin
Pada tanggal 13 Mei 2022
Dan dinyatakan telah memenuihi syarat kelulusan

Menyetujui

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Eko Juarlin, S.Si, M.Si	Azwar Sutiono, S.Si, M.Si
NIP. 198111062008121002	NIP. 1991112032019031007

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Arifin, M. T
NIP.196705201994031002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini merupakan karya orisinal saya dan sepanjang pengetahuan saya tidak memuat bahan yang pernah dipublikasi atau ditulis oleh orang lain dalam rangka tugas akhir untuk suatu gelar akademik di Universitas Hasanuddin atau di lembaga pendidikan lainnya di manapun; kecuali bagian yang telah dikutip sesuai kaidah ilmiah yang berlaku. Saya juga menyatakan bahwa skripsi ini merupakan hasil karya saya sendiri dan dalam batas tertentu dibantu oleh pihak pembimbing.

Makassar, 12 Mei 2022

METERAI TEMPEL 10000 3A9AJX69574773

La Farras

ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian tentang sebaran partikel persamaan diferensial adveksi difusi yang dikerjakan menggunakan metode beda hingga. Dengan memvariasikan beberapa kasus konsentrasi sumber tetap dan konsentrasi tak tetap sumber terhadap kecepatan dan difusivitas didapatkan hasil. Pada kasus konsentrasi tak tetap sumber, nilai saturasi semakin kecil dan semakin lambat mencapai saturasi di lokasi jauh dari sumber. Jika Vx ditambah, konsentrasi saturasi di titik tertentu bertambah. Pola konsentrasi di suatu titik sesuai dengan pola konsentrasi di sumber. Pada kasus konsentrasi tetap sumber, akumulasi kosentrasi di TDx=11 sebanding dengan Vx. Jika koefisien difusi Y semakin besar, semakin banyak partikel tersebar arah sumbu Y di TDx=11. Semakin besar koefisien difusi X maka semakin sedikit partikel tersebar di garis TDx=11. Bila Vy bertambah nilai positif, semakin banyak partikel bergerak ke sumbu Y positif. Bila Vy bertambah nilai negatif, semakin banyak partikel bergerak ke sumbu Y negatif. Semakin besar nilai positif pada Vx maka semakin banyak partikel bergerak ke sumbu X positif. Begitu pula semakin besar nilai negatif pada Vx maka semakin banyak partikel bergerak ke sumbu X negatif.

Kata Kunci: *Adveksi, Difusi, Konsentrasi, Metode Beda Hingga*

ABSTRACT

Research has been carried out on the particle distribution of the advection diffusion differential equation using the finite difference method. By varying some cases of fixed source concentration and variable source concentration with respect to velocity and diffusivity, the results are obtained. In terms of the concentration of the source variable, the saturation value is getting smaller and it is slower to reach saturation at locations far from the source. If Vx is increased, the saturation concentration at a certain point increases. The pattern of concentration at a point corresponds to the pattern of concentration at the source. In the case of source fixed concentration, the accumulated concentration at TDx=11 is proportional to Vx. If the diffusion coefficient Y is getting bigger, the more particles are scattered in the direction of the Y axis at TDx=11. The larger the diffusion coefficient X, the less particles are scattered on the line TDx=11. As Vy increases in positive value, more particles move along the positive Y axis. As Vy increases in negative value, more particles move along the negative Y axis. The larger the positive value of Vx, the more particles will move to the positive X-axis. Likewise, the larger the negative value of Vx, the more particles will move along the negative X-axis.

Keywords: *Advection, Diffusion, Concentration, Finite Difference Method*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan Rahmat dan Hidayah-nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**Simulasi Sebaran Partikel Menggunakan Persamaan Adveksi aan Difusi 2D dengan Metode Beda Hingga**". Berbagai upaya telah dilakukan penulis untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana strata satu.

Dalam penyelesaian skripsi penulis telah mengalami berbagai hambatan dan menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, hal ini terjadi karena keterbatasan pengetahuan yang dimiliki oleh penulis. Namun atas kehendaknya hambatan tersebut berhasil dilalui oleh penulis sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan. Dengan segala kerendahan hati, penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Kedua orang tua tercinta Ayahanda **(La Junaidi)** dan Ibunda **(Sinarwati)** yang memotivasi penulis untuk menjadi lebih baik yang tidak pernah memutuskan doanya dan senantiasa mendukung dari kejauhan moral maupun material. Semoga Allah senantiasa memberi kesehatan dan meridhai untuk penulis senantiasa membahagiakan dan membanggakan beliau.
2. **Prof. Dr. Arifin, M.T,** selaku Ketua Departemen Fisika, serata segenap dosen pengajar dan staf Departemen Fisika yang telah membekali ilmu dan kemudahan-kemudahan kepada Penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasisw di Departemen Fisika.
3. **Eko Juarlin, S.Si, M. Si,** selaku dosen pembimbing utama dan **Azwar Sutiono, S. Si, M. Si,** selaku dosen pembimbing pertama saya, terima kasih atas nasehat, dukungan, doa dan dengan setulus hati telah meluangkan waktunya ditengah berbagai kesibikan dan prioritasnya untuk membimbing Penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
4. **Prof. Dr. Bualkar Abdullah, M. Eng. Sc.** dan **Nur Hasanah, S. Si, M.Si.** Selaku tim penguji atas semua saran dan kritikan yang membangun dalam

penyempurnaan penyusunan tugas akhir ini serta waktu yang telah diberikan kepada Pemulis.

5. Kepada semua pihak yang tidak dapat Penulis sebutkan satu-persatu, semoga segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis bernilai ibadah disisi **Allah SWT**.

Penulis Menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati Penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga tulisan ini bermanfaat untuk pembaca

Makassar, 12 Mei 2022

La Farras

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertumbuhan pembangunan di Indonesia untuk beberapa tahun ini sangat cepat. Salah satu sektor yang dapat disorot terhadap perkembangannya, adalah sektor perindustrian karena sering memberikan dampak negatif berupa pencemaran udara contohnya gas Karbon Monoksida (CO), Sulfur Oksida (SO_x) dan Nitrogen Oksida (NO_x) yang terjadi akibat reaksi pembakaran bahan bakar fosil (minyak bumi, batu bara dan gas alam) yang biasanya dihasikan oleh mesin-mesin pabrik. Hasil pembakaran dari mesin-mesin pabrik tersebut yang disebut sebagai polutan.

Polutan merupakan substansi atau energi yang tidak diinginkan keberadaannya di suatu lokasi. Polutan juga dapat didefinisikan sebagai partikel ataupun organisme karena substansi atau energi yang dimaksud adalah bakteri, zat kimia misalnya garam, minyak, bau atau zat-zat lainnya serta temperatur, cahaya dan lainnya. Sehingga dalam pembahasan selanjutnya polutan akan didefinisikan sebagai sebuah partikel.

Partikel dapat tersebar oleh air maupun udara karena peristiwa difusi atau peristiwa adveksi. Peristiwa difusi merupakan perpindahan polutan dari konsentrasi tinggi menuju konsentrasi rendah. dan peristiwa adveksi suatu mekanisme perpindahan massa partikel dari suatu titik ke titik lainnya pada aliran fluida. Sehingga partikel dapat menyebabkan masalah berat karena dapat mencemari lingkungan.

Masalah pencemaran lingkungan bisa di gambarkan dengan menggunakan salah satu pemodelan matematika yaitu Persamaan Adveksi-Difusi (PAD). Kuantitas yang dapat dihitung dan menggambarkan pencemaran, adalah konsentrasi (C). Konsentrasi ini berupa besaran fisik skalar yang merepresentasikan massa suatu zat pelarut dalam setiap zat terlarut. PAD menggambarkan dinamika zat pelarut dalam zat terlarut. PAD telah digunakan sebagai persamaan model dalam banyak masalah teknik seperti dispersi *tracer* di media berpori, transportasi polutan di aliran sungai dan kali, penyebaran bahan terlarut di muara dan pesisir laut, penyebaran kontaminan (bahan pencemar) di danau dangkal (Karahan, 2006).

Untuk menyelesaikan PAD terlebih dahulu akan dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial memang sering digunakan dalam menyelesaikan banyak persoalan matematika secara analitik. Walaupun penyelesaian PAD dalam bentuk persamaan diferensial parsial dapat memecahkan solusi analitiknya, hasil yang diperoleh masih terlalu kompleks untuk diselesaikan secara numerik.

Diskritisasi persamaan differensial PAD dibutuhkan untuk menyelesakannya menjadi persamaan yang lebih sederhana (linear) terlebih dahulu. Salah satu metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan PAD adalah menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga dipilih karena banyak penelitian sebelumnya yang telah dilakukan untuk menyelesaikan PAD dalam fenomena transfer partikel diantaranya adalah Ahmad (2000), Thongmoon, dkk (2007), Alman, dkk (2013), Kusuma, dkk (2014). Dengan dasar itu dipilih judul **Simulasi Sebaran Partikel menggunakan Persamaan Adveksi dan Difusi 2D dengan Metode Beda Hingga**

I.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah adalah:

1. Bagaimana persebaran partikel berdasarkan persamaan adveksi-difusi 2 dimensi menggunakan metode beda hingga?
2. Bagaimana pengaruh koefisien difusi (D_x,D_y), v_x dan v_y pada persamaan adveksi dan difusi terhadap persebaran partikel?

I.3 Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian adalah:

1. Mensimulasikan sebaran partikel dengan persamaan adveksi-difusi 2 dimensi menggunakan motede beda hingga.
2. Menganalisis pengaruh koefisien difusi D_x, D_y dan kecepatan alir v_x, v_y terhadap akumulasi persebaran partikel.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Persamaan Adveksi-Difusi

Berdasarkan literatur yang telah diperoleh, bentuk umum persamaan adveksi-difusi model satu dimensi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v\frac{\partial C}{\partial x} + D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, 0 < x < L, \quad (2.1)$$

Sedangkan bentuk umum persamaan adveksi-difusi untuk model dua dimensi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V_x\frac{\partial C}{\partial x} - V_y\frac{\partial C}{\partial y} + D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2},\ 0 < x < L_x \text{ dan } 0 < y < L_y \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) dapat diketahui bahwa PAD termasuk dalam kelompok persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial. Berikut ini merupakan klasifikasi dari persamaan differensial dua peubah:

a. Persamaan Parabolik

   Persamaan parabolik menggambarkan aliran panas dan proses difusi polutan memenuhi sifat $B^2 - 4AC = 0$

b. Persamaan Hiperbolik

   Persamaan hiiperbolik menggambarkan sistem getaran dan gerak gelombang yang memenuhi sifat $B^2 - 4AC > 0$

c. Persamaan Eliptik

   Persamaan eliptik menggambarkan potensi dan fenomena yng tidak bergantung kepada waktu dan memenuhi sifat $B^2 - 4AC < 0$

Variabel A, B, C diambil dari bentuk umum persamaan yaitu

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} + F = 0 \quad (2.3)$$

Proses adveksi atau proses angkutan merupakan gerakan yang terjadi akibat aliran air yang bergerak searah dan tidak mengubah identitas materi yang sedang mengalir atau yang sedang dipindahkan. Besar nilai fluks massa (Hukum kekekalan massa berlaku) suatu angkutan akibat adveksi secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$J = u \cdot C \tag{2.4}$$

dengan:

J = fluks massa dalam arah x

u = besar kecepatan aliran dalam arah x

C= besar konsentrasi debit *inflow* atau perpindahan.

Proses difusi merujuk pada pergerakan massa akibat beda konsentrasi massa. Sifat pergerakan adalah acak. Hal ini sering dikenal dengan nama gerak Brown. Fenomena penyebaran partikel diturunkan berdasarkan persamaan umum angkutan massa pada fluida dan hukum Fick. Hukum Fick dapat dinyatakan dalam rumus matematika sebagai berikut:

$$F = -D\frac{\partial C}{\partial x} \tag{2.5}$$

dengan:

F = fluks massa bahan terlarut

C = konsentrasi bahan terlarut

D = koefisien difusi

Tanda minus menunjukkan bahwa difusi memiliki kecenderungan untuk meminimalisir gradient, yaitu perbedaan konsentrasi dengan memindahkan suatu materi dari daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah dengan konsentrasi yang lebih rendah (Chapra, 2010).

Proses adveksi dan difusi dalam pembahasannya pada cairan yang mengalir merupakan dua proses terpisah dan dapat digabungkan. Hal itu terjadi karena adanya proses turbulensi pada aliran fluida yang mengakibatkan difusi molekuler pada aliran fluida dengan kecepatan konstan. Molekul-molekul kimia mengalami gerakan acak sehingga molekul-molekul bergerak dari konsentrasi tinggi menuju ke konsentrasi yang rendah. Sehingga hukum kekekalan dapat dimodifikasi dengan dengan pendekatan fungsi fluks (Le Veque, 1992).

II.2 Deret Taylor

Banyak metode-metode numerik yang diturunkan didasarkan pada penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinom. Fungsi yang berbentuk kompleks, menjadi lebih sederhana bila dihampiri dengan polinom, karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling mudah untuk dipahami bentuknya.

Galat solusi numerik dihubungkan dengan seberapa teliti polinom menghampiri fungsi sebenarnya. Di sini, untuk membuat polinom hampiran, digunakan deret Taylor. Deret Taylor dapat diartikan sebagai besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu yang dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan kecil dengan tinjauan.

Misalkan f dan semua turunannya f', f'', f''', ..., di dalam selang $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$. Nilai $f(x)$ di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) +..+ \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \cdots \quad (2.6)$$

Jika $x - x_0 = h$, maka f(x) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f'' + \cdots + \frac{(h)^m}{m!} f^m(x_0) + \cdots \quad (2.7)$$

II.3 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Prinsipnya adalah mengganti turunan yang ada pada persamaan differensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Diskritisasi beda hingga tersebut dapat mengubah bentuk persamaan parsial menjadi bentuk persamaan linear. Terdapat 3 skema metode beda hingga berdasarkan deret Taylor yaitu:

II.3.1 Beda hingga maju

Pendekatan beda hingga maju dilakukan dengan ekspansi deret Taylor di titik x_i dan titik x_{i+1}. Apabila diberikan fungsi $C(x)$ dengan satu variabel bebas secara analitis untuk $C(x_{i+1})$ dapat dijabarkan berdasarkan deret Taylor sekitar x sebagai berikut :

$$C(x_{i+1}) = C(x_i) + C'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + O(\Delta x^2) \quad (2.8)$$

Dengan mengeluarkan faktor $C'(x_i)$ pada persamaan...... diperoleh:

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}) - C(x_i)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x) \qquad (2.9)$$

Jika $h = \Delta x$ dan interval Δx bernilai kecil, persamaan (2.9) menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}) - C(x_i)}{h} \qquad (2.10)$$

Bila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y), bentuk beda hingga maju menjadi:

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}, y_i) - C(x_i, y_i)}{\Delta x} \qquad (2.11)$$

$$C'(y_i) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i, y_{i+1}) - C(x_i, y_i)}{\Delta y} \qquad (2.12)$$

II.3.2 Beda hingga mundur

Pendekatan beda hingga mundur dilakukan dengan ekspansi deret Taylor di titik x_i dan titik x_{i-1}, sehingga deret Taylor dari fungsi $C(x)$ dengan satu variabel bebas menjadi,

$$C(x_{i-1}) = C(x_i) - C'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \qquad (2.13)$$

Dengan mengeluarkan faktor $C'(x_i)$ pada persamaan...... diperoleh:

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i) - C(x_{i-1})}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x) \qquad (2.14)$$

Jika $h = \Delta x$ dan interval Δx bernilai kecil, persamaan (2.14) menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i) - C(x_{i-1})}{h} \qquad (2.15)$$

Persamaan beda hingga mundur dengan dua variabel bebas (x, y) menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i, y_i) - C(x_{i-1}, y_i)}{\Delta x} \qquad (2.16)$$

$$C'(y_i) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i, y_i) - C(x_i, y_{i-1})}{\Delta y} \qquad (2.17)$$

II.3.3 Beda hingga tengah atau terpusat

Pendekatan beda hingga pusat untuk turunan pertama dilakukan di titik x_{i-1} dan titik x_{i+1}. Sehingga pendekatan dengan satu variabel bebas ini diperoleh dengan cara mengurangkan persamaan (2.8) dengan persamaan (2.13)

$$C(x_{i+1}) - C(x_{i-1}) = 2C(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \tag{2.18}$$

Atau dapat dituliskan kembali menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1},y_i) - C(x_{i-1},y_i)}{2\Delta x} \tag{2.19}$$

$$C'(y_i) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i,y_{i+1}) - C(x_i,y_{i-1})}{2\Delta y} \tag{2.20}$$

Sedangkan turunan kedua dari beda hingga puat dengan dua variabel bebas (x, y) dapat ditulis menjadi

$$C''(x_i) = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{C(x_{i-1},y_i) - 2C(x_i,y_i) + C(x_{i+1},y_i)}{\Delta x^2} \tag{2.21}$$

$$C''(y_i) = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{C(x_i,y_{i-1}) - 2C(x_i,y_i) + C(x_i,y_{i+1})}{\Delta y^2} \tag{2.22}$$

Misalkan fungsi waktu dimasukkan dengan menotasikannya sebagai indeks atas maka ditulis menjadi:

$$C'(x_i) = \frac{C^n_{i+1,j} - C^n_{i,j}}{\Delta x} \tag{2.23}$$

$$C'(x_y) = \frac{C^n_{i,j+1} - C^n_{i,j}}{\Delta y} \tag{2.24}$$

Metode beda hingga dapat digunakan dengan mengubah diferensial bentuk kontinu menjadi bentuk diskrit. Proses tersebut biasa dikenal dengan proses diskritisasi. Diskritisasi adalah proses membagi atau memecah suatu bagian atau bidang menjadi beberapa bagian-bagian kecil yang disebut dengan *grid*. Banyaknya *grid* yang dibentuk bergantung pada bentuk benda yang akan dianalisis. Semakin banyak *grid* yang digunakan dalam membagi sebuah benda,semakin sedikit kesalahan yang dihasilkan karena semakin mendekati bentuk asli dari benda yang dianalisis.Dengan adanya diskritisasi, *grid* yang lebih kecil tidak mengurangi sistem yang asli karena sistem yang asli merupakan suatu keseluruhan benda sebelum dicacah.

Dengan menggunakan skema numerik eksplisit persamaan (2.1) dapat dituliskan

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t} = -D\,\frac{C_{x-\Delta x}^n + C_{x+\Delta x}^n - 2C_x^n}{\Delta x^2} + v\,\frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} \tag{2.25}$$

Maka C_i^{n+1} dapat ditulis

$$C_i^{n+1} = C_i^n - D\,\frac{C_{x-\Delta x}^n + C_{x+\Delta x}^n - 2C_x^n}{\Delta x^2}\Delta t + v\,\frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x}\Delta t \tag{2.26}$$

Dalam model dua dimensi, persamaan (2.2) menjadi

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - D_x\,\frac{C_{i-1,j}^n + C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n}{\Delta x^2}\Delta t - D_y\,\frac{C_{i,j-1}^n + C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n}{\Delta y^2}\Delta t +$$

$$v_x\,\frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x}\Delta t + v_y\,\frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y}\Delta t \tag{2.27}$$