DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI ANTARA GRAF LINTASAN (P_n) DENGAN GRAF SIKLUS ORDE TIGA

SKRIPSI

RAHMAT AGUS WAHYUDI PANGA

H011181309

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

MEI 2022

DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI ANTARA GRAF LINTASAN (P_n) DENGAN GRAF SIKLUS ORDE TIGA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

RAHMAT AGUS WAHYUDI PANGA

H011181309

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
MEI 2022

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

Diferensial Graf Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Antara Graf Lintasan (P_n) Dengan Graf Siklus Orde Tiga

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 10 Mei 2022

Ramat Agus Wayudi Panga

H011181309

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Rahmat Agus Wayudi Panga

NIM : H011181309

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Diferensial Graf Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Antara Graf Lintasan p_n Dengan Graf Siklus Orde Tiga.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua : Prof. Dr, Hasmawati, M.Si. ( )

Sekretaris : Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si. ( )

Anggota : Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. ( )

Anggota : Dr. Khaeruddin, M.Sc. ( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 10 Mei 2022.

HALAMAN PENGESAHAN

DIFERENSIAL GRAF PADA GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI ANTARA GRAF LINTASAN (P_n) DENGAN GRAF SIKLUS ORDE TIGA

Disusun dan diajukan oleh

RAHMAT AGUS WAHYUDI PANGA

H011181309

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Darjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 10 Mei 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.

NIP. 19641231 199003 2 007

Pembimbing Pertama,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

Ketua Program Studi Matematika

Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan Skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana S.Si. Dalam penyusunan proposal ini, banyak pihak yang telah membantu penulis secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu,pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si**. selaku Dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
2. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si**. selaku Dosen pembimbing pertama yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
3. Dosen Penguji saya, yaitu **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS**. dan Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc**, yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penyusunan skripsi ini;
4. Para **Dosen** dan **Staf Departemen Matematika** yang banyak membantu selama perkuliahan sampai dalam penyusunan skripsi ini.
5. **Orang tua** dan **Kak Ind, Kak Suci, Kak pardi** yang telah memberikan bantuan dukungan material dan moral. Ketika dunia menutup pintunya pada saya, kalian tetap membuka lengan untuk saya. Ketika orang-orang menutup telinga mereka untuk saya, kalian membuka hati untukku, terima kasih karna selalu ada.
6. **Fredrik, Akbar, Rahmat, Umar** yang telah banyak memberikan bantuan baik itu dalam mengurus persuratan, dan bersedia memberikan ruang untuk saya beristirahat, kalian luar biasa.
7. **Teman-teman seperjuangan** dan **kakak senior** yang banyak membantu selama perkuliahan sampai dalam penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 10 Mei 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Rahmat Agus Wahyudi Panga
NIM	: H011181309
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Diferensial Graf Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Antara Graf Lintasan (P_n) Dengan Graf Siklus Orde Tiga

Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini, saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar Pada tanggal 10 Mei 2022

Yang menyatakan,

Rahmat Agus Wahyudi Panga.

ABSTRAK

Diberikan sembarang graf $G = (V, E)$ untuk setiap X subset V, dengan B(X) adalah himpunan titik di V / X , yang mempunyai tetangga di X. Didefinisikan diferensial dari himpunan X adalah $\partial(X) = |B(X)| - |X|$, dan diferensial dari graf G adalah max $\partial(X)$, Untuk setiap X subset V. Di dalam skripsi ini, diperoleh nilai diferensial dari graf Amal(P_n ; C_3, $x_{\frac{n+1}{2}}$; a) , n ganjil $n \geq 3$. Untuk n = 3, 5 diperoleh $\partial\left(\text{Amal}\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 3$, untuk n = 2k + 1, k = 3, 4, 5, … diperoleh $\partial\left(\text{Amal}\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 2\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$, ketika k = 3, 6, 9, …, 3m. $m \in N$ dan $\partial\left(\text{Amal}\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 2\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 3$, ketika k = 4, 5, 7, 8, …, 3m + 1, 3m + 2. $m \in N$.

Kata Kunci: Diferensial himpunan, diferensial graf, graf Amal(P_n ;C_3, $x_{\frac{n+1}{2}}$;a).

Judul : Diferensial Graf Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Antara Graf Lintasan P_n Dengan Graf Siklus Orde Tiga.

Nama : Rahmat Agus Wahyudi Panga

NIM : H011181309

Program Studi : Matematika.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be an arbitrary graph. For any subset X of V. Let $B(X)$ be a set of vertices in V / X, having neighbour in X. Defined the differential of a set X to be $\partial(X) = |B(X)| - |X|$, and the differential of a graph to be aqual to max $\partial(X)$, for any subset of X of V. In this essay, we obtain differential value of $Amal(P_n ; C_3, x_{\frac{n+1}{2}} ;a)$ graphs for n odd $n \geq 3$. For $n = 3, 5$ we obtain $\partial\left(Amal\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 3$, for $n = 2k + 1$, $k = 3, 4, 5, \ldots$ we obtain $\partial\left(Amal\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 2\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 1$, whenk $= 3, 6, 9, \ldots, 3m$. $m \in N$ and $\partial\left(Amal\left(P_n;C_3, x_{\frac{n+1}{2}};a\right)\right) = 2\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor + 3$, when $k = 4, 5, 7, 8, \ldots, 3m + 1, 3m + 2$. $m \in N$.

Keywords: *Differential set, differential graph, $Amal(P_n ; C_3, x_{\frac{n+1}{2}} ;a)$ graph.*

Title : *Differential graph on the graphof amalgamation results between the path graph and the third order cycle graph.*

Name : Rahmat Agus Wahyudi Panga

Student ID : H011181309

Study Program : *Math.*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN ii

HALAMAN PENGESAHAN PEMBIMBING iiii

HALAMAN PENGESAHAN iii

KATA PENGANTAR iii

PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH vii

ABSTRAK viii

ABSTRACT ix

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 3

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 4
2.1 Dasar-Dasar Graf 4
2.2 Jenis-Jenis Graf 8
2.3 Operasi Pada Graf 9
2.4 Diferensial Graf 10

BAB III METODE PENELITIAN 13
3.1 Metodologi Dan Jenis Penelitian 13
3.2 Diagran Alur Penelitian 13
3.3 Lokasi Dan Waktu Pelaksanaan 14
3.4 Analisis Data 14

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 15
4.1 Titik-titik setingkat dan setara dalam graf Amal (Pn;C3, $X_{\frac{n+1}{2}}$; a) 15
4.2 Penentuan himpunan titik dengan jumlah tetangga terbanyak pada graf Amal $\left(P_n;C_3,\ x_{\frac{n+1}{2}};a\right)$, n = 3, 5. 18
4.3 Penentuan himpunan titik dengan jumlah tetangga terbanyak pada graf

Amal $\left(P_n;C_{3\,,}\ x_{\frac{n+1}{2}};a\right)$, n =2k+1, k=3,4…. 22

BAB V PENUTUP 30
5.1 Kesimpulan.. 30
5.2 Saran 30

DAFTAR PUSTAKA.. 31

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.1 Graf C_3. 4
Gambar 2.1.2 Graf G. Dengan orde 5 6
Gambar 2.1.3 Graf sederhana berorde 7. 7
Gambar 2.2.1 Graf P_4. 8
Gambar 2.2.2 Graf C_3. 8
Gambar 2.2.3 Graf K_{8x8}. 8
Gambar 2.3.1 Graf Amal (P_3;C_3, X_2 ; a). 9
Gambar 2.3.2 Graf Amal (P_4:C_3, e_{01}; e_{02}). 10
Gambar 2.4.1 Graf K_{2x2}. 10
Gambar 3.2.1 Diagram Alur Penelitian. 13
Gambar 4.2.1 Graf Amal (P_3;C_3, X_2;a). 19
Gambar 4.2.2 Graf Amal (P_5;C_3, X_3;a). 20
Gambar 4.3.1 Graf Amal (P_n;C_3, $X_{\frac{n+1}{2}}$; a). 25
Gambar Graf Amal (P_3;C_3, X_2;a). 32
Gambar Graf Amal (P_5;C_3, X_3;a). 32
Gambar Graf Amal (P_7;C_3, X_4;a). 32
Gambar Graf Amal (P_9;C_3, X_5;a). 37
Gambar Graf Amal (P_{11};C_3, X_6;a). 40
Gambar Graf Amal (P_{13};C_3, X_7;a). 44
Gambar Graf Amal (P_{15};C_3, X_8;a). 48
Gambar Graf Amal (P_{17};C_3, X_9;a). 53
Gambar Graf Amal (P_{19};C_3, X_{10};a). 58

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan pasangan himpunan berhingga dan tak kosong dari obyek yang disebut titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik tersebut (Chartrand, G., & Lesniak, L.1996). Penelitian tentang teori graf saat ini mengalami banyak perkembangan, salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah diferensial graf.

Diferensial suatu himpunan titik pada suatu graf adalah selisih antara jumlah tetangga dari setiap titik pada himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan itu sendiri. Diferensial himpunan dapat bertindak sebagai ukuran bagaimana himpunan ini dapat mempengaruhi elemen lainnya. Sementara diferensial graf adalah nilai maksimum dari kumpulan diferensial himpunan titik. Misalnya pada jejaring sosial seperti *facebook* atau *twitter*, kedua aplikasi ini telah menjadi media yang sangat penting dalam menyebarluaskan informasi. Termotivasi dari kegunaannya yang sangat luas dalam menyebarkan informasi, sehingga maksimalisasi dari penyebaran informasi agar mudah diterima oleh masyarakat luas sebagai masalah algoritma mendasar untuk penyebaran informasi dalam jejaring sosial. Yang menjadi permasalahan adalah bagaimana menempatkan informasi pada tempat-tempat terbaik sehingga informasi tersebut dapat mempengaruhi banyak orang (Bermudo, S., Fernau, H. 2012).

Bermudo, S et.al pada tahun 2015 dalam jurnal "*Utilitas Matematica*" telah menemukan diferensial graf pada graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ untuk $n = 0(\text{mod } 3)$ adalah $\partial(P_n) = \frac{n}{3}$, dan diferensial graf pada graf siklus C_n dengan $n \geq 3$ untuk $n = 0(\text{mod } 3)$ adalah $\partial(C_n) = \frac{n}{3}$ (Bermudo, S., et.al. 2015).

Selanjutnya, Mularidharan, D et.al pada tahun 2019 dalam jurnal "*Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*" telah menemukan diferensial graf pada graf king $K_{m \times n}$, dimana untuk $m, n = 0(\text{mod } 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn}{9}$. Untuk $m = 0(\text{mod } 3)$, $n = 1(\text{mod } 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{(7n-4)m}{9}$.

Untuk $m = 0(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 2(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{(7n-2)m}{9}$. Untuk $m = 1(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 0(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-4n}{9}$. Untuk $m = 1(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 1(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-4m-4n+1}{9}$. Untuk $m = 1(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 2(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-2m-4n-4}{9}$. Untuk $m = 2(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 0(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-2n}{9}$. Untuk $m = 2(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 1(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-2n-4m-4}{9}$. Serta untuk $m = 2(\mathrm{mod}\ 3)$, $n = 2(\mathrm{mod}\ 3)$ diperoleh $\partial(K_{m \times n}) = \frac{7mn-2n-2m-2}{9}$ (Mularidharan, D., et.al. 2019).

Dalam skripsi ini, peneliti mengkonstruksi sebuah graf baru yang merupakan graf hasil operasi amalgamasi titik antara graf lintasan dan graf siklus berorde 3 untuk kemudian menjadi graf yang akan dikaji diferensial grafnya.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah :

1. Menghimpun titik-titik dengan jumlah tetangga terbanyak pada graf hasil operasi amalgamasi antara graf lintasan P_n dan graf siklus berorde 3, dan menemukan nilai maksimum dari kumpulan nilai hasil selisih antara jumlah tetangga dari himpunan dan jumlah elemen dalam himpunan itu yang merupakan nilai dari diferensial graf.
2. Membuat rumus umum dari diferensial graf hasil operasi amalgamasi antara graf lintasan P_n dan graf siklus berorde 3.

1.3 Batasan Masalah

Operasi amalgamasi terdiri atas 2 yaitu operasi amalgamasi titik dan operasi amalgamasi sisi. Dalam penelitian ini, pembahasan dibatasi pada operasi amalgamasi titik saja. Operasi amalgamasi titik adalah menempelkan titik-titik graf yang di amalgamasikan dan titik-titik tersebut disebut titik tetap. Graf yang akan dioperasi amalgamasikan adalah graf lintasan P_n untuk n ganjil $n \geq 3$ dan graf siklus berorde 3. Dalam penelitian ini titik yang diambil sebagai titik tetap pada graf lintasan P_n adalah titik ke $\frac{n+1}{2}$ atau $x_{\frac{n+1}{2}}$ dan salah satu titik di graf siklus berorde 3 yaitu titik a.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh rumus umum dari diferensial graf pada graf hasil operasi amalgamasi titik antara graf lintasan P_n untuk n ganjil $n \geq 3$ dan graf siklus berorde 3.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan mengenai pengertian graf dan unsur-unsur di dalamnya, jenis-jenis graf, operasi pada graf yang akan digunakan pada penelitian ini, serta diferensial graf.

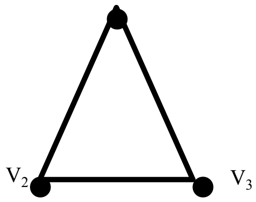
2.1 Dasar-Dasar Graf

Pengertian graf dapat berbeda tergantung definisi yang diberikan oleh penulisnya. Pengertian graf dan beberapa istilah serta notasi yang digunakan dalam tulisan ini merujuk pada definisi yang diberikan Chartrand, G dan Zhang, P. 2012.

Definisi 2.1.1 Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan hingga dan tak kosong yang anggota-anggatanya disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan pasangan tidak terurut dari anggota-anggota V yang berbeda disebut sisi (*edge*).

Istilah lain untuk titik adalah simpul atau *vertex* atau *node*. Sedangkan sisi biasa juga disebut busur atau garis atau *edge*. Sisi di E dengan titik ujung u dan v ditulis (u, v). Untuk penyederhanaan penulisan (u, v) ditulis dengan uv. Banyaknya titik di V disebut orde dari G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya titik di E disebut *size* atau ukuran dari G dinotasikan dengan $|E|$. Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau *loop, loop* adalah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri.

Contoh 2.1.1 Diberikan graf siklus berorde 3 dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_1\}$.



Gambar 2.1.1 Graf C_3.

Pada Gambar 2.1.1 diperoleh *order* dan *size* pada graf C_3, yaitu $|V| = 3$ dan

$|E| = 3$.

Penyajian berikut adalah beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf yang diperlukan dalam pembahasan diferensial graf hasil operasi amalgamasi titik antara graf lintasan P_n dan graf siklus berorde 3 yang merupakan materi kajian dalam skripsi ini.

Definisi 2.1.2 Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, v_i bertetangga dengan v_j jika $(v_i v_j)$ adalah sebuah sisi pada graf G.

Definisi 2.1.3 Derajat atau (*degree*) dari suatu titik pada graf adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik tersebut. Derajat dari titik v dinotasikan dengan $\deg(v)$, derajat maksimum titik dari graf G dinotasikan $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$ merupakan derajat minimum titik dari graf G.

Titik terisolasi *(isolated vertex)* adalah titik dengan derajat 0. Titik ujung adalah titik dengan derajat 1.

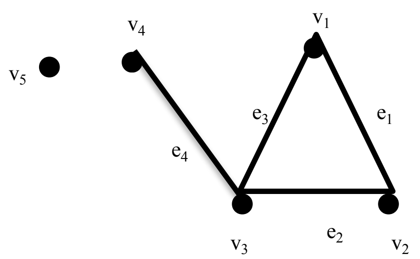
Definisi 2.1.4 Jalan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang–seling titik v_i dan sisi e_j yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

Definisi 2.1.5 Lintasan adalah jalan dimana semua titik dan semua sisi berbeda.

Lintasan (*path*) dengan titik awal dan titik tujuan sama disebut lintasan tertutup (*closed path*). Lintasan dengan titik awal dan titik tujuan berbeda disebut lintasan terbuka.

Definisi 2.1.6 Misalkan u,v adalah titik-titik dengan e = uv adalah sisi pada graf, maka sisi e disebut terkait atau (*incident*) pada titik u dan titik v.

Contoh 2.2.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_1v_3, e_4 = v_3v_4\}$.



Gambar 2.1.2 Graf G dengan orde 5

Pada Gambar 2.1.2 diperoleh :

(i) Titik v_1 dan v_2 bertetangga, sedangkan v_1 dan v_4 tidak bertetangga.

(ii) Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2, sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4.

(iii) Derajat pada titik v_1 adalah $\deg(v_1) = 2$, derajat pada titik v_4 adalah $\deg(v_4) = 1$, derajat pada v_5 adalah $\deg(v_5) = 0$ (titik terisolasi). Sedangkan derajat maximum dari graf G adalah $\Delta(G) = 2$, dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G)= 0$.

(iv) v_1- e_1 -v_2-e_2-v_3-e_4-v_4 adalah lintasan (*path*) sederhana juga lintasan terbuka, dan v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_3-v_1 adalah lintasan sederhana dan juga lintasan tertutup.

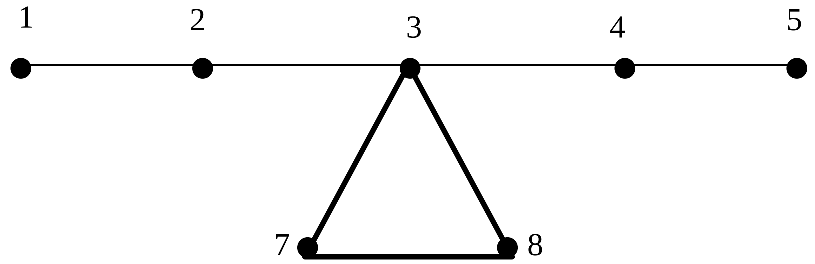
Definisi 2.1.7 Diberikan G graf terhubung dan $u, v \in V(G)$ titik u dan v disebut titik-titik yang setingkat pada graf G apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

- $\deg(u) = \deg(v)$,
- Jika $d(u, x) = k$ maka terdapat $y \in V(G)$ sehingga $d(u, x) = d(v, y)$ dan $|\{x \in V(G); d(u, x) = k\}| = |\{y \in V(G); d(v, y) = k\}|$ (Apsaldi, T. 2021).

Definisi 2.1.8 Diberikan G graf terhubung dan $u, v \in V(G)$ titik u dan v disebut titik-titik yang setara pada graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut :

- $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u, v\}$,
- Untuk setiap $s \in V(G)/\{u, v\}$, terdapat titik c sehingga $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s)$ (Hasmawati, et.al. 2020).

Contoh 2.1.3 diberikan graf G dengan himpunan titik V(G) = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} dan himpunan sisi E(G) = {12, 23, 34, 45, 37, 78, 83}. Gambar graf G seperti pada gambar 2.1.3.



Gambar 2.1.3 Graf sederhana berorde 7.

Menurut Definisi 2.1.7, titik titik yang setingkat di graf G pada gambar 2.1.3 adalah sebagai berikut : Titik 1 setingkat dengan titik 5, karena :
deg (1) = deg (5) dan banyaknya titik yang berjarak satu ke titik 1 sama dengan banyaknya titik yang berjarak satu ke titik 5 yaitu satu. Demikian halnya yang berjarak dua. Banyaknya titik yang berjarak tiga ke titik 1adalah 3 sama dengan banyaknya titik yang berjarak tiga ke titik 5 yang juga tiga. Demikian halnya untuk yang berjarak empat dan lima ke titik 1 yang masing-masing satu juga sama dengan banyaknya titik yang berjarak empat dan lima ke titik 5 yakni satu. Dengan cara yang sama diketahui bahwa titik 2 setingkat dengan titik 4, titik 7 setingkat titik 8.
Menurut Definisi 2.1.8 diketahui bahwa titik 7 setara dengan titik 8, karena :
Jarak d(7, w) = d(8, w) untuk setiap w ∈ V(G)/{7, 8}. Jelasnya :

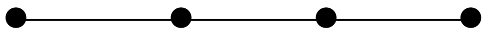
- d(7, 1) = d(8, 1) = 3
- d(7, 2) = d(8, 2) = 2
- d(7, 3) = d(8, 3) = 1
- d(7, 4) = d(8, 4) = 2
- d(7, 5) = d(8, 5) = 3.

Subgraf dari graf G adalah graf H apabila setiap titik dari H merupakan titik di G dan setiap sisi dari H merupakan sisi di G. Dengan kata lain, V(H) ⊂ V(G) dan E(H) ⊆ E(G).

2.2 Jenis-Jenis Graf

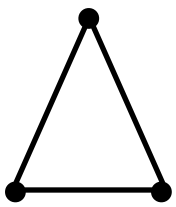
Pesatnya perkembangan kajian mengenai graf, maka semakin banyak pula ditemukan jenis-jenis graf lainnya selain graf sederhana. Pada subbab ini, beberapa jenis graf yang akan digunakan pada penelitian ini diantaranya yaitu graf lintasan, graf siklus, dan graf king.

Definisi 2.2.1 Graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang $n - 1$ (Hartiansyah F.R , 2016).



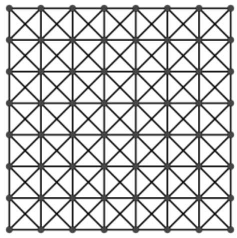
Gambar 2.2.1 Graf P_4.

Definisi 2.2.2 Siklus C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n v_1\}$ (Hasmawati.2020).



Gambar 2.2.2 Graf C_3.

Definisi 2.2.3 Graf king $m \times n$ adalah sebuah graf dengan mn titik, dimana setiap titik merepresentasikan sebuah persegi $m \times n$ dan setiap sisinya sesuai dengan langkah raja dalam permainan papan catur. Graf king dinotasikan dengan $K_{m \times n}$ (Mularidharan, D., et.al. 2019).



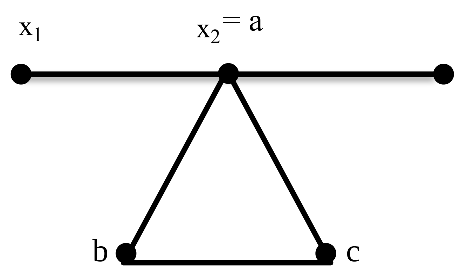
Gambar 2.2.3 Graf K_{8x8}.

2.3 Operasi Pada Graf

Pada teori graf terdapat beberapa operasi graf. Pada bagian ini, akan dibahas operasi amalgamasi graf. Terdapat dua macam operasi amalgamasi, yakni amalgamasi titik dan amalgamasi sisi.

Definisi 2.3.1(Amalgamasi Titik) Misalkan G_i graf terhubung dengan titik tetap $v_{oi} \in V(G_i)$. Amalgamasi graf G_i pada titik tetap v_{oi} dinotasikan dengan Amal($G_{i,}$ v_{oi}) adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G_i dengan $v_{oi} = v_{oj}$ untuk setiap i,j (Hasmawati , 2020).

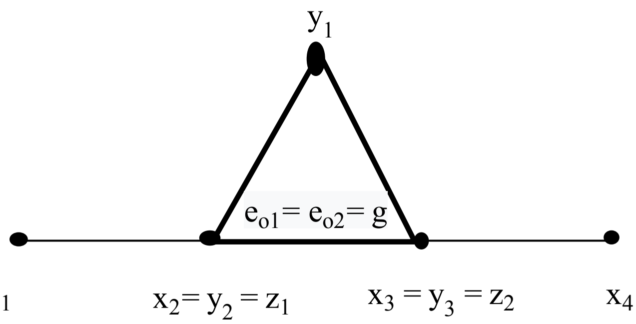
Contoh 2.3.1 Misalkan graf $G_1 = P_3$ adalah graf lintasan berorde n, dengan himpunan titik $\{x_1, x_2, x_3\}$, dimana titik $v_{01} = x_2$ merupakan titik tetap dari graf lintasan. Dan graf $G_2 = C_3$ dengan himpunan titik {a, b, c }, dimana titik $v_{02} =$ a merupakan titik tetap dari graf siklus C_3. Berdasarkan definisi operasi amalgamasi titik, graf Amal ($P_3;C_3, x_{\frac{n+1}{2}}$; a) mempunyai himpunan titik $\{x_1, x_2, x_3, b, c\}$, dan himpunan sisi $\{x_1x_2, x_2\, x_3, x_2b, bc, cx_2\}$ Bentuk graf Amal ($P_3;C_3, x_2$; a)) dapat dilihat pada Gambar 2.3.1.



Gambar 2.3.1 Graf Amal ($P_3;C_3, x_2$;a).

Definisi 2.3.2 (Amalgamasi Sisi) Misalkan G_1 dan G_2 graf terhubung. Amalgamasi dari graf G_1 dan G_2 dengan menggabungkan sisi $e_{o1} \in E(G_1)$ dan sisi $e_{o2} \in E(G_2)$ menjadi satu sisi g, dimana g adalah sisi bersama dari graf Amal ($G_{i,}$ e_{oi}) (Hartiansyah F.R , 2016).

Contoh 2.3.2 Misalkan graf $G_1 = P_4$ adalah graf lintasan berorde 4 dengan himpunan sisi $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$, dimana sisi $x_2x_3 = e_{01}$ merupakan sisi tetap dari graf lintasan P_4. Dan graf $G_2 = C_3$ dengan himpunan sisi $\{y_1y_2, y_2y_3, y_3y_1\}$, dimana sisi $y_2y_3 = e_{02}$ merupakan sisi tetap dari graf siklusC_3. Berdasarkan definisi operasi amalgamasi sisi, graf Amal (P_4;C_3, e_{01} ; e_{02}) mempunyai himpunan titik $\{x_1, z_1, z_2, x_4, y_1\}$, dan himpunan sisi $\{x_1z_1, z_1z_2, z_2x_4, z_2y_1, y_1z_1\}$. Bentuk graf Amal ($P_4$: C_3, e_{01}; e_{02}) dapat dilihat pada Gambar 2.3.2.

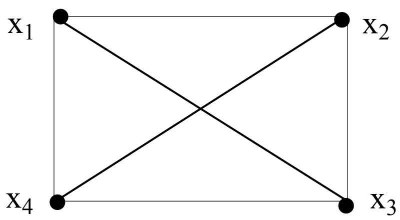


Gambar 2.3.2 Graf Amal (P_4:C_3, e_{01}; e_{02}).

2.4 Diferensial Graf

Definisi 2.4.1 Misalkan $G = (V, E)$, $X \subseteq V$ dan $B(X) = \{x \mid x \in V, x \notin X, vx \in E, v \in X\}$ maka diferensial himpunan X dinotasikan $\partial(X) = |B(X)| - |X|$, sehingga diperoleh diferensial graf G dinotasikan $\partial(G) = \max\{\partial(X) \mid X \subseteq V\}$ (Armada, C. L.,et.al. 2015).

Contoh 2.4.1 Diberikan graf K_{2x2} dengan himpunan titik $V(K_{2x2}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Gambar graf K_{2x2} seperti pada gambar 2.4.1.



Gambar 2.4.1 Graf K_{2x2}.

Untuk memperoleh semua kemungkinan diferensial himpunan dari graf K_{2x2} maka dihimpun semua kemungkinan anggota himpunan titik X dimana $X \subseteq V(K_{2x2})$.

Pilih : $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$, $X_3 = \{x_3\}$, $X_4 = \{x_4\}$,

$X_5 = \{x_1, x_2\}$, $X_6 = \{x_1, x_3\}$, $X_7 = \{x_1, x_4\}$, $X_8 = \{x_2, x_3\}$, $X_9 = \{x_2, x_4\}$,

$X_{10} = \{x_3, x_4\}$, $X_{11} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $X_{12} = \{x_1, x_2, x_4\}$, $X_{13} = \{x_1, x_3, x_4\}$,

$X_{14} = \{x_2, x_3, x_4\}$, $X_{15} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Maka diperoleh himpunan tetangga dari semua himpunan titik diatas sebagai berikut :

$B(X_1) = \{x_2, x_3, x_4\}$, $B(X_2) = \{x_1, x_3, x_4\}$, $B(X_3) = \{x_1, x_2, x_4\}$,

$B(X_4) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B(X_5) = \{x_3, x_4\}$, $B(X_6) = \{x_2, x_4\}$, $B(X_7) = \{x_2, x_3\}$,

$B(X_8) = \{x_1, x_4\}$, $B(X_9) = \{x_1, x_3\}$, $B(X_{10}) = \{x_1, x_2\}$, $B(X_{11}) = \{x_4\}$,

$B(X_{12}) = \{x_3\}$, $B(X_{13}) = \{x_2\}$, $B(X_{14}) = \{x_1\}$, $B(X_{15}) = 0$.

Sehingga diperoleh semua kemungkinan diferensial himpunan dari graf K_{2x2} yaitu :

$\partial(X_1) = |B(X_1)| - |X_1| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_2) = |B(X_2)| - |X_2| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_3) = |B(X_3)| - |X_3| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_4) = |B(X_4)| - |X_4| = 3 - 1 = 2$

$\partial(X_5) = |B(X_5)| - |X_5| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_6) = |B(X_6)| - |X_6| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_7) = |B(X_7)| - |X_7| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_8) = |B(X_8)| - |X_8| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_9) = |B(X_9)| - |X_9| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_{10}) = |B(X_{10})| - |X_{10}| = 2 - 2 = 0$

$\partial(X_{11}) = |B(X_{11})| - |X_{11}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{12}) = |B(X_{12})| - |X_{12}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{13}) = |B(X_{13})| - |X_{13}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{14}) = |B(X_{14})| - |X_{14}| = 1 - 3 = -2$

$\partial(X_{15}) = |B(X_{15})| - |X_{15}| = 0 - 4 = -4$.

Maka diperoleh diferensial dari graf $K_{2x2} = \partial(K_{2x2}) = \max\{2, 0, -2, -4\} = 2$.

Batas diferensial graf

Proposisi 2.5.2 Untuk sembarang graf $G = (V, E)$, $X \subseteq V$, dengan derejat maksimum $\Delta(G)$ maka $\partial(G) \geq \Delta(G) - 1$ (Lewis, J.R. 2004).

Bukti :

Diberikan X = {v}, dimana v adalah titik yang berderajat maksimum pada graf G. Sehingga himpunan tetangga dari titik v yaitu{ B(X)} dimana banyaknya anggota dari himpunan { B(X)} disimbolkan $|B(X)| = \Delta(G)$.

Maka diperoleh : $\partial(X) = |B(X)| - |X|$

$= \Delta(G) - 1.$

Karena $\partial(G)$ adalah nilai maksimum dari $\partial(X)$ sehingga diperoleh :

$\partial(G) \geq \partial(X)$

$\partial(G) \geq \Delta(G) - 1.$