PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI KANONIK LINIER

SKRIPSI

ANDI TENRI AJENG NUR

H011181005

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

JULI 2022

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI KANONIK LINIER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANDI TENRI AJENG NUR

H011181005

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

JULI 2022

HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Kanonik Linier

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 20 Juli 2022

Andi Tenri Ajeng Nur

H011181005

Dipindai dengan CamScanner

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI KANONIK LINIER

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
NIP. 197012311998021001	**NIP. 197110031997022001**

Pada 20 Juli 2022

Dipindai dengan CamScanner

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Andi Tenri Ajeng Nur
NIM	:	H011181005
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Kanonik Linier

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	( )
Sekretaris	: Naimah Aris, S.Si., M.Math.	( )
Anggota	: Prof. Dr. Aidawayati Rangkuti, M.S.	( )
Anggota	: Dr. Khaeruddin, M.Sc.	( )

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 20 Juli 2022

Dipindai dengan CamScanner

HALAMAN PENGESAHAN

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI KANONIK LINIER

Disusun dan diajukan oleh:

ANDI TENRI AJENG NUR

H011181005

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 20 Juli 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si.	**Naimah Aris, S.Si., M.Math.**
NIP. 197012311998021001	**NIP. 197110031997022001**

Ketua Program Studi Matematika,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 197008072000031002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Dipindai dengan CamScanner

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji dan syukur kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan berbagai kenikmatan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **"Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Kanonik Linier"**, sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, serta doa dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, perkenankan penulis untuk mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc. selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak Dr. Eng. Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
4. Bapak Prof. Dr. Eng. Mawardi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ibu Naimah Aris, S.Si., M.Math. selaku dosen pembimbing pendamping yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Prof. Aidawayati Rangkuti, M.S. selaku dosen penguji dan dosen Penasehat Akademik yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.

7. Bapak Dr. Khaeruddin, M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
8. Bapak/Ibu dosen Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin atas segala ilmu dan pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan.
9. Bapak/Ibu pegawai/staff Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah banyak membantu selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
10. Orang tua penulis, Bapak Andi Nurjasim Andi Nuhung dan Ibu Nurjanah, serta kakak, adik, dan keluarga yang telah memberikan bantuan, doa, nasihat, perhatian, serta dukungan material dan moral yang senantiasa memberikan semangat kepada penulis.
11. Anugrah Agung yang selalu memberikan semangat, dukungan, serta bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.
12. Sahabat penulis, Nabilla Eka Wijaya yang senantiasa mendengarkan keluh kesah dan memberikan semangat, dukungan, dan motivasi kepada penulis.
13. Rizky, Ita, Itsnaini, Fika, Angput, Nando, Jeki yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi.
14. Sitti Rahmah sebagai partner skripsi yang selalu menemani dan membantu selama penyusunan skripsi.
15. Teman-teman Matematika 2018 dan INTEGRAL 2018 yang telah mendukung dan membersamai selama menjalani masa perkuliahan.
16. Semua pihak yang telah membantu penulis dan tak sempat penulis sampaikan satu per satu.

Makassar, 20 Juli 2022

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Andi Tenri Ajeng Nur
NIM	: H011181005
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalti-Free Right)*** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG PADA TRANSFORMASI KANONIK LINIER

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 20 Juli 2022

Yang menyatakan,

Andi Tenri Ajeng Nur

ABSTRAK

Transformasi kanonik linier (TKL) merupakan generalisasi dari transformasi Fourier (TF). Pada tugas akhir ini, pertama akan ditinjau kembali terkait sifat-sifat TKL dan TF. Kemudian, akan ditunjukkan relasi antara TKL dan TF dan akan dibuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada TF. Terakhir, akan dibuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada TKL dengan menggunakan relasi antara TKL dan TF.

Kata Kunci : transformasi Fourier, transformasi kanonik linier, prinsip ketidakpastian Heisenberg.

Judul	:	Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Kanonik Linier
Nama	:	Andi Tenri Ajeng Nur
NIM	:	H011181005
Program Studi	:	Matematika

ABSTRACK

The linear canonical transform (LCT), which is a generalization of the Fourier transform (FT). In this paper, firstly, we review the properties of LCT and FT. Then, we show the relation between LCT and FT and we prove the Heisenberg's uncertainty principle for FT. Last, we prove the Heisenberg's uncertainty principle for LCT using the relation between LCT and TF.

Keywords *: Fourier transform, linear canonical transform, Heisenberg's uncertainty principle.*

Title	:	*Heisenberg's Uncertainty Principle for Linear Canonical Transform*
Name	:	*Andi Tenri Ajeng Nur*
NIM	:	*H011181005*
Study Program	:	*Math*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Perkembangan analisis Fourier mempunyai sejarah yang panjang dan melibatkan banyak orang terkenal dan penelitian berbagai fenomena fisik. Cabang analisis Fourier yang berfungsi untuk memecahkan berbagai masalah di persamaan diferensial parsial yaitu transformasi Fourier. Transformasi Fourier merupakan versi kontinu dari deret Fourier yang dimana deret Fourier ini merupakan fungsi periodik yang dapat direpresentasikan dengan mengombinasikan penjumlahan tak hingga dari fungsi sinus dan cosinus (Lazlo, dkk., 2006).

Transformasi Fourier juga dapat dilihat sebagai transformasi yang mengubah sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi. Salah satu generalisasi dari transformasi Fourier adalah transformasi kanonik linier. Transformasi kanonik linier merupakan transformasi integral dengan tiga parameter bebas yang diperkenalkan pada tahun 1970 (Wei, dkk., 2012). Banyak sifat dasar pada transformasi kanonik linier yang telah diketahui, seperti translasi, modulasi, konvolusi, korelasi, dan prinsip ketidakpastian (Bahri dan Ashino, 2016).

Prinsip ketidakpastian merupakan salah satu hasil utama yang sangat penting pada transformasi kanonik linier. Prinsip ketidakpastian Heisenberg ditemukan oleh fisikawan Werner Heisenberg pada tahun 1927. Asas ketidakpastian menyatakan, bahwa posisi dan kecepatan elektron tidak bisa ditentukan pada saat yang bersamaan, karena semakin akurat kecepatannya ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya, demikian sebaliknya (Heisenberg, 1927).

Banyak penelitian yang mengkaji tentang transformasi kanonik linier (TKL). Salah satu penelitian yang diperkenalkan oleh Wei dkk. (2012) mengenai teorema konvolusi dan korelasi pada TKL dan aplikasinya. Dalam penelitian tersebut, Wei dkk memperkenalkan struktur konvolusi terbaru pada TKL yang dinyatakan dengan integral satu dimensi dan mudah diterapkan dalam desain filter. Sebelumnya Wei dkk. melakukan penelitian terkait dengan memperkenalkan struktur konvolusi terbaru pada TKL yang mempertahankan properti invarians translasi yang diperoleh dengan memodifikasi definisi sebelumnya dan dengan memperkenalkan operator translasi TKL. Hennelly dan Sheridan (2005) menggunakan transformasi kanonik linier untuk menjelaskan operasi sistem optik fase kuadrat untuk melacak lokasi energi sinyal dalam fungsi distribusi Wigner. Selanjutnya penelitian terkait turunan teorema konvolusi pada TKL dan eksplorasi teorema sampling dan filter perkalian untuk pita sinyal terbatas dalam domain kanonik linier yang diperkenalkan oleh Bing dkk. (2006).

Penelitian ini mengkaji tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kanonik linier berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya oleh Bahri dkk (2008) mengenai prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier quaternion. Dalam penelitiannya tersebut, Bahri dkk menggunakan sifat-sifat transformasi Fourier quaternion untuk membuktikan prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier quaternion khususnya sisi kanan. Setelahnya, Bahri dan Ashino (2016) melakukan penelitian mengenai prinsip ketidakpastian pada transformasi kanonik linier quaternion dengan menggunakan hubungan antara transformasi Fourier quaternion dan transformasi kanonik liniar quaternion.

Berdasarkan uraian di atas, akan dikaji pengembangan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kanonik linier yang mana buktinya menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi kanonik linier dan sifat-sifat dari TKL dengan mengetahui terlebih dahulu terkait prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Hasil-hasil ini akan dituangkan dalam bentuk penelitian dengan judul ***"Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Pada Transformasi Kanonik Linier"***.

I.2 Rumusan Masalah

Bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kanonik linier?

I.3 Batasan Masalah

Tugas akhir ini dibatasi dengan menguraikan sifat-sifat dasar dari transformasi kanonik linier secara detail dan relasi antara transformasi kanonik linier dan transformasi Fourier.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kanonik linier.

I.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan tugas akhir ini yaitu diharapkan agar skripsi ini dapat memberikan pengetahuan baru dalam prinsip ketidakpastiaan Heisenberg, terkhusus pada kajian transformasi kanonik linier dan dapat menjadi referensi bagi peneliti lain kedepannya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Bilangan Kompleks

Munculnya konsep bilangan kompleks yaitu ketika para ahli matematika dihadapkan pada suatu masalah perpangkatan suku banyak (polinomial). Dalam proses penyelesaian masalah perpangkatan ternyata terdapat penyelesaian akar-akar dari polinomial yang tidak terdefinisi dalam sistem bilangan real. Sehingga solusi dari penyelesaian masalah tersebut diperkenalkan sistem bilangan kompleks.

Definisi 2.1.1 (Bilangan Kompleks)

Suatu bilangan kompleks dinyatakan sebagai bilangan yang berbentuk $(x + iy)$ *dimana* x *dan* y *bilangan real dan* i *yang dinamakan satuan khayal bersifat* $i^2 = -1$

Suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat juga didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan real x dan y yang ditulis dengan $z = (x, y)$. Jika $z = x + iy = (x, y)$ maka x dinamakan bagian real dari z dinyatakan dengan $Re\,(z)$ dan y dinamakan bagian khayal dari z dan dinyatakan dengan $Im\,(z)$, dimana $x \in Re$ dan $y \in Im$

Definisi 2.1.2 (Bilangan Kompleks Sekawan)

Jika bilangan kompleks $z = x + iy$*, maka sekawan (conjugate) dinamakan kawan dari bilangan kompleks* z *dan didefinisikan sebagai* $\bar{z} = x - iy$

Nilai mutlak atau modulus dari suatu bilangan kompleks $z = x + iy = (x, y)$ didefinisikan sebagai bilangan real non-negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ ditulis

$$|z| = |z + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1

Jika z, z_1, dan z_2 bilangan kompleks maka berlaku:

1. $|z|^2 = \big(Re(z)\big)^2 + \big(Im\ (z)\big)^2$ (2.2)
2. $|z| = |\bar{z}|$ (2.3)
3. $|z|^2 = z\bar{z}$ (2.4)
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$ (2.5)

Bukti.

Misalkan $z = x + iy$, maka

1. $|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = \big(Re(z)\big)^2 + \big(Im(z)\big)^2.$
2. $\bar{z} = x - iy$, maka $|\bar{z}| = \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2}\right)^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$
3. $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z\bar{z}.$
4. $$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| \\ &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

(Kadir, 2016).

II. 2 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan operasi matematik yang mengubah domain suatu sinyal periodik dari domain waktu menjadi domain frekuensi. Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pengolahan sinyal digital maupun bidang pengolahan citra digital . Joseph Fourier, seorang matematikawan dari Perancis menunjukkan bahwa setiap fungsi periodik (sinyal) dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari fungsi sinus dan cosinus

Definisi 2.2.1 (Fungsi Genap)

Jika $f(-t) = f(t)$ untuk setiap bilangan rill t, maka $f(t)$ merupakan fungsi genap

Contoh 2.1

Misalkan $f(t) = e^{-at^2}, \forall a > 0$ akan ditunjukkan apakah $f(t)$ merupakan fungsi genap.

Diketahui $f(t) = e^{-at^2}$, maka

$$\begin{aligned} f(-t) &= e^{-a(-t)^2} \\ &= e^{-at^2} \\ &= f(t), \end{aligned}$$

diperoleh $f(-t) = f(t)$ sehingga $f(t)$ merupakan fungsi genap

Definisi 2.2.2 (Fungsi Ganjil)

Jika $f(-t) = -f(t)$ untuk setiap bilangan rill t, maka $f(t)$ merupakan fungsi ganjil

Contoh 2.2

Misalkan $f(t) = t^3 - t$ akan ditunjukkan apakah $f(t)$ merupakan fungsi ganjil.

Diketahui $f(t) = t^3 - t$, maka

$$\begin{aligned} f(-t) &= (-t)^3 - (-t) \\ &= -t^3 + t \\ &= -(t^3 - t) \\ &= -f(t), \end{aligned}$$

diperoleh $f(-t) = -f(t)$ sehingga $f(t)$ merupakan fungsi ganjil.

Teorema 2.2.1

- Jika $f(t)$ adalah fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt \tag{2.6}$$

- Jika $f(t)$ adalah fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0 \tag{2.7}$$

Definisi 2.2.3 (Fungsi Gamma)

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} t^{n-1}\, e^{-t} dt, \tag{2.8}$$

yang mana konvergen untuk $n > 0$.

Teorema 2.2.2

Berdasarkan definisi fungsi gamma, untuk $n = \frac{1}{2}$ *berlaku*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.9}$$

Definisi 2.2.4 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$)

Misalkan f *fungsi yang terintegralkan pada* $\mathbb{R}$, *maka ruang* $L^1(\mathbb{R})$ *didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi* f *yang terintegralkan mutlak pada* $\mathbb{R}$, *yaitu*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\} \tag{2.10}$$

(Gunawan, 2017).

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_1$ yang dirumuskan

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt.$$

Contoh 2.3

Misalkan $f(t) = \begin{cases} 1\,, & -2 < t < 2 \\ 0\,, & \text{selainnya'} \end{cases}$

akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1[-2{,}2]$ dengan cara menunjukkan hasil integralnya konvergen.

Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.10), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{-2} |f(t)|\, dt + \int_{-2}^{2} |f(t)|\, dt + \int_{2}^{\infty} |f(t)|\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{-2} 0\, dt + \int_{-2}^{2} 1\, dt + \int_{2}^{\infty} 0\, dt \\
&= 0 + t|_{-2}^{2} + 0 \\
&= 2 - (-2) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^1[-2{,}2]$.

Definisi 2.2.5 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$)

Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan mutlak, yakni

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \tag{2.11}$$

(Gunawan, 2017).

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_2$ yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product (f, f) dengan aturan jika $f \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\begin{aligned}(f, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Contoh 2.4

Misalkan $f(t) = e^{-at^2},\ \forall a > 0$

akan ditunjukkan apakah fungsi $f(t)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan hasil integralnya konvergen.

Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.11), diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-at^2}\right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2}\, dt.\end{aligned}$$

Diketahui $f(t)$ merupakan fungsi genap (Contoh 2.1), sehingga dengan menggunakan persamaan (2.6) maka persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2at^2}\, dt. \tag{2.13}$$

Misalkan $2at^2 = p, \frac{dp}{dt} = 4at, dt = \frac{dp}{4at}$.

Substitusi di persamaan (2.13), diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-p}\,\frac{dp}{4at} \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-p}\,\frac{dp}{2at} \\
&= \int_{0}^{\infty} (2at)^{-1}\, e^{-p}\, dp \\
&= \int_{0}^{\infty} (2at^2)^{-\frac{1}{2}}\,(2a)^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp \\
&= (2a)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} (2at^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-p} dp \\
&= (2a)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{\infty} p^{-\frac{1}{2}}\, e^{-p} dp.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan sifat fungsi gamma untuk $n = \frac{1}{2}$ pada persamaan (2.9) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= (2a)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\pi} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Karena terbukti

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,
$$

dengan

$$f(t) = e^{-at^2}, \qquad \forall a > 0$$

maka diperoleh $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.6 (Transformasi Fourier)

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, *transformasi Fourier dari* f *didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.14}$$

gunakan rumus Euler

$$(e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t) \tag{2.15}$$

persamaan (2.14) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos \omega t - i \sin \omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt. \end{aligned}$$

Sifat-sifat transformasi Fourier sebagai berikut.

a. Sifat Linier

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$ *maka*

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{2.16}$$

   dimana, α, β *adalah konstanta bilangan real.*

b. Sifat Perkalian

   Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap konstanta* $k \in \mathbb{C}$ *maka*

$$\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.17}$$

c. Sifat Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan translasi* $\tau_k f(t) = f(t-k)$, *maka*

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega). \tag{2.18}$$

d. Sifat Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, *maka*

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\,. \tag{2.19}$$

e. Sifat Translasi dan Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t-k)$ *maka*

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{2.20}$$

(Zulfajar, 2013).

Contoh 2.5

Diberikan fungsi $f(t)$ berikut (lihat Gambar 1)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (2.14) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^{0} 1\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{1} 1\, e^{-i\omega t} dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

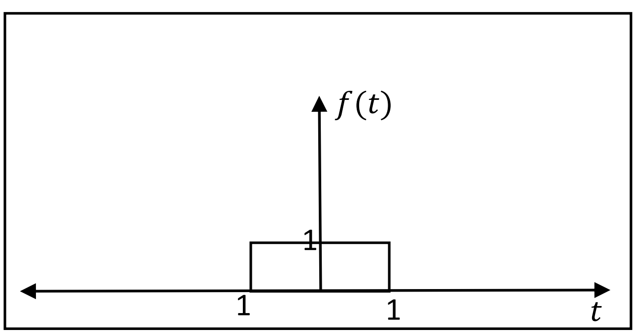
Dengan menggunakan sifat integral

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad a < c < b \text{ dan } a, b, c \in \mathbb{R},$$

diperoleh

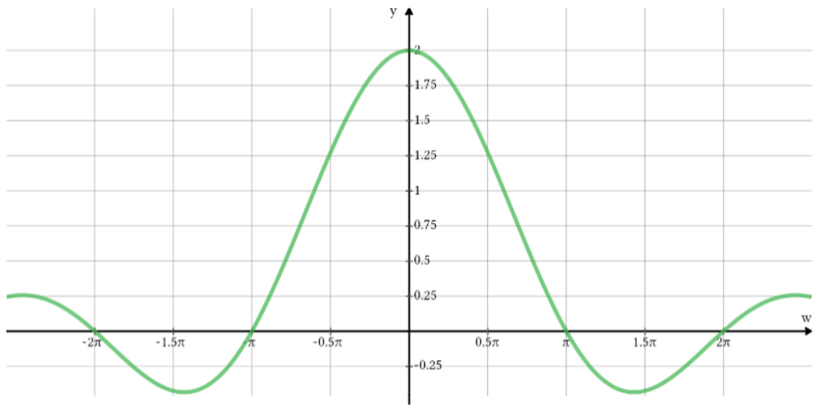
$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^{1} 1\, e^{-i\omega t} dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-1}^{1} (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\
&= \int_{-1}^{1} \cos \omega t \, dt - i \int_{-1}^{1} \sin \omega t \, dt \\
&= \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right]_{-1}^{1} - i \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{\omega} (\sin \omega - \sin(-\omega) + i(\cos \omega - \cos(-\omega))) \\
&= \frac{1}{\omega} (\sin \omega + \sin \omega) + i(\cos \omega - \cos \omega) \\
&= \frac{2}{\omega} \sin \omega
\end{aligned}
$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega$, seperti ditunjukkan oleh Gambar 2.



Gambar 1. Plot dari Contoh 2.5

Pada Gambar 1 menjelaskan terkait plot pada fungsi $f(t)$, dimana $f(t)$ bernilai 1 untuk nilai $-1 \leq t \leq 1$. Untuk plot pada transformasi Fourier $f(t)$ terlihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 2. Transformasi Fourier dari Contoh 2.5

Pada Gambar 2 menggambarkan plot pada transformasi Fourier $f(t)$, dimana transformasi Fourier pada fungsi $f(t)$ bernilai 2 untuk nilai $\omega = 0$.

II.3 Invers Transformasi Fourier

Definisi 2.3.1 (Invers Transformasi Fourier)

Misalkan fungsi $f, \mathcal{F}\{f\}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, *maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}(\omega)](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \qquad (2.21)$$

II.4 Transformasi Kanonik Linier dan Sifat-sifat Dasarnya

Transformasi Kanonik Linier (TKL) adalah transformasi integral dengan tiga parameter bebas. TKL diperkenalkan pada tahun 1970 dan banyak transformasi lainnnya seperti transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional, tranformasi Fresnel adalah kasus spesial dari TKL. TKL telah digunakan pada banyak aplikasi, seperti optik, analisis sistem radar, pemisahan sinyal, filter desain, dan banyak lainnya.

Definisi 2.4.1. (Transformasi kanonik linier)

Misalkan $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*adalah sebuah matriks parameter sedemikian sehingga* $\det(B) = ad - bc = 1$. *Transformasi kanonik linier* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *didefinsikan sebagai*

$$L_B\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_B(\omega,t)dt, \tag{2.22}$$

dimana $K_B(\omega,t)$ *adalah kernel dari fungsi* $f(t)$ *dan didefinisikan sebagai*

$$K_B(\omega,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)}, & b \neq 0, \\ \sqrt{d}e^{\frac{i}{2}cd\omega^2} f(d\omega), & b = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Untuk $b = 0$ maka definisi TKL adalah trivial, selanjutnya akan selalu diasumsikan $b \neq 0$.

Perhatikan bahwa untuk kasus khusus pada matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka TKL berubah menjadi definisi transformasi Fourier, yaitu

$$
\begin{aligned}
L_B\{f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\,e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{i}{2}\left(-2t\omega-\frac{\pi}{2}\right)}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-it\omega-\frac{i\pi}{4}}dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\omega}\,dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\{f\}(\omega),
\end{aligned}
$$

dimana, $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ adalah definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.14).

Sifat-sifat pada TKL dan buktinya di ringkas di bawah:

a. Sifat Linier

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$L_B\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha L_B\{f\}(\omega) + \beta L_B\{g\}(\omega). \qquad (2.24)$$

dimana, α, β adalah konstanta bilangan real.

Bukti. Berdasarkan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$
\begin{aligned}
&L_B\{f+g\}(\omega) \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty}(f+g)(t)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt \\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt$$

$$= L_B\{f\}(\omega) + L_B\{g\}(\omega). \blacksquare$$

b. Sifat perkalian konstanta

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap konstanta* $k \in \mathbb{C}$ *maka*

$$L_B\{kf\}(\omega) = kL_B\{f\}(\omega). \tag{2.25}$$

Bukti. Berdasarkan definsi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$\begin{aligned} L_B\{kf\}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} kf(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt \\ &= k \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt \\ &= kL_B\{f\}(\omega). \blacksquare \end{aligned}$$

c. Sifat Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan translasi* $\tau_k f(t) = f(t-k)$, *maka*

$$\begin{aligned} L_B\{\tau_k f(t)\}(\omega) &= L_B\{f(t-k)\}(\omega) \\ &= e^{-\frac{1}{2}iack^2 + ick\omega} L_B\{f\}(\omega - ak). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Bukti. Berdasarkan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$L_B\{f(t-k)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt,$$

Misalkan $t - k = m$, $t = m + k$, $dt = dm$ maka

$L_B\{f(t-k)\}(\omega)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(m) \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}(m+k)^2 - \frac{2}{b}(m+k)\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dm$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}(m^2+2mk+k^2) - \frac{2}{b}m\omega - \frac{2}{b}k\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dm$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}m^2 - \frac{2}{b}m(\omega - ka) + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\left(\frac{1}{2}\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} dm.$$

Misalkan $\omega - ka = n$, $\omega = n + ka$ maka

$$L_B\{f(t-k)\}(\omega)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}m^2 - \frac{2}{b}mn + \frac{d}{b}(n+ka)^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\left(\frac{1}{2}\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} dm$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}m^2 - \frac{2}{b}mn + \frac{d}{b}n^2\right)} e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2nka + (ka)^2\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} e^{-\frac{\pi i}{4}} dm$$
$$= e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2nka + (ka)^2\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(m) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}m^2 - \frac{2}{b}mn + \frac{d}{b}n^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dm.$$

Gunakan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$L_B\{f(t-k)\}(\omega) = e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2nka + (ka)^2\right)} e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} L_B\{f\}(n).$$

Karena $n = \omega - ka$ sehingga diperoleh

$$L_B\{f(t-k)\}(\omega)$$
$$= e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2(\omega-ka)ka + (ka)^2\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} L_B\{f\}(\omega - ka). \qquad (2.27)$$

Perhatikan $e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2(\omega-ka)ka + (ka)^2\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)} e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)}$.

$$e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2(\omega-ka)ka+(ka)^2\right)}e^{i\left(\frac{a}{b}k^2\right)}e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)}$$

$$= e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2\omega ka-2(ka)^2+(ka)^2\right)}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)}e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)}$$

$$= e^{ik\omega\left(\frac{da}{b}-\frac{1}{b}\right)}e^{-\frac{i}{2}k^2a\left(\frac{da}{b}-\frac{1}{b}\right)}.$$

Karena matriks memenuhi $ad-bc=1$ maka $\frac{ad-bc}{1}=\frac{1}{b}$ sehingga $\frac{da}{b}-\frac{1}{b}=c$.

Selanjutnya diperoleh

$$e^{i\frac{1}{2}\frac{d}{b}\left(2(\omega-ka)ka+(ka)^2\right)}e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}k^2\right)}e^{i\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{b}k\omega\right)} = e^{ik\omega c}e^{-i\frac{ak^2c}{2}}.$$

Maka persamaan (2.27) menjadi

$$L_B\{f(t-k)\}(\omega) = e^{ik\omega c}e^{-i\frac{ak^2c}{2}}L_B\{f\}(\omega-ka). \blacksquare$$

d. Sifat Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0}f(t) = e^{i\omega_0 x}f(t)$, *maka*

$$L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f(t)\right\}(\omega) = L_B\left\{e^{it\omega_0}f(t)\right\}(\omega)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}bd\omega_0{}^2+id\omega\omega_0}L_B\{f\}(\omega-b\omega_0). \tag{2.28}$$

Bukti. Berdasarkan definisi TKL pada persamaan (2.22), diperoleh

$$L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f(t)\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0}f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0}f(t)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t(\omega-\omega_0b)+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt.$$

Misalkan $\omega - \omega_0 b = m$, $\omega = m + \omega_0 b$ maka

$$
\begin{aligned}
L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right\}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}tm + \frac{d}{b}(m+\omega_0 b)^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}tm + \frac{d}{b}m^2 + 2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b - \frac{\pi}{2}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}tm + \frac{d}{b}m^{/2} - \frac{\pi}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} dt.
\end{aligned}
$$

Karena $e^{i\frac{1}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)}$ adalah konstanta, maka

$$
L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right\}(\omega) = e^{i\frac{1}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}tm + \frac{d}{b}m^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dt.
$$

Gunakan definisi TKL pada persamaan (2.22), maka

$$
\begin{aligned}
L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right\}(\omega) &= e^{i\frac{1}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} L_B\{f\}(m) \\
&= e^{im\omega_0 d + \frac{id{\omega_0}^2 b}{2}} L_B\{f\}(m).
\end{aligned}
$$

Karena $m = \omega - \omega_0 b$ maka

$$
\begin{aligned}
L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right\}(\omega) &= e^{i(\omega - \omega_0 b)\omega_0 d + \frac{id{\omega_0}^2 b}{2}} L_B\{f\}(\omega - \omega_0 b) \\
&= e^{i\omega\omega_0 d} e^{-i\frac{bd{\omega_0}^2}{2}} L_B\{f\}(\omega - \omega_0 b). \blacksquare
\end{aligned}
$$

e. Sifat Translasi dan Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t-k)$ *maka*

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega) = L_B\{e^{it\omega_0}f(t-k)\}(\omega) \tag{2.29}$$
$$= e^{-\frac{i}{2}(ack^2+bd\omega_0{}^2)+i(ck+d\omega_0)\omega-ibck\omega_0}L_B\{f\}(\omega - ak - b\omega_0).$$

Bukti. Berdasarkan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0}f(t-k)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-2t\left(\frac{\omega}{b}-\omega_0\right)+\frac{d\omega^2}{b}-\frac{\pi}{2}\right)}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t(\omega-\omega_0 b)+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt.$$

Misalkan $\omega - \omega_0 b = m$, $\omega = m + \omega_0$ maka

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}tm+\frac{d}{b}(m+\omega_0 b)^2-\frac{\pi}{2}\right)}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}tm+\frac{d}{b}m^2-\frac{\pi}{2}\right)}e^{\frac{i}{2}(2m\omega_0 d+d\omega_0{}^2 b)}dt.$$

Misalkan $t - k = n$, $t = n + k$ dan $dt = dn$ maka

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(n)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}(n+k)^2-\frac{2}{b}(n+k)m+\frac{d}{b}m^2-\frac{\pi}{2}\right)}e^{\frac{i}{2}(2m\omega_0 d+d\omega_0{}^2 b)}dn$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(n)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}(n^2+2nk+k^2)-\frac{2}{b}nm-\frac{2}{b}km+\frac{d}{b}m^2-\frac{\pi}{2}\right)}e^{\frac{i}{2}(2m\omega_0 d+d\omega_0{}^2 b)}dn$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}n^2 - \frac{2}{b}n(m-ak) + \frac{d}{b}m^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\frac{ak^2}{b}} e^{-\frac{i}{2}\frac{2}{b}km} e^{\frac{i}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} dn.$$

Misalkan $m - ak = l$, $m = l + ak$ maka diperoleh

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}n^2 - \frac{2}{b}nl + \frac{d}{b}(l+ak)^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\frac{ak^2}{b}}$$

$$e^{\left(-\frac{i}{2}\right)\frac{2}{b}k(l+ak)} e^{\frac{i}{2}\left(2m\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} dn$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}n^2 - \frac{2}{b}nl + \frac{d}{b}l^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{\frac{i\,d}{2b}\left(2lak + (ak)^2\right)}$$

$$e^{\left(\frac{i}{2}\right)\frac{ak^2}{b}} e^{\left(-\frac{i}{2}\right)\frac{2}{b}k(l+ak)} e^{\frac{i}{2}\left(2(l+ak)\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)} dn.$$

Gunakan definisi TKL pada persamaan (2.22), diperoleh

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega)$$

$$= \left(e^{\frac{i}{2}\frac{d}{b}\left(2lak + (ak)^2\right)} e^{\frac{i}{2}\frac{ak^2}{b}} e^{-\frac{i}{2}\frac{2}{b}k(l+ak)}\right)\left(e^{\frac{i}{2}\left(2(l+ak)\omega_0 d + d{\omega_0}^2 b\right)}\right) L_B\{f\}(l).$$

Karena $m = l + ak$, $l = m - ak$ dan $\omega - \omega_0 b = m$ serta berdasarkan sifat (a) dan (b), maka

$$L_B\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\}(\omega) = e^{ikmc} e^{\left(-\frac{i}{2}\right)ak^2c} e^{im\omega_0 d} e^{\frac{i}{2}bd{\omega_0}^2} L_B\{f\}(m-ak)$$

$$= e^{\left(-\frac{i}{2}\right)ak^2c} e^{\frac{i}{2}bd{\omega_0}^2} e^{ikmc} e^{im\omega_0 d} L_B\{f\}(m-ak).$$

Karena $m = \omega - \omega_0 b$ maka

$$L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\right\}(\omega)$$
$$= e^{-\frac{i}{2}ak^2c}e^{\frac{i}{2}bd\omega_0{}^2}e^{im(kc+\omega_0 d)}L_B\{f\}(\omega-\omega_0 b-ak)$$
$$= e^{-\frac{i}{2}(ack^2+bd\omega_0{}^2)+i(ck+d\omega_0)\omega-ibck\omega_0}L_B\{f\}(\omega-\omega_0 b-ak).\ \blacksquare$$

(Zulfajar, 2013).

f. Turunan pada TKL

Misalkan $f(t)\in L^1(\mathbb{R})$. *Jika* $L_B\left\{\frac{d^l}{dt^l}f(t)\right\}(\omega)$ *ada, maka diperoleh*

$$L_B\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}(\omega)=\left(-c\omega i+a\frac{d}{d\omega}\right)^n L_B\{f(t)\}(\omega),\qquad n\in\mathbb{N} \tag{2.30}$$

Bukti. (Bahri dan Ashino, 2021).

g. Konvolusi pada TKL

Definisi 2.4.2 (Konvolusi)

Diberikan $f,g\in L^1(\mathbb{R})$. *Dan fungsi* $W(t,x)=e^{\frac{a}{b}ix(x-t)}$. *Dengan operasi* $\star$ *diperoleh*

$$(f\star g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(t-x)W(t,x)dx. \tag{2.31}$$

Teorema 2.4.1

Misalkan $f,g\in L^1(\mathbb{R})$. *Maka, transformasi kanonik linier dari* $f\star g$ *ditulis sebagai*

$$L_B\{f\star g\}(\omega)=\sqrt{2\pi b}\,e^{-\frac{id}{2b}\omega^2}L_B\{f\}(\omega)L_B\{g\}(\omega). \tag{2.32}$$

Bukti. Dari definisi konvolusi TKL pada persamaan (2.31) dan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$L_B\{f \star g\}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)W(t,x)e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dxdt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)e^{ixa\left(\frac{x-t}{b}\right)}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2-\frac{2}{b}t\omega+\frac{d}{b}\omega^2-\frac{\pi}{2}\right)}dxdt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)e^{ixa\left(\frac{x-t}{b}\right)}e^{i\left(\frac{at^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{t\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}\,dxdt. \quad (2.33)$$

Misalkan $t - x = v, x - t = -v, t = v + x, dt = dv$ maka persamaan (2.33) menjadi

$$L_B\{f \star g\}(\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(v)e^{-ixa\left(\frac{v}{b}\right)}e^{i\left(\frac{a(v+x)^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{(v+x)\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}dxd$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixa\left(\frac{v}{b}\right)}e^{i\left(\frac{a\left(v^2+2vx+x^2\right)}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{v\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}g(v)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\left(\frac{ax^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{x\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}dxg(v)e^{i\left(\frac{av^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{v\omega}{b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}dv \quad (2.34)$$

Kalikan kedua ruas persamaan (2.34) dengan $\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{\frac{id}{2b}\omega^2}$ sehingga diperoleh

$$L_B\{f \star g\}(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{\frac{id}{2b}\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\left(\frac{ax^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{x\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{i\left(\frac{av^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{v\omega}{b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\left(\frac{ax^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{x\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{i\left(\frac{av^2}{2b}\right)}e^{-i\left(\frac{v\omega}{b}\right)}e^{i\left(\frac{d\omega^2}{2b}\right)}e^{-\frac{\pi}{4}}dv. \quad (2.35)$$

Dari definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$L_B\{f \star g\}(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{\frac{id}{2b}\omega^2} = L_B\{f\}(\omega)L_B\{g\}(\omega).$$

Contoh 2.6

Diberikan fungsi Gaussian $f(t) = e^{-kt^2}$, dengan $k > 0$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Akan dicari transformasi kanonik linier dari fungsi tersebut.

Berdasarkan definisi TKL pada persamaan (2.22) diperoleh

$$\begin{aligned}
L_B\{f(t)\}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt^2}\, e^{\frac{i}{2}\left(\frac{0}{1}t^2 - \frac{2}{1}t\omega + \frac{0}{1}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt^2}\, e^{\frac{i}{2}\left(-2t\omega - \frac{\pi}{2}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt^2}\, e^{-it\omega} e^{-\frac{i\pi}{4}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\pi}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt^2}\, e^{-it\omega} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t^2 - \frac{it\omega}{k}\right)}\, dt.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
L_B\{f(t)\}(\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t^2+\frac{it\omega}{k}+\left(\frac{i\omega}{2k}\right)^2-\left(\frac{i\omega}{2k}\right)^2\right)} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t^2+\frac{it\omega}{k}+\left(\frac{i\omega}{2k}\right)^2\right)+k\left(\frac{i\omega}{2k}\right)^2} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t+\frac{i\omega}{2k}\right)^2+k\left(\frac{i\omega}{2k}\right)^2} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t+\frac{i\omega}{2k}\right)^2+k\left(\frac{(-1)\omega^2}{4k^2}\right)} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t+\frac{i\omega}{2k}\right)^2-\frac{\omega^2}{4k}} dt \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\left(t+\frac{i\omega}{2k}\right)^2} dt.
\end{aligned}
$$

Misalkan $u = t + \frac{i\omega}{2k}$, $du = dt$, diperoleh

$$
L_B\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ku^2} du.
$$

Diketahui $f(t)$ merupakan fungsi genap (Contoh 2.1), sehingga dengan menggunakan persamaan (2.6) maka persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$
L_B\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, 2 \int_{0}^{\infty} e^{-ku^2} du.
$$

Misalkan $ku^2 = p$, $\frac{dp}{du} = 2ku$, $du = \frac{dp}{2ku}$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
L_B\{f(t)\}(\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, 2\int_0^\infty e^{-p}\,\frac{dp}{2ku} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \int_0^\infty e^{-p}\,\frac{dp}{ku} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \int_0^\infty e^{-p}\,(ku)^{-1} dp \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \int_0^\infty (ku^2)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, k^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty (ku^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} k^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty p^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan sifat fungsi gamma untuk $n = \frac{1}{2}$ pada persamaan (2.9) diperoleh

$$
\begin{aligned}
L_B\{f(t)\}(\omega) &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} k^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \\
&= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \sqrt{\frac{\pi}{k}}.
\end{aligned}
$$

Jadi, diperoleh transformasi kanonik linier dari fungsi Gaussian $f(t) = e^{-kt^2}$ dengan $k > 0$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah $L_B\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$.

II.5 Invers Transformasi Kanonik Linier

Definisi 2.5.1 (Invers Transformasi Kanonik Linier)

Misalkan $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *dan* $B^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *adalah sebuah matriks parameter sedemikian sehingga* $\det(B) = 1$. *Invers transformasi kanonik linier* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *didefinisikan sebagai*

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} L_B\{f(t)\}(\omega) K_{B^{-1}}(t,\omega)\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} L_B\{f(t)\}(\omega) \overline{K_B(\omega,t)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} L_B\{f(t)\}(\omega) e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} d\omega. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Contoh 2.7

Diberikan transformasi kanonik linier $L_B\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$, dengan $k > 0$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Akan dicari invers dari transformasi kanonik linier tersebut.

Berdasarkan definisi invers TKL pada persamaan (2.36) diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} L_B\{f(t)\}(\omega) e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}t^2 - \frac{2}{b}t\omega + \frac{d}{b}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \sqrt{\frac{\pi}{k}}\; e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{0}{1}t^2 - \frac{2}{1}t\omega + \frac{0}{1}\omega^2 - \frac{\pi}{2}\right)} d\omega
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}} \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{i}{2}\left(-2t\omega - \frac{\pi}{4}\right)} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{-\frac{i}{2}\left(-2t\omega - \frac{\pi}{4}\right)} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{-\frac{i}{2}\left(-2t\omega - \frac{\pi}{4}\right)} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{it\omega + \frac{i\pi}{4}} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{it\omega} e^{\frac{i\pi}{4}} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{it\omega} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{4}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{it\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\, e^{it\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}\left(\omega^2 - 4kit\omega\right)} d\omega.$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna, maka diperoleh

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}\left(\omega^2 - 4kit\omega + (2kit)^2 - (2kit)^2\right)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(\omega^2 - 4kit\omega + (2kit)^2 + \frac{1}{4k}(2kit)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(\omega-2kit)^2}\, e^{\frac{1}{4k}(2kit)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(\omega-2kit)^2}\, e^{\frac{(2kit)^2}{4k}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(\omega-2kit)^2}\, e^{-kt^2} d\omega$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(\omega-2kit)^2} d\omega.$$

Misalkan, $y = \omega - 2kit$, $dy = d\omega$ diperoleh

$$f(t) = \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}y^2} dy.$$

Diketahui $f(t)$ merupakan fungsi genap (Contoh 2.1), sehingga dengan menggunakan persamaan (2.6) maka persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}y^2} dy.$$

Misalkan, $\frac{1}{4k}y^2 = p$, $\frac{dp}{dy} = 2\frac{y}{4k}$, $dy = \frac{4k}{2y}dp$ diperoleh

$$f(t) = \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, 2\int_{0}^{\infty} e^{-p}\frac{4k}{2y} dp$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{0}^{\infty} e^{-p}\frac{4k}{y}\, dp$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{0}^{\infty} e^{-p}\left(\frac{y}{4k}\right)^{-1} dp$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{y^2}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-p} dp$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\left(\frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y^2}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-p}dp$$

$$= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}(4k)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty} p^{-\frac{1}{2}}\, e^{-p}dp$$

Dengan menggunakan sifat fungsi gamma untuk $n = \frac{1}{2}$ pada persamaan (2.9) diperoleh

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sqrt{4k}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{e^{-kt^2}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}2\sqrt{k}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{e^{-kt^2}}{\pi}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} \\ &= e^{-kt^2}. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh invers dari transformasi kanonik linier $L_B\{f(t)\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4k}}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ dengan $k > 0$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah $f(t) = e^{-kt^2}$.

Perbandingan definisi dan sifat-sifat antara transformasi Fourier dan transformasi kanonik linier dapat dilihat pada tabel dibawah ini.

Tabel 2.1 Perbandingan definisi dan sifat-sifat TF dan TKL

No	Sifat	Perbandingan	
1.	Definisi	TF	$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$
		TKL	$L_B\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_B(\omega,t)dt$
2.	Sifat Linier	TF	$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha\mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta\mathcal{F}\{g\}(\omega)$

		TKL	$L_B\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha L_B\{f\}(\omega) + \beta L_B\{g\}(\omega)$
3.	Sifat Perkalian Konstanta	TF	$\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\{f\}(\omega)$
		TKL	$L_B\{kf\}(\omega) = kL_B\{f\}(\omega)$
4.	Sifat Translasi	TF	$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)$
		TKL	$L_B\{\tau_k f(t)\} = e^{-\frac{1}{2}iack^2 + ick\omega} L_B\{f\}(\omega - ak)$
5.	Sifat Modulasi	TF	$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)$
		TKL	$L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f(t)\right\} = e^{-\frac{i}{2}bd\omega_0{}^2 + id\omega\omega_0} L_B\{f\}(\omega - b\omega_0)$
6.	Sifat Translasi dan Modulasi	TF	$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)$
		TKL	$L_B\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(t)\right\} = e^{-\frac{i}{2}(ack^2 + bd\omega_0{}^2) + i(ck + d\omega_0)\omega\ - ibck\omega_0} L_B\{f\}(\omega - ak - b\omega_0)$

II.6 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Prinsip ketidakpastian Heisenberg merupakan salah satu fakta penting dalam mekanika kuantum. Pada tahun 1927, Werner Heisenberg mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti. Asas Ketidakpastian menyatakan, bahwa posisi dan momentum elektron tidak bisa ditentukan pada saat yang bersamaan, karena semakin akurat momentumnya ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya, demikian sebaliknya.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2.37)$$

dimana,

$\Delta x =$ ketidakpastian posisi

$\Delta p =$ ketidakpastian momentum

$h =$ konstanta Planck.

Pembuktiannya secara matematis diberikan oleh Wolfgang Pauli dan Hermann Weyl pada tahun 1928. Prinsip ketidakpastian Heisenberg memberikan batasan dimana tidak adanya hasil pengukuran mutlak dalam setiap pengukuran kuantum (Heisenberg, 1927).