ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK

Oleh :
A R M I L A
H 111 99 019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2004

ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK

Skripsi
Untuk melengkapi tugas-tugas dan memenuhi
Syarat-syarat dalam memperoleh
Gelar Sarjana Matematika

Oleh :
A R M I L A
H 111 99 019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2004

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh- sungguhnya bahwa Skripsi yang saya buat dengan judul :

" ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK"

adalah benar hasil kerja saya sendiri bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 15 April 2004

ARMILA
H 111 99 019

ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Mawardi S.Si, M.Si.	**A. Kresna Jaya S.Si, M.Si.**
NIP. 132 205 479	**NIP. 132 259 231**

Pada tanggal April 2004

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini, senin tanggal 8 Maret 2004, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

" ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK"

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 April 2004

Panitia Ujian Skripsi

			Tanda Tangan
1. Ketua	:	Drs. Khaeruddin M.Sc	( )
2. Sekretaris	:	Erna Tri Herdiani, S.Si, M.Si	( )
3. Anggota	:	Dra. Nur Erawati, Msi	( )
4. Ex Officio	:	Mawardi S.Si, M.Si	( )
5. Ex Officio	:	A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si	( )

KATA PENGANTAR

Semua mesti disyukuri, betapa pun sederhananya apa yang telah kita peroleh dalam hidup ini, meski banyak yang tak bisa kita pahami sepenuhnya. Dan seperti itulah, atas izin Allah, Tuhan Yang Maha Kasih dan Maha Sayang, sehimpun skripsi ini akhirnya bisa penulis selesaikan.

Inilah yang bisa Penulis buat untuk menunjukkan hasil yang penulis peroleh selama ini. Inilah, dengan segenap kekurangannya, sekedar membagi sepotong pengalaman kecil yang mungkin berarti, kepada yang kelak membacanya.

Tidak sedikit kendala yang penulis hadapi namun berkat bimbingan dari berbagai pihak semua pun terlewatkan. Karenanya kepada yang paling penulis repotkan, penulis ucapkan terima kasih yang sedalam- dalamnya. Ayahanda ***"Achmad karim"*** , atas bantuan materinya dan Ibunda "***Maswati***" I can't Live without you. ***K' Nani***, ***K'V n Mas Gani***, ***K'Ari***, ***K'Yanti***, ***Tini*** bondengku, ***Ade' Celli*** ganjen n ***Si*** *tomboy* ***Lina***, thanks for all your patient.

Tak lupa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

- Bapak **Mawardi S.Si, M.Si** dan Bapak **A. Kresna Jaya S.Si, M.Si** selaku pembimbing utama dan pembimbing pertama atas kesediaan waktuya memberikan petunjuk dan bimbingan kepada penulis hingga skripisi ini terselesaikan.
- Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** dan **Bapak Drs. Syamsuddin Toaha, M.Sc** selaku ketua Jurusan dan sekertaris Jurusan Matematika fakultas Matematika

dan Ilmu Pengetahuan Alam, para Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya selama perkuliahan serta para staf yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulis menjalani perkuliahan.

- **Fie-*fie's*** room yang setia menampungku saat kepalaku mo ledak, **Ibu, Ayah n Uci** thanks for your dinner, **Fie-fie** yang slalu mengipas hatiku, **Onie** yang dalam tuh harus sama dengan yang diluar, **Dj** take care your body, **Maryam** open your heart, **Inna** ngomongnya jangan nusuk lagi yaa????, **Yani** kamu uda gede, **Henni** don't forget me??
- **Mail n Ulla** jangan berantem lagi, **Anjas n Udang Kering** Sit Up donk, **Icam** take care your girl, , **Make** kamu luucuu, **Akbar** jangan baca buku terus , **Chimenk** open your eyes, **Niswar** makasih programnya. **Eka, Niar, Arni, Rika, Atteck, Jentum, Yayu, Muharram, Suastini, Nurfadilah, Nanna, Fatma, Magfira, Melani, Uswah, Mardiana, Maharani** n rekan- rekan angkatan '99 yang tak bisa saya sebutkan semua.
- **K' Adi, K'Anca, K' Hamka, K'Nanni** n rekan-rekan angkatan '98.
- Adik- adikku: **Indah, Omi, Feby, Rahman, Imran** dan yang tak sempat saya sebutkan.
- **Identitas crew:** Irma Boy, Jimut, Nandar, Syahlan, Jamal, Achiem, Anci, Innang, K'elni, K'Erni, K'Imha, K'Anti, K'Ahmad, K'Hasdin' Bujang Bahri, NilamKArief, Fitri bon, Ana, Wia, Accung, Fandi, Abbas, K'Doel, Warni, Nini n adik-adik magang. Miss U all.

- Rekanku **Santy** yang bantu ngetik makasih ya?
- And my brother **M. Ridwan S.Kel** thanks for all your kindness.

Akhir kalimat, inilah yang bisa penulis lakukan. Kritikan dan saran yang mengacu pada kesempurnaan skripsi ini sangat penulis harapkan, agar semua yang pernah penulis jalani tak sia- sia

Makassar,   Maret 2004

Penulis

ABSTRAK

Metode yang biasa digunakan untuk memperoleh bentuk kanonik matriks asimetrik adalah metode yang digunakan pada ruang vektor R^n atau R^{nxn}. Pada tulisan ini, metode yang digunakan adalah penggunaan aljabar geometrik. Dalam aljabar geometrik diperkenalkan istilah bivektor, multivektor dan pseudoskalar untuk memperoleh bentuk kanonik matriks asimetrik yang isomorfik dengan bentuk kanonik matriks asimetrik pada ruang vektor. Aplikasinya bisa dilihat dalam matriks asimetrik dimensi- 2.

ABSTRACT

Method where usually used to obtain the canonical form of asymetric matrix is method in space vector R^n or R^{nxn}. In this paper, we used geometric algebra. In geometric algebra we introduce terms of bivector, multivector and pseudoscalar to obtain the canonical form of asymetric matrix which isomorfik with the canonical form of asymetric matrix on a space vector. Its application can be seen in 2-dimensional of asymetric matrix.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti
λ	Lambda
$\forall$	Untuk Setiap
$\exists$	Terdapat
α	Alfa
β	Beta
∞	Tak Terhingga
$\leq$	Lebih Kecil Atau Sama
$\geq$	Lebih Besar Atau Sama
$\wedge$	Perkalian Luar
$\cdot$	Perkalian dalam
!	Faktorial
$\in$	Element
$\notin$	Bukan Element

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. LATAR BELAKANG MASALAH

Penyelesaian suatu masalah secara matematik tidak terbatas pada satu metode saja. Satu masalah bisa dipecahkan dengan hasil yang sama dengan metode yang lain. Sebagai contoh, untuk memperoleh bentuk kanonik dari matriks asimetrik tidak terbatas pada metode yang lazim digunakan yaitu penerapan ruang vektor pada bidang kompleks saja. Tapi, hasil yang sama bisa diperoleh melalui metode lain yaitu penerapan aljabar geometrik.

Aljabar geometrik merupakan bahasa matematika untuk mempelajari objek- objek geometri. Hal semacam itu banyak ditemukan dalam fisika, misal kecepatan sebuah partikel dapat direpresentasikan dengan bidang rotasi dan besarnya rotasi, objek ini disebut dengan *bivektor* yang merupakan kuantitas geometri berbentuk bidang berarah tanpa terkait dengan sistem koordinat apapun.

Sekarang ini aljabar geometrik telah diterapkan pada bidang- bidang seperti matematika fisika, mekanika kuantum, elektromagnetik, gravitasi dan relativitas .

Pada tugas akhir ini, penulis mencoba menggunakan aljabar geometrik untuk memperoleh bentuk kanonik dari matriks asimetrik sebagai suatu bivektor.

Karenanya penulis bermaksud mempelajari dan menuangkannya dalam bentuk tulisan dengan judul :

ANALISIS MATRIKS ASIMETRIK SEBAGAI BIVEKTOR REAL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR GEOMETRIK

I.2. RUMUSAN MASALAH

Penggunaan aljabar geometrik untuk memperoleh bentuk kanonik matriks asimetrik sebagai bivektor real

I.3. BATASAN MASALAH

Penulis membatasi penggunaan aljabar geometrik pada matriks bujursangkar asimetrik yang berdimensi dua.

I.4. TUJUAN PENULISAN

1. Menggunakan aljabar geometrik untuk menunjukkan bentuk kanonik matriks asimetrik yang isomorfik dengan bentuk kanonik matriks asimetrik pada ruang vektor bidang kompleks.
2. Menunjukkan penggunaan aljabar geometrik bahwa matriks asimetrik adalah bivektor real

1.5. SISTEMATIKA PENULISAN

BAB I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

1.2. Rumusan Masalah

1.3. Batasan Masalah

1.4. Tujuan Penulisan

1.5. Sistematika Penulisan

BAB II. TEORI PENDUKUNG

2.1. Bivektor

2.1.1 Bidang Euclid

2.1.2 Dimensi Tiga

2.2. Invers Vektor

2.3. Blade

2.4. Grade

2.5. Pseudoskalar

2.6. Matriks Asimetrik

2.7. Bentuk Kanonik Matriks Asimetrik

BAB III. ALJABAR GEOMETRIK

3.1. Perkalian Geometrik

3.2. Aljabar Geometrik Dalam Bidang (Dimensi- 2)

3.3. Aljabar Geometrik Dalam Ruang (Dimensi- 3)

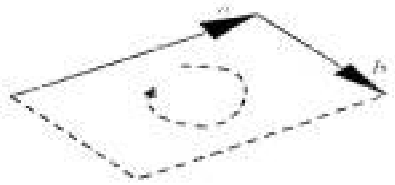
3.4. Dualitas

BAB II

TEORI PENDUKUNG

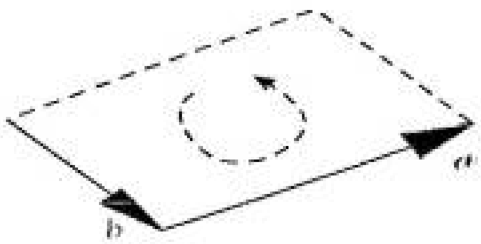
2.1. Bivektor

Aljabar geometrik memperkenalkan sebuah operator yang dalam beberapa hal berlawanan dengan hasil kali dalam. Operator tersebut disebut sebagai perkalian luar. Vektor ini diperluas sepanjang vektor lainnya. Simbol $\wedge$ (wedge) digunakan sebagai notasi operator tersebut. Diberikan dua vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$, perkalian luar $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ditunjukkan seperti dalam gambar 2.1.



Gambar 2.1 : Vektor $\mathbf{a}$ diperluas sepanjang vektor $\mathbf{b}$.

Hasil kuantitas tersebut adalah subruang dimensi- 2, dan disebut sebagai *bivektor.* Bivektor mempunyai daerah yang sama dengan bidang parallelogram yang dibangun oleh $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ dengan orientasi yang searah jarum jam.



Gambar 2.2 : Vektor $\mathbf{b}$ diperluas sepanjang vektor $\mathbf{a}$.

Jika $\mathbf{b}$ diperluas sepanjang $\mathbf{a}$ akan menghasilkan sebuah bivektor dengan luasan yang sama tapi orientasinya berlawanan arah jarum jam, seperti ditunjukkan dalam gambar 2.2. Dalam istilah matematika, perkalian luar adalah antikomutatif, yang berarti :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{2.1}$$

Akibatnya :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0 \tag{2.2}$$

yang berarti jika $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$ maka hanya 0 sama dengan negasinya sendiri (0=-0) . Interpretasi geometriknya adalah sebuah vektor yang diperluas sepanjang vektor itu sendiri. Jelas bivektor yang dihasilkan bukan suatu luasan.

Beberapa sifat dari perkalian luar adalah ;

$(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ *Asosiatif terhadap perkalian dengan skalar* (2.3)

$\lambda (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lambda$ *Komutatif terhadap perkalian skalar* 2.4)

$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$ *Distributif atas penambahan vektor* (2.5)

dimana $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dan $\mathbf{c}$ adalah vektor dan λ adalah skalar.

2.1.1. Bidang Euclid

Misalkan vektor $\mathbf{a}$ ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor basis $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Bivektor dapat juga dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis- basisnya.

Untuk mengilustrasikannya, anggap dua vektor **a** dan **b** dalam bidang Euclid R^2. Gambar 2.3 menunjukkan dekomposisi $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ dan $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ pada basis vektor $\mathbf{e}_1$ dan $\mathbf{e}_2$.

Dekomposisinya ditunjukkan sebagai berikut :

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$$

Perkalian luar **a** dan **b** menjadi :

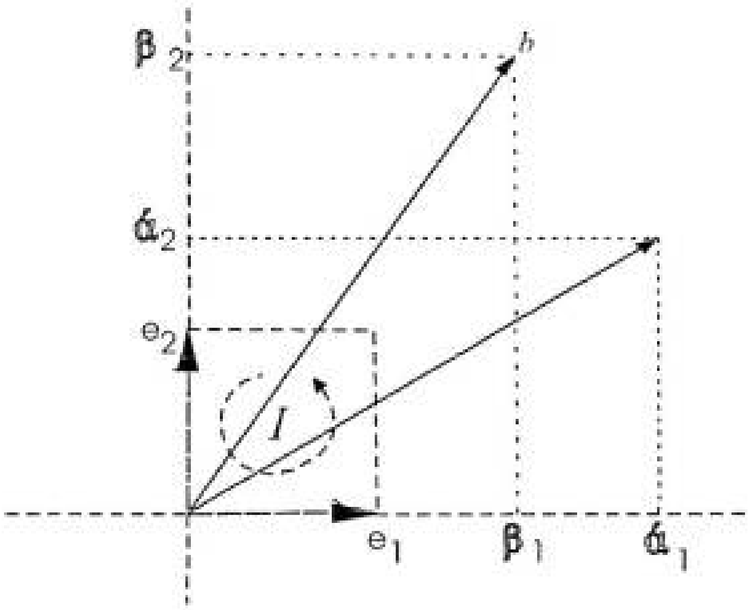
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) \wedge (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2)$$

Dengan menggunakan pers. (2.5) bisa ditulis kembali menjadi :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1) + (\alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2) + (\alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1) + (\alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.3) dan (2.4) diperloleh:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1 \beta_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + (\alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (\alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + (\alpha_2 \beta_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2)$$



Melalui penerapan persamaan (2.2) diperoleh:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (\alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1)$$

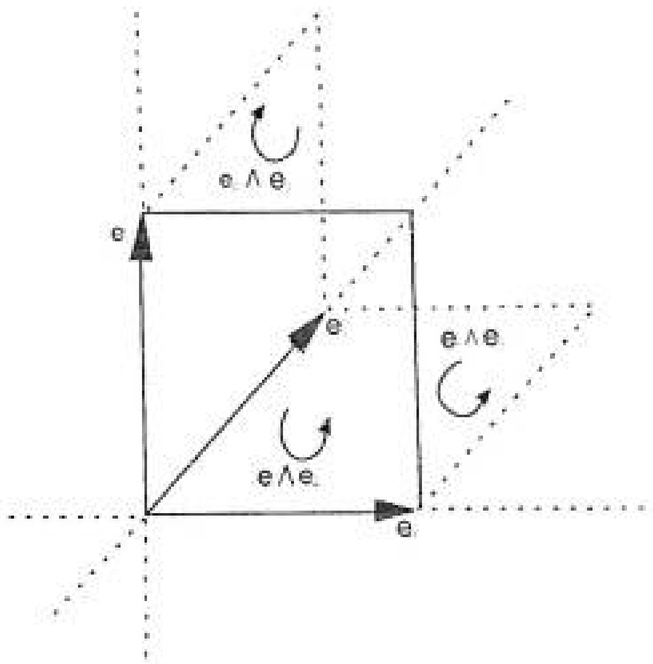
Perhatikan gambar 2.4. $\mathbf{i}$ mewakili perkalian luar $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ yang merupakan basis bivektor. Dari persamaan (2.1) berarti $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{i}$. Persamaan diatas menjadi:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\,\mathbf{i} \tag{2.6}$$

Menunjukkan penghitungan perkalian luar dari dua buah vektor, $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ dan $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$. Maka, dalam dimensi-2, bivektor diungkapkan sebagai basis bivektor yang disebut $\mathbf{i}$. Dalam bidang Euclid $\mathbf{i}$ digunakan untuk menyatakan $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

2.1.2. Dimensi Tiga

Dalam Ruang dimensi tiga R^3, menjadi lebih sulit lagi. Perhatikan bahwa basis ortogonal terdiri atas tiga vektor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, dan $\mathbf{e}_3$. Akibatnya terdapat tiga buah basis bivektor, yaitu $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{13}$, dan $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{23}$, yang dilukiskan seperti dalam gambar 2.4.



Gambar 2.4 :Basis bivektor dimensi- 3

Perkalian luar dari dua vektor akan menghasilkan kombinasi linear dari tiga basis vektor. Akan ditunjukkan dengan menggunakan dua vektor **a** dan **b**:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$$

Perkalian luar $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ menjadi:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3) \wedge (\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3) \\ &= \alpha_1\mathbf{e}_1 \wedge \beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_1\mathbf{e}_1 \wedge \beta_2\mathbf{e}_2 + \alpha_1\mathbf{e}_1 \wedge \beta_3\mathbf{e}_3 + \\ &\quad \alpha_2\mathbf{e}_2 \wedge \beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \wedge \beta_2\mathbf{e}_2 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \wedge \beta_3\mathbf{e}_3 + \\ &\quad \alpha_3\mathbf{e}_3 \wedge \beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_3 \wedge \beta_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 \wedge \beta_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat perkalian skalar :

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1+\alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+\alpha_1\beta_3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+$$

$$\alpha_2\beta_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1+\alpha_2\beta_2\mathbf{e}_2\wedge\ \mathbf{e}_2+\alpha_2\beta_3\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3+$$

$$\alpha_3\beta_1\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1+\alpha_3\beta_2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2+\alpha_3\beta_3\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3$$

Perhatikan kembali persamaan (2.1) dan (2.2), kita punya aturan untuk $i\neq j$:

$\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_i=0$ *Perkalian luar dengan dirinya sendiri adalah nol*

$\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_{ij}$ *Perkalian luar dari basis vektor sama dengan basis bivektor*

$\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_i=-\,\mathbf{e}_{ij}$ *Antikomutatif*

Dengan menggunakan persamaan di atas, maka diperoleh :

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_{12}+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\mathbf{e}_{13}+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_{23}$$

Yang merupakan perkalian luar dari dua vektor dalam ruang Euclid dimensi tiga.

Untuk beberapa hal perkalian luar tampaknya mirip dengan perkalian silang. Tapi kedua perkalian tersebut tidak sama. Perkalian luar berlaku untuk semua dimensi , sedangkan perkalian silang hanya terdefinisi dalam dimensi- 3.

2.2. Invers Vektor

Invers dari vektor pada perkalian geometrik sebagai berikut :

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{x}} \stackrel{def}{=} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}, \qquad \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \tag{2.7}$$

Selanjutnya, invers bisa diperiksa melalui perhitungan berikut :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} = 1 \tag{2.8}$$

Reverse (urut- balik) vektor dalam perkalian ditulis :

$$(\mathbf{ab})^T = \mathbf{ba} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{i}^T = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^T = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{i} \tag{2.10}$$

2.3. Blade

Sejauh ini kita telah mengetahui skalar, vektor dan bivektor yang masing- masing menyatakan subruang dimensi-0, dimensi- 1, dimensi- 2. Lebih jauh lagi, diperkenalkan istilah blade- k, dimana k merujuk terhadap dimensi dari subruang yang dibangun oleh blade-blade. Bilangan k disebut grade dari blade. Skalar adalah blade- 0, vektor adalah blade-1, bivektor adalah blade- 2, dan trivektor adalah blade- 3. Dengan kata lain, grade dari vektor adalah satu, dan grade dari trivektor adalah tiga. Dalam ruang yang berdimensi lebih tinggi terdapat blade- 4, blade- 5, atau yang lebih tinggi lagi.

Sekarang bagaimana kita menunjukkan vektor sebagai kombinasi linear dari basis vektor dan bivektor sebagai kombinasi linear dari basis bivektor. Hal ini menunjukkan bahwa setiap blade- k bisa didekomposisikan sebagai himpunan basis dari blade- k. Tabel di bawah ini memuat basis blade dari subruang yang berdimensi 2, 3 dan 4.

k	**Blade basis-** k	**total**
Blade- 0 (scalar)	$\{1\}$	1
Blade- 1 (vektor)	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$	2
Blade- 2 (bivektor)	$\{\mathbf{e}_{12}\}$	1

T abel 2.1 : Basis blade dalam dimensi- 2

k	**Blade basis-** k	**total**
Blade- 0 (scalar)	$\{1\}$	1
Blade- 1 (vektor)	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	3
Blade- 2 (bivektor)	$\{\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}\}$	3
Blade- 3 (trivektor)	$\{\mathbf{e}_{123}\}$	1

Tabel 2.2 : Basis blade dalam dimensi- 3

k	**Blade basis-** k	**total**
Blade- 0 (scalar)	$\{1\}$	1
Blade- 1 (vektor)	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$	4
Blade- 2 (bivektor)	$\{\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}\}$	6
Blade- 3 (trivektor)	$\{\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{134}, \mathbf{e}_{234}\}$	4
Blade- 4	$\{\mathbf{e}_{1234}\}$	1

Tabel 2.3 : Basis blade dalam dimensi- 4

Untuk menunjukkan jumlah dari blade- k yang dibutuhkan dalam ruang dimensi- n dapat ditunjukkan melalui koefisien binomial:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Sebagai contoh:

Banyaknya basis bivektor atau blade- 2 dalam ruang dimensi- 3 adalah;

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Banyaknya basis trivektor atau blade- 3 dalam ruang dimensi-3 adalah:

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = 1$$

Banyaknya basis bivektor atau blade- 2 dalam ruang dimensi- 4 adalah :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 4$$

2.4. Grade

Grade dari blade adalah dimensi dari subruang. Multivektor merupakan kombinasi dari grade, seperti kombinasi linear dari blade. Kita menunjukkan bagian blade dengan grade s dari multivektor $\mathbf{A}$ dengan menggunakan $\langle \mathbf{A} \rangle_s$. Untuk multivektor $\mathbf{A} = (4,8,5,6,2,4,9,3) \in G_3$:

$\langle \mathbf{A} \rangle_0 = 4$ Bagian skalar

$\langle \mathbf{A} \rangle_1 = (8,5,6)$ Bagian vektor

$\langle \mathbf{A} \rangle_2 = (2,4,9)$ Bagian bivektor

$\langle \mathbf{A} \rangle_3 = 3$ Bagian trivektor

Setiap multivektor $\mathbf{A}$ dalam G_n dapat dinyatakan sebagai jumlah dari blade:

$$\sum_{k=0}^{n} \langle \mathbf{A} \rangle_k = \langle \mathbf{A} \rangle_0 + \langle \mathbf{A} \rangle_1 + \ldots + \langle \mathbf{A} \rangle_n$$

Dengan notasi di atas kita dapat menunjukkan yang dimaksud dengan perkalian dalam dan perkalian luar dari grade. Perkalian dalam untuk dua vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ menghasilkan sebuah skalar $\mathbf{c}$. Vektor adalah blade- 1, skalar adalah blade- 0.

$$\langle \mathbf{a} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{b} \rangle_1 = \langle \mathbf{ab} \rangle_0$$

Perkalian dari blade- 2 dan blade- 1 menghasilkan blade- 1. Dengan menggunakan notasi multivektor:

$$\langle \mathbf{a} \rangle_1 \langle \mathbf{B} \rangle_2 = \langle \mathbf{aB} \rangle_{2-1}$$

Untuk blade $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ dengan grade s dan t :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_u \text{ , dimana } u = \begin{cases} s > t, 0 \\ s \leq t, t-s \end{cases}$$

Bisa dikatakan bahwa perkalian dalam adalah operasi grade terendah.

Dan tentu saja, perkalian luar merupakan kebalikannya yaitu operasi dengan grade tertinggi. Untuk dua blade- 1 atau vektor, perkalian luar dihasilkan dalam blade- 2 atau bivektor:

$$\langle \mathbf{a} \rangle_1 \wedge \langle \mathbf{b} \rangle_1 = \langle \mathbf{ab} \rangle_2$$

Perkalian luar diantara blade- 2 dan blade- 1 menghasilkan 2 + 1 = 3 blade atau trivektor. Jadi untuk dua blade yaitu blade $\mathbf{A}$ dan blade $\mathbf{B}$ dengan grade s dan t :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \wedge \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_{s+t}$$

2.5. Pseudoskalar

Dalam pembahasan (2.3) kita melihat perhitungan jumlah dari blade dari grade yang diberikan. Akan ditunjukkan bahwa setiap aljabar geometrik hanya mempunyai satu basis blade- 0 atau basis skalar, dimensi bebas dari aljabar :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Untuk aljabar geomertrik G_n jumlah dari blade dengan dimensi- n adalah

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Dalam G_2 dipunyai $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}$ seperti ditunjukkan dalam gambar (2.3). Dalam G_3 adalah trivektor $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123}$.

Secara umum basis blade tertinggi dalam dimensi- n disebut pseudoskalar.

2.6. Matriks Asimetrik

Sebuah matriks A dikatakan ***matriks asimetrik*** jika pertukaran baris dan kolomnya (transpose $A \rightarrow A^T$) memberikan negatif terhadap matriks aslinya.

$$A^T = -A \tag{2.11}$$

atau dinyatakan dalam komponen

$$a_{kl} = -a_{lk} \qquad \forall\, k,l = 1,2,\ldots,n \tag{2.12}$$

dan elemen- elemen pada diagonal utamanya semuanya adalah nol.

$$a_{kk} = 0 \qquad \forall\, k = 1,2,\ldots,n \tag{2.13}$$

Misalnya bentuk matriks asimetrik 3 x 3 dituliskan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

2. 7. Bentuk Kanonik Klasik Matriks Asimetrik

Menurut Maltsev bentuk kanonik matris asimetrik menggambarkan transformasi Skewsymetrik :[3]

" Matriks A dalam kesatuan ruang uniter real dari transformasi Skewsymetrik, dengan basis ortonormal, diasumsikan dalam bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & & & & & & \\ -v_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & v_m & & & \\ & & & -v_m & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

BAB III

ALJABAR GEOMETRIK

Ruang R^n yang menghasilkan himpunan dari basis blade yang membangun aljabar geometrik dari subruang, dinotasikan dengan G_n. Sebagai contoh, basis untuk G_2 adalah :

$$\left\{ \underset{\text{basis skalar}}{\mathbf{1}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}_{\text{basis vektor}}, \quad \underset{\text{basis bivektor}}{\mathbf{i}} \right\}$$

Dimana, 1 digunakan sebagai notasi dari basis blade- 0 atau basis skalar. Setiap elemen dari aljabar geometrik G_2 dapat ditunjukkan sebagai kombinasi linear dari basis blade. Contoh yang lain adalah basis dari G_3 yaitu :

$$\left\{ \underset{\text{basis skalar}}{\mathbf{1}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}_{\text{basis vektor}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}}_{\text{basis bivektor}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_{123}}_{\text{basis trivektor}} \right\}$$

Jumlah total dari basis blade aljabar geometrik dapat dihitung melalui :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{3.1}$$

Untuk beberapa aljabar geometrik yan lain dapat dilihat dalam tabel berikut:

G_n	**Basis Blade**	**Total**
G_0	$\{1\}$	$2^0 = 1$
G_1	$\{1; \mathbf{e}_1\}$	$2^1 = 2$
G_2	$\{1; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_{12}\}$	$2^2 = 4$
G_3	$\{1; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}; \mathbf{e}_{123}\}$	$2^3 = 8$
G_4	$\{1; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{24}, \mathbf{e}_{34}; \mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{124}, \mathbf{e}_{134}, \mathbf{e}_{234}; \mathbf{e}_{1234}\}$	$2^4 = 16$

Tabel 3.1 : Jumlah basis blade

Multivektor adalah kombinasi linear dari blade- k yang berbeda. Dalam R^2 multivektor berisi bagian scalar, bagian vektor, dan bivektor.

$$V = \underbrace{\alpha_1}_{\text{Bagian skalar}} + \underbrace{\alpha_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2}_{\text{Bagian vektor}} + \underbrace{\alpha_4\mathbf{i}}_{\text{Bagian bivektor}}$$

dimana α_i adalah bilangan real, komponen dari multivektor. Perhatikan bahwa α_i bisa nol, yang berarti blade adalah multivektor juga. Sebagai contoh, jika α_1 dan α_4 adalah nol, kita mempunyai sebuah vector atau blade- 1.

Terlihat bahwa didalam R^2 kita punya $2^2 = 4$ bilangan real untuk menotasikan multivektor yang lengkap. Multivektor dalam R^3 didefinisikan dengan $2^3 = 8$ bilangan real yaitu:

$$W = \underbrace{\alpha_1}_{\text{Bagian skalar}} + \underbrace{\alpha_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2 + \alpha_4\mathbf{e}_3}_{\text{Bagian vektor}} + \underbrace{\alpha_5\mathbf{e}_{12} + \alpha_6\mathbf{e}_{13} + \alpha_7\mathbf{e}_{23}}_{\text{Bagian bivektor}} + \underbrace{\alpha_8\mathbf{e}_{123}}_{\text{Bagian trivektor}}$$

sedangkan multivektor dalam R^4 mempunyai $2^4 = 16$ komponen, dan seterusnya.

3.1. Perkalian Geometrik

Perkalian geometrik dari vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ didefinisikan oleh tiga aturan dasar :

1) $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$, *sifat asosiatif*
2) $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$

   $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$, *sifat distributive kiri dan kanan*
3) $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$, *sifat kontraksi*
4) $\lambda\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,\lambda$

$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}$ hanyalah perkalian dalam (menghasilkan bilangan real), sehingga aturan ketiga ini mengaitkan aljabar dengan kuantitas yang dapat diukur. Formula umum perkalian dalam dari dua buah vektor pun dapat diturunkan. Jika $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah vektor maka $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ juga vektor, dan dengan demikian penerapan aturan ketiga menghasilkan :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\,.\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

bila diperluas didapatkan :

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{ab}+\mathbf{ba}+\mathbf{b}^2$$

selanjutnya didapatkan

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) \tag{3.2}$$

Persamaan (3.2) merupakan perkalian perkalian dalam *(inner product)* dari dua buah vektor dalam aljabar geometrik. Perkalian skalar merupakan bentuk simetrik dan bentuk asimetriknya adalah :

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) \tag{3.3}$$

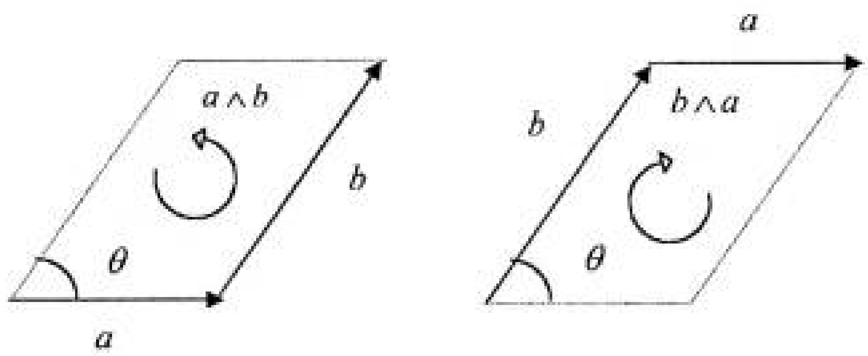
yang mendefinisikan perkalian eksterior/ luar *(outer product)* dari dua buah vektor.

Dari persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{ab}+\mathbf{ba})+\frac{1}{2}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) &= \frac{(\mathbf{ab}+\mathbf{ba})+(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})}{2} \\
&= \frac{\mathbf{ab}+\mathbf{ba}+\mathbf{ab}-\mathbf{ba}}{2} \\
&= \frac{2\mathbf{ab}}{2} \\
&= \mathbf{ab}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh definisi perkalian geometrik

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \tag{3.4}$$



Gambar 3.1 : Perkalian luar dari dua buah vektor menghasilkan sebuah bivektor yang merupakan elemen bidang berarah dengan luas $|a||b|\sin\theta$.

Interpretasi geometris dari perkalian dalam dan luar dalam perkalian geometri dapat dilihat di bawah ini:

Misal $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$ maka diperoleh :

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \qquad \text{(Pers.3.2)}$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \frac{1}{2}(-\mathbf{ba} + \mathbf{ba}) \qquad (\text{Karena } \mathbf{ab} = -\mathbf{ba})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(0)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \tag{3.5}$$

Sedangkan $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ diperoleh :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \qquad \text{(Pers. 3.3)}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ba} - \mathbf{ba})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(0)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \qquad (3.6)$$

Berarti perkalian geometrik $\mathbf{ab}$ antikomutatif *jika dan hanya jika* $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ orthogonal, dan komutatif *jika dan hanya jika* kedua vektor kolinear. Persamaan (3.4) menyatakan bahwa $\mathbf{ab}$ adalah penjumlahan dari bagian komutatif dan antikomutatif.

Kita telah mengetahui perkalian geometrik untuk vektor dengan menggunakan perkalian dalam dan perkalian luar. Perkalian dalam hanya terdefenisi untuk vektor sedangkan perkalian luar hanya untuk blade. Untuk multivektor terdapat beberapa hal yang beda.

Misalkan diberikan multivektor sembarang $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ dalam G_2 :

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2 + \alpha_4\mathbf{i}$$

$$\mathbf{B} = \beta_1 + \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_3\mathbf{e}_2 + \beta_4\mathbf{i}$$

Dengan menggunakan perkalian geometrik, multivektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ diperoleh:

$$\mathbf{AB} = (\alpha_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2 + \alpha_4\mathbf{i})\mathbf{B}$$

Dengan menggunakan sifat kedua dapat ditulis :

$$\mathbf{AB} = \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{e}_1\mathbf{B} + \alpha_3\mathbf{e}_2\mathbf{B} + \alpha_4\mathbf{iB}$$

Jika **B** dikeluarkan :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} = &\left(\alpha_1\left(\beta_1 + \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_3\mathbf{e}_2 + \beta_4\mathbf{i}\right)\right)\\ &+\left(\alpha_2\mathbf{e}_1\left(\beta_1 + \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_3\mathbf{e}_2 + \beta_4\mathbf{i}\right)\right)\\ &+\left(\alpha_3\mathbf{e}_2\left(\beta_1 + \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_3\mathbf{e}_2 + \beta_4\mathbf{i}\right)\right)\\ &+\left(\alpha_4\mathbf{i}\left(\beta_1 + \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_3\mathbf{e}_2 + \beta_4\mathbf{i}\right)\right)\end{aligned}$$

dan bisa ditulis kembali :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} = &\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{i}\\ &+ \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_4\mathbf{i}\\ &+ \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_4\mathbf{i}\\ &+ \alpha_4\mathbf{i}\beta_1 + \alpha_4\mathbf{i}\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_4\mathbf{i}\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_4\mathbf{i}\beta_4\mathbf{i}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat-4 perkalian geometrik diperoleh :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} = &\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{i}\\ &+ \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_4\mathbf{e}_1\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$+\alpha_3\beta_1\mathbf{e}_2+\alpha_3\beta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\alpha_3\beta_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\beta_4\mathbf{e}_2\mathbf{i}$$

$$+\alpha_4\beta_1\mathbf{i}+\alpha_4\beta_2\mathbf{i}\mathbf{e}_1+\alpha_4\beta_3\mathbf{i}\mathbf{e}_2+\alpha_4\beta_4\mathbf{i}\mathbf{i} \tag{3.7}$$

Persamaan di atas menujukkan bagaimana penggunaan perkalian geometrik dari sembarang multivektor sebagai kombinasi linear basis blade dari perkalian geometrik .

Sedangkan pembuktian persamaan (3.3) diperoleh dengan mengambil dua multivektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ $\in G_2$ yang bagian skalar dan bivektor nya adalah nol. Dengan menggunakan persamaan (3.13) dimana $\alpha_1=\beta_1=\alpha_4=\beta_4=0$, $\mathbf{AB}$ dan $\mathbf{BA}$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{AB}=(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{BA}=(\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3)+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{i}$$

dengan menggunakan persamaan (3.3) diperoleh :

$$\frac{\overbrace{((\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i})}^{\text{AB}}-\overbrace{((\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3)+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{i})}^{\text{BA}}}{2}$$

$$\frac{\overbrace{((\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)-(\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3))}^{\text{Bagian skalar}}+\overbrace{((\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{i})}^{\text{Bagian bivektor}}}{2}$$

Bagian skalar menyebabkan nol, sehingga diperoleh ;

$$\frac{(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}-(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{i}}{2}$$

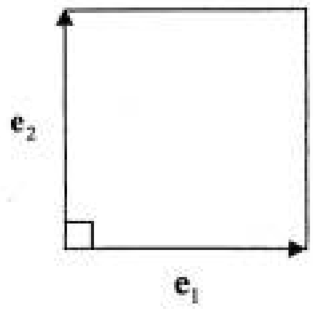
$$\frac{(2\alpha_2\beta_3 - 2\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}}{2}$$

Akhirnya diperoleh:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i}$$

untuk multivektor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ dengan skalar nol dan bagian bivektor.

3.2. Aljabar Geometrik Dalam Bidang (Dimensi-2)



Ruang dimensi dua dibangun oleh dua buah vektor basis ortonormal $\mathbf{e}_1$ dan $\mathbf{e}_2$. Vektor basis ini memenuhi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \\
&= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 && \text{(pers. 3.4)} \\
&= |\mathbf{e}_1|^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) && \text{(pers. 3.3)}
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Jadi $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ (3.8a)

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$$

$$= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2$$

$$= |\mathbf{e}_2|^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) \quad \text{(pers. 3.3)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Jadi $\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ (3.8b)

Dapat pula ditunjukkan

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0]$$

$$= 0$$

dan

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]$$

$$= \frac{1}{2}[0]$$

$$= 0$$

Jadi $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ (3.8c)

Perkalian geometrik dari dua vektor basis menghasilkan

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

$$= 0 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \qquad \text{(sebab } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \text{ basis ortonormal)}$$

$$= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \tag{3.9}$$

$$-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$$

$$= 0 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$$

$$= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \quad \text{(antisimetris)}$$

Selanjutnya, kita sebut $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}$

Karena basis blade tegak lurus, hasil perkalian dalam dan perkalian luar trivial. Kita menggunakannya untuk menyederhanakan hasil dari perkalian geometrik dengan beberapa aturan:

1) Basis blade dengan grade lebih besar dari satu (bivektor, trivektor, blade-4, dan seterusnya) dapat ditulis sebagai perkalian luar dari vektor yang tegak lurus. Sebab, perkalian dalamnya adalah nol, akibatnya, kita bisa menulisnya sebagai perkalian geometrik dari vektor. Sebagai contoh, ruang dalam dimensi tinggi dapat ditulis :

$$\mathbf{e}_{12849} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_8 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_9 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_8\mathbf{e}_4\mathbf{e}_9$$

2) Persamaan (2.1) membolehkan kita untuk menukar urutan dari basis vektor untuk menghasilkan negatif. Berarti kita dapat menulis :

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

3) Perkalian vektor basis dengan dirinya sendiri adalah satu.

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1 \tag{3.10}$$

Contoh :

a. $\mathbf{ie}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$

$\mathbf{ie}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

b. $\mathbf{e}_{112334} = \mathbf{e}_{24}$

Dengan menggunakan aturan di atas kita dapat menyederhanakan perkalian geometrik dari basis blade. Contohnya :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_{31}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 && \text{Aturan- 1}\\
&= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 && \text{Aturan -3}\\
&= -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 && \text{Aturan- 2}\\
&= -1 && \text{Aturan- 3}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{i}$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{i}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

Tabel 3.2: Tabel perkalian untuk basis blade dalam G_2

Dengan melihat tabel di atas, perkalian dari $\mathbf{i}$ dan $\mathbf{i}$ menghasilkan -1, yang diperoleh melalui perhitungan berikut :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12} \qquad \text{(dari defenisi)}$$

$$= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \qquad \text{(aturan- 1)}$$

$$= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \qquad \text{(aturan- 2)}$$

$$= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \qquad \text{(aturan- 3)}$$

$$= -1 \qquad \text{(aturan- 3)} \qquad (3.12)$$

Dari persamaan (3.7) :

$$\mathbf{AB} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{i}$$

$$+ \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_4\mathbf{e}_1\mathbf{i}$$

$$+ \alpha_3\beta_1\mathbf{e}_2 + \alpha_3\beta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\beta_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\beta_4\mathbf{e}_2\mathbf{i}$$

$$+ \alpha_4\beta_1\mathbf{i} + \alpha_4\beta_2\mathbf{i}\mathbf{e}_1 + \alpha_4\beta_3\mathbf{i}\mathbf{e}_2 + \alpha_4\beta_4\mathbf{i}\mathbf{i}$$

dari tabel (3.2) di atas, diperoleh :

$$\mathbf{AB} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{i}$$

$$+ \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} + \alpha_2\beta_4\mathbf{e}_2$$

$$+ \alpha_3\beta_1\mathbf{e}_2 - \alpha_3\beta_2\mathbf{i} + \alpha_3\beta_3 - \alpha_3\beta_4\mathbf{e}_1$$

$$+ \alpha_4\beta_1\mathbf{i} - \alpha_4\beta_2\mathbf{e}_2 + \alpha_4\beta_3\mathbf{e}_1 - \alpha_4\beta_4$$

Langkah terakhir adalah grup basis blade :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} = &(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4) \\ &+ (\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_1 \\ &+ (\alpha_1\beta_3 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1)\mathbf{e}_2 \\ &+ (\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Jadi hasil akhirnya adalah kombinasi linear dari basis blade $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{i}\}$atau, dengan kata lain, sebuah multivektor. Ini membuktikan bahwa aljabar geometrik tertutup di bawah perkalian geometrik.

1	$\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	
1 skalar	2 vektor	1 bivektor	(3.14)
grade 0	grade 1	grade 2	

3.3. Aljabar Geometrik Dalam Ruang (Dimensi-3)

Dalam ruang vektor dimensi- 3 diperkenalkan himpunan ortonormal dari basis vektor $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m = 1$ dan $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = 0$ dengan $n \neq m \; (n, m = 1, 2, 3)$.

Penambahan sebuah vektor ortonormal ke dalam himpunan basis dimensi- 2, meningkatkan objek- objek geometri berikut :

1	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	$\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\}$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	
1skalar	3 vektor	3 bivektor	1 trivektor	(3.15)
(grade0)	(grade1)	(grade2)	(grade3)	

Objek- objek ini membentang ruang linear dengan $(1+3+3+1) = 8 = 2^3$ dimensi.

Tiga elemen dalam dalam ruang dimensi- 3 adalah $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ yang sesuai dengan elemen tiga bidang kubus dari tepi- tepinya sepanjang $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, dan $\mathbf{e}_3$. himpunan dari 8 elemen ini adalah : $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, i$ membentuk basis dari aljabar geometrik R_3 dari ruang vektor dimensi- 3. Sub himpunannya $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{i}_3\}$, $\{1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{i}_1\}$, dan $\{1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{i}_2\}$.

Seperti dalam dimensi- 2, pseudoskalar dipilih mengikuti aturan tangan kanan,

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{3.16}$$

$$\mathbf{i}_1^{\,2} = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$$

$$\mathbf{i}_2^{\,2} = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)^2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -1$$

$$\mathbf{i}_3^{\,2} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{i}^2 = \mathbf{ii} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -1\end{aligned}$$

diperoleh $\mathbf{i}_1^{\,2} = \mathbf{i}_2^{\,2} = \mathbf{i}_3^{\,2} = \mathbf{i}^2 = -1$

Diperkenalkan perkalian geometrik,

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{3.17}$$

Dari persamaan (3.16) dan penerapan aturan-2 diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ie}_1 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{ie}_2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \\
\mathbf{ie}_3 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

yang merupakan operasi dualitas karena memetakan elemen lapis- r menjadi elemen lapis- $(n-r)$ dengan n adalah bilangan dimensinya. Dalam dimensi 3 operasi dualitas memetakan bivektor menjadi vektor, begitu sebaliknya.

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{23}$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$\mathbf{e}_{23}$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_{13}$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_{23}$	1	$\mathbf{e}_{123}$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_{123}$	-1	$-\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_{23}$	-1	$-\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{12}$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{23}$	$-\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

Tabel 3.3 : Tabel perkalian dari basis blade dalam G_3

Kita defenisikan perkalian elemen- elemen dari grade yang tinggi sebagai berikut :

$$\mathbf{a} \cdot B_r \equiv \langle \mathbf{a} \cdot B_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}B_r + (-1)^{1+r} B_r \mathbf{a}\right) \tag{3.19}$$

dimana r menunjukkan grade elemen aljabar B_r.

Untuk $B_r = \mathbf{b}(r=1)$ maka $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})$, tapi untuk $B_r = \mathbf{i}$ (misalkan grade $r = 2$) maka :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{2}(\mathbf{ai} - \mathbf{ia}) \tag{3.20}$$

Perhitungannya sebagai contoh :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}_1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}_1 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}_1 &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2) \\ &= \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}(-2\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.4. Dualitas

Dual $\mathbf{A}^*$ dari multivektor $\mathbf{A}$ didefenisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{i}^{-1}$$

dimana $\mathbf{i}$ menunjukkan pseudoskalar dari aljabar geometrik yang telah digunakan. Pseudoskalar adalah blade (blade dengan grade tertinggi).

Kita berikan contoh sederhana dalam G_3 , penghitungan dual dari basis bivektor $\mathbf{e}_{12}$. Pseudoskalar adalah $\mathbf{e}_{123}$ dan inversnya adalah $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Kita menggunakannya untuk menghitung dual dari $\mathbf{e}_{12}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{12}^* &= \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \\
&= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\
&= \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Jadi, dualnya adalah basis vektor $\mathbf{e}_3$, tepatnya vektor normal dari basis vektor $\mathbf{e}_{12}$.

Jika kita mempunyai dua vektor sembarang $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b} \in G_3$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$$

Merujuk ke persamaan (2.7) perkalian luarnya adalah :

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{e}_{12}+\left(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)\mathbf{e}_{13}+\left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{e}_{23}$$

dan dual-nya $\left(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\right)^*$ menjadi :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\right)^* &= \left(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\right)\mathbf{e}_{123}^{-1}\\
&= \left(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\right)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\\
&= \left(\left(\alpha_{.}\beta_{.}-\alpha_{.}\beta_{.}\right)_{-}+\left(\alpha_{.}\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)_{13}+\left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)_{23}\right)_{.3.2.1}\\
&= \left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\\
&\quad\ \left(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)\mathbf{e}_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\\
&\quad\ \left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{e}_{23}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\\
&= \left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\\
&\quad\ \left(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\\
&\quad\ \left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\\
&= \left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{e}_3-\left(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1\right)\mathbf{e}_2+\left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{e}_1\\
&= \left(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\right)\mathbf{e}_1+\left(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\right)\mathbf{e}_2+\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa dalam dimensi- 3, dual dari bivektor adalah normal. Dual dapat digunakan mengubah antara bivektor dan normal.

Dualitas ini juga berguna untuk menukar antara perkalian dalam dengan perkalian luar.

$$A_r\cdot\left(B_s\mathbf{i}\right) = \left\langle A_rB_s\mathbf{i}\right\rangle_{|r-(n-s)|}$$

$$= \langle A_r B_s \mathbf{i} \rangle_{n-(r+s)}$$

$$= \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \mathbf{i}$$

$$= A_r \wedge B_s \mathbf{i} \qquad\qquad r+s \leq n$$

$$A_r \wedge (B_s \mathbf{i}) = \langle A_r B_s \mathbf{i} \rangle_{|r+(n-s)|}$$

$$= \langle A_r B_s \mathbf{i} \rangle_{n-(s-r)}$$

$$= \langle A_r B_s \rangle_{s-r} \mathbf{i}$$

$$= A_r \cdot B_s \mathbf{i} \qquad\qquad r \leq s$$

Misalkan $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \}$ adalah basis vektor ortonormal dari ruang vektor Euclidean pada R^n. R^n menunjukkan hasil aljabar geometrik yang dibangun $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \}$.

k-Blade $\mathbf{B}_k$ didefenisikan sebagai multivektor yang bisa difaktorisasikan melalui perkalian luar (3.4) sampai faktor vektor k

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \ldots \wedge \mathbf{a}_k \tag{3.24}$$

Cara alami dalam memandang R_n adalah dalam suku- suku vektor basis ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Dalam kasus ini suatu basis untuk seluruh aljabar dibangun sebagai:

$$1, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j (i<j), \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k (i<j<k) \quad \text{dst}$$

Biasanya elemen multivektor M dari aljabar gemetrik R^n berisi penjumlahan dari beragam elemen dengan grade yang beda.

$$\sum_{k=0}^{n} \langle M \rangle_k = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \ldots + \langle M \rangle_n \tag{3.25}$$

Grade k bagian M_k dari multivektor M (3.25) biasanya dinotasikan sebagai :

$$\langle M \rangle_k \equiv M_k \tag{3.26}$$

Grade 0 atau bagian scalar dari M biasanya dinotasikan sebagai :

$$\langle M \rangle \equiv \langle M \rangle_0 \equiv M_0 \tag{3.27}$$

Aljabar geometrik sangat tepat dinotasikan sebagai subruang dan membentuk secara langsung operasi aljabar dengan subruang, sebab setiap blade murni mewakili subruang yang dibangun oleh vektor dalam faktorisasinya (3.24). Setiap hasil kali dalam (3.19) dari vector $\mathbf{a}$ dengan k-blade murni $\mathbf{B}_k$ mempunyai perluasan :

$$\begin{gathered} \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_k = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_k) = \\ \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1}\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_s (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \breve{\mathbf{a}}_s \ldots \wedge \mathbf{a}_k) \end{gathered} \tag{3.28}$$

dimana $\breve{a}$ berarti vector $\mathbf{a}_s$ yang dihilangkan dari perkalian. Ini berarti vektor $\mathbf{a}$ tegak lurus terhadap semua $\mathbf{a}_s$ $(s = 1 \ldots k)$, maka perkalian (3.28) tersebut menjadi nol. Jadi $\mathbf{a}$ juga ortogonal dengan semua kombinasi linear dari $\mathbf{a}_s$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_k = 0 \qquad 3.29)$$

Analog dengan (3.19) hasil kali luar dengan vektor dapat ditulis:

$$\mathbf{a} \wedge M_k \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}M_k + (-1)^k M_k \mathbf{a}\right) = \langle \mathbf{a}M_k \rangle_{k+1} \qquad (3.30)$$

Perhatikan bahwa hasil kali dalam dengan sebuah vector seperti dalam (3.19) selalu mengurangi grade sebanyak satu, sedangkan hasil kali luar (3.30) menambah grade sebanyak satu. Misalkan $\mathbf{a}$ bergantung linear pada vector $\mathbf{a}_s$ $(s = 1 \ldots k)$, didefenisikan $\mathbf{B}_k$ dalam (3.24) dengan kelinearan hasil kali luar dari $\mathbf{a}$ dengan $\mathbf{B}_k$ menjadi nol.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{B}_k = 0 \qquad (3.31)$$

Defenisi perkalian geometrik untuk vektor tidak berlaku untuk multivektor. Untuk multivektor homogen, perkalian geometriknya didekomposisikan sebagai berikut :

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|-2} + \ldots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \qquad (3.32)$$

Dengan mengambil satu dari grade terendah dan tertinggi dari (3.32) mendefenisikan perkalian dalam dan perkalian luar dari r-vector A_r dan s-vector B_s menjadi :

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} \tag{3.33}$$

dan

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \tag{3.34}$$

Jika $A_2 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ dan $s > 1$ maka

$$A_2 \cdot B_s = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 B_s \rangle_{s-2} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot B_s) \tag{3.35}$$

Jika grade $s = 2$ maka

$$\begin{aligned} A_2 \cdot B_s &= \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 B_2 \rangle_0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot B_2) \\ &= (\mathbf{a}_2 \cdot B_2) \cdot \mathbf{a}_1 = -(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \cdot B_2 \\ &= -\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_1 \cdot B_2) = \mathbf{a}_2 \cdot (B_2 \cdot \mathbf{a}_1) \end{aligned} \tag{3.36}$$

dimana pertukaran B_2 dan sebuah vector dalam perkalian dalam selalu memberikan tanda negatif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot B_2 &= (\mathbf{a}_2 \cdot B_2) \cdot \mathbf{a}_1 \\ &= \mathbf{a}_2 \cdot (B_2 \cdot \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_2 \cdot B_2 \cdot \mathbf{a}_1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Perkalian luar (3.34) dari blade- 2 dan B_2 yang merupakan vektor-vektor saling ortogonal. A_2 dan B_2 memiliki sifat komutatif.

$$
\begin{aligned}
A_2B_2 &= \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \\
&= (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \wedge (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2) = A_2 \wedge B_2 \\
&= \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 \wedge -\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 \\
&= \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge -\mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{a}_2 \\
&= \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) \wedge (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) \\
&= B_2 \wedge A_2 = B_2A_2
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Selanjutnya kita definisikan besar (magnitudo) $|\mathbf{B}|$ dari k- blade sebagai berikut :

$$
\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{a}_1{}^2\mathbf{a}_2{}^2\ldots\mathbf{a}_k{}^2 = |\mathbf{B}|^2 = (-1)^{k(k-1)/2}\,\mathbf{B}\mathbf{B} \tag{3.39}
$$

BAB IV

MATRIKS ASIMETRIK ADALAH BIVEKTOR REAL

R_n menyatakan aljabar geometrik yang dibangun oleh $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Himpunan dari bivektor- bivektor $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n\}$ membentuk $n(n-1)/2$ ruang linear dari dimensi-n pada riil. Ini berarti sama dengan matriks kuadrat asimetrik dalam dimensi- n. Di sini ada dua ruang yang tentu saja isomorphik. Misalkan **A** adalah bivektor dalam R_n dan A sebagai matriks asimetrik dengan komponen a_{kl}. Dengan menggunakan (3.37) keisomorphisan diberikan oleh:

$$a_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_l \tag{4.1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\, \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \tag{4.2}$$

Dengan mengambil transpos pada bagian kanan dari (4.1) yang dapat disamakan dengan pengambilan reverse dari bivektor **A**, sebab sesuai dengan (2.9).

$$(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l)^T = \mathbf{e}_l\, \mathbf{e}_k = -\,\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \tag{4.3}$$

Pesamaan terakhir analog dengan (2.10), sebab $\mathbf{e}_k$ dan $\mathbf{e}_l$ adalah saling orthogonal dan antikomutatif.

Keisomorfisan ini berguna untuk mencari bentuk kanonik yang isomorfik dengan bivektor **A** dari (4.2).

4.1. Bentuk Kanonik Bivektor A

Setiap bivektor **A** dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari bidang komutatif yang berbeda (dimensi- 2) elemen [blade- 2, $k = 2$ dalam (3.24)]

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_m, \tag{4.4}$$

dimana sesuai dengan (3.38)

$$\mathbf{A}_k \mathbf{A}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_l \wedge \mathbf{A}_k \tag{4.5}$$

Dan dengan (3.39) untuk $k \neq l$ dan

$$\mathbf{A}_k^2 = -v_k^2 < 0, \qquad 0 < v_k \in R \tag{4.6}$$

Sesuai dengan (4.6) bisa didekomposisikan setiap elemen bidang $\mathbf{A}_k$ ke dalam ukuran skalar v_k dikali dengan elemen luasan $\mathbf{i}_k$

$$\mathbf{A}_k = v_k \, \mathbf{i}_k \tag{4.7}$$

dengan

$$\mathbf{i}_k^2 = \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_k = -1, \tag{4.8}$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \, \mathbf{e}_k \, \mathbf{e}_l = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_m \tag{4.9}$$

'Keortogonalan' dari bivektor dihasilkan melalui keispomorphisan (4.1)bentuk kanonik yang sesuai dengan matriks asimetrik. Untuk menunjukannya misalkan $\mathbf{a}_l$ adalah vector dalam bidang ,

$$\mathbf{a}_l \wedge \mathbf{i}_l = \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{A}_l = 0 \tag{4.10}$$

sesuai dengan (3.31).

Dengan menggunakan pers (4.5)

$$\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{A}_k = 0 \qquad \text{untuk } l \neq k \tag{4.11}$$

sebab vector- vector yang membangun $\mathbf{i}_k$ semuanya harus orthogonal terhadap $\mathbf{a}_l \in \mathbf{i}_l$ karena semua bidang $\mathbf{i}_k$ orthogonal terhadap satu sama lain menurut (4.5)-(4.7).

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$$

Dengan menggunakan persamaan sebelumnya :

$$f^2(\mathbf{a}_l) = (\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_l^2\, \mathbf{a}_l = -v_l^2\, \mathbf{a}_l \tag{4.12}$$

dengan pendefenisian unit vector

$$\mathbf{b}_l \equiv \mathbf{a}_l \cdot \mathbf{i}_l \qquad \in \text{bidang } \mathbf{i}_l \tag{4.13}$$

orthogonal terhadap $\mathbf{a}_l$, setiap bidang elemen $\mathbf{A}_l$

$$\mathbf{A}_l = v_l\, \mathbf{i}_l = v_l\, \mathbf{a}_l \mathbf{b}_l \tag{4.14}$$

dimana

$$\{\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m\} \tag{4.15}$$

adalah himpunan vector-eigen yang ortonormal dari f^2 .

4.2. Bentuk Kanonik Matriks Asimetrik Melalui Geometri Real

Misalkan A matriks bujursangkar asimetrik yang berukuran $n \times n$ mempunyai rank maksimum $r = n$. Maka bilangan orthogonal dari elemen m yang membedakan dalam (4.4) akan menjadi $m = \frac{n}{2}$. Himpunan dari vector-eigen ortonormal $n = 2m$ (4.15) akan membentuk sebuah basis dari ruang vector R^n.

Penerapan bivektor dari matriks isomorfik (4.1) dengan mematuhi basis (4,15) ditemukan seperti dalam (3.37) bahwa :

$$a_{2k,2k+1} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(pers. 4.1 dan 4.15)}$$

$$= \mathbf{a}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i \right) \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(pers. 4.4)}$$

$$= \mathbf{a}_k \cdot (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_k + \ldots + \mathbf{A}_m) \cdot \mathbf{b}_k$$

$$= (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{A}_k + \ldots + \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{A}_m) \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(pers. 4.11)}$$

$$= \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{b}_k$$

$$= \mathbf{a}_k \cdot (v_k \mathbf{i}_k) \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(pers. 4.7)}$$

$$= v_k (\mathbf{a}_k \cdot i_k) \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(karena } v_k \text{ skalar)}$$

$$= v_k \, \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_k \qquad \text{(pers. 4.18)}$$

$$= v_k \left(\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\} \text{ortonormal}\right) \tag{4.16}$$

Pers. terakhir $\mathbf{b}_k$ adalah vektor satuan. Karena itu bentuk asimetrinya adalah:

$$a_{2k,2k+1} = -a_{2k+1,2k} = -v_k$$

dan

$$a_{kk} = 0 \tag{4.17}$$

Karena (4.16) semua elemen matriks yang lain akan menjadi nol. Kesimpulan hasilnya dihasilkan dalam bentuk matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & & & & & & & & \\ -v_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & v_m & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & -v_m & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

dengan elemen diagonal utamanya adalah nol.

4.3. Aplikasi terhadap Matriks Bujursangkar Asimetri 2 x 2

Bentuk umum matriks asimetri A dalam dimensi dua dengan basis ortonormal $\{e_1, e_2\}$ sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Melalui keisomorfisan (4.2) bisa dihitung secara langsung hubungan bivektor **A** sebagai :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}\sum_{k,l=}^{2} A_{kl}\, e_k\, e_l = \frac{1}{2}\left(A_{12}\, e_1\, e_2 + A_{21}\, e_2\, e_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(v e_1\, e_2 - v e_2\, e_1\right) = \frac{1}{2}\left(v e_1\, e_2 + v e_1\, e_2\right) \\ &= v e_1\, e_2 = v i \end{aligned} \tag{4.26}$$

dengan penggunaan antikomutatif dari e_1 dan e_2 dan defenisi yang berpedoman (dimensi dua) terhadap elemen bidang seperti dalam (3.9).

Himpunan dari semua matriks bujursangkar asimetri dalam dimensi dua real, tak mewakili yang lain tapi kemungkinan semua bidang yang berpedoman elemen bidang hanya dibedakan melalui ukuran skalar $|v|$ dan orientasinya yang dikodekan dengan **i**.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Seperti halnya vektor, bivektor juga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis- basisnya. Basis untuk G_2 adalah :

$$\left\{ \underbrace{1}_{\text{basis skalar}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}_{\text{basis vektor}}, \quad \underbrace{\mathbf{i}}_{\text{basis bivektor}} \right\}$$

dan untuk G_3 adalah :

$$\left\{ \underbrace{1}_{\text{basis skalar}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}_{\text{basis vektor}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}}_{\text{basis bivektor}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}_{123}}_{\text{basis trivektor}} \right\}$$

Bentuk kanonik dari bivektor merupakan komposisi dari bidang yang ortogonal. *Keisomorphisan* berguna untuk mencari bentuk kanonik yang isomorfik dengan bivektor **A.**

Aljabar geometrik matriks asimetrik bisa diperoleh melalui *Keisomorphisan* dengan bivektor. Sehingga diperoleh matriks asimetrik yang merupakan bivektor real.

5.2. Saran

Diharapkan kepada mahasiswa F.MIPA khususnya jurusan Matematika yang tertarik dalam bidang aljabar dan geometri dapat mengembangkannya lebih jauh lagi. Seperti penerapan dalam bidang komputasi berbasis bahasa java.

DAFTAR PUSTAKA

G. Utama, K. D. Hermawan, ***Pembuatan API Aljabar Geometrik yang Portabel & Mudah Dikembangkan Berbasis Bahasa Java***, Master Thesis, 24 Januari 2001.

Eckhard MS Hitzer, ***Matriks Antisimetris Adalah Bivektor Real***, Mem. Fac. Eng. Fukuri Univ., vol 49, No. 2(September 2001).

Jaap Suter, ***Geometric Algaebra Primer,*** 12 Maret 2003