PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JOHNSON LOEWY & LONDON PADA MATRIKS TAK NEGATIF MELALUI KONSTRUKSI GRAF

Oleh :

ARMASARI ANNAS
H 111 01 029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2006

PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JOHNSON LOEWY & LONDON PADA MATRIKS TAK NEGATIF MELALUI KONSTRUKSI GRAF

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Oleh :

ARMASARI ANNAS
H 111 01 029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2006

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JOHNSON LOEWY & LONDON

PADA MATRIKS TAK NEGATIF

MELALUI KONSTRUKSI

GRAF

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 20 Januari 2006

ARMASARI ANNAS
NIM : H 111 01 029

PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JOHNSON LOEWY & LONDON PADA MATRIKS TAK NEGATIF MELALUI KONSTRUKSI GRAF

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si	A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si
NIP : 132 133 694	NIP : 132 259 231

Pada Tanggal : 21 Januari 2006

Pada hari ini, sabtu tanggal 21 Januari 2006, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik Skripsi yang berjudul :

PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JOHNSON LOEWY & LONDON

PADA MATRIKS TAK NEGATIF

MELALUI KONSTRUKSI

GRAPH

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pda Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 21 Januari 2006

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1. Ketua	: Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, MS	(............................)
2. Sekretaris	: Dr. Georgina Tinungki, MS	(............................)
3. Anggota	: Jusmawati Massalesse,S.Si, M.Si	(............................)
4. Anggota	: A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si	(............................)
5. Anggota	: Drs. H. Muh. Hasbi, M.Sc	(............................)

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulillah Robbil Alamin

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah swt atas segala nikmat, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini untuk memenuhi salah satu persyaratan akademik guna menyelesaikan studi pada jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas hasanuddin.

Dalam penulisan skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan, dorongan, dan bimbingan dari berbagai pihak yang sangat besar manfaatnya. Oleh karena itu dengan segala kerendahannya dan ketulusan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si, M.Si** sebagai pembimbing utama dan bapak **A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si** sebagai pembimbing pertama yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan petunjuk serta bimbingan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.

Demikian pula penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kepada :

1. Kedua orang tuaku tercinta **Annas Umar, S.Pd** dan **Husaemah Ukkas, S.Pd** yang telah membesarkan dan membimbing penulis dengan segala cinta kasih, serta doa yang tulus serta adik-adikku tercinta **Arham**, **Ardiana, Akram** yang selalu menemani, membantu dan mengganggguku selama ini.

2. Seluruh keluargaku **nenek, om, sepupu-sepupuku Ita, Irma, Ana, Nita, Lia, Asma** dan **Ati** dan lainnya serta tante-tanteku di Maros, **tante Lani** makasih banyak atas perhatian, dukungan, doa kalian selama ini.
3. Bapak pimpinan Fakultas dan Ilmu Pengetahuan Alam UNHAS beserta staf.
4. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNHAS dan bapak **Drs. Amir Kamal, M.Sc** selaku sekertaris jurusan sekaligus sebagai Penasehat akademik yang telah memberikan perhatian dan nasehat-nasehat berguna kepada penulis, serta seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal ilmunya.
5. Bapak **Drs. Budi Nurwahyu , MS** selaku Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNHAS.
6. Ibu **Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, MS** selaku ketua penguji.
7. Bapak **Drs. Muh Hasbi, M.Sc** dan Ibu **Dr. Georgina M. Tinungki, MS** selaku penguji.
8. Sobatku **Aan** yang selama ini telah memberiku motivasi dari awal masuk ke perguruan tinggi ini sampai menyelesaikan kuliah. Tidak akan kulupakan
9. Sohib-sohibku **Fani, Rahma, Esra, Hasnah, Ida, Deri**, dengan kalian saya banyak menghabiskan hari-hari yang indah selama dikampus merah dan saat-saat aku sedih kalian selalu ada. Kenangan yang indah, lucu, gila yang kalian berikan tak akan aku lupakan. Teman-temanku angkatan 01'yang lain

maya yang selalu menemaniku, **Muja**, **Dian**, **Nunu**, **Neldi**, **Yemi**, **Yati**. Tuk **Imran** makasih atas kenanganmu dan motivasimu sejak penyusunan skripsi ini sampai penulis ujian sidang, **Sudi**, **Accank**, **Ilyas**, **Rifki**, **Wawan**, **Fadh**, terima kasih karena telah mengggangguku selama ini.

10. Seniorku kak **Oni**, kak **Indi**, kak **Atun**, kak **Niswar**, kak **Alam**, kak **Tina** dan adik-adikku angkatan 02 **Afif**, **Jus**, **Ebi**, **Juki**, **Kama**, **Rustam**, **Lukman**, serta adik-adikku angkatan 03 **Upik**, **Aswar** dan yang lainnya.
11. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari dalam skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan-kekurangan mengingat keterbatasan kemampuan pengetahuan penulis. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun dari semua pihak demi perbaikan dimasa yang akan datang.

Akhirnya penulis berharap semoga hasil dari skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkannya.

Makassar, 21 Januari 2006

Penulis

Armasari Annas

ABSTRAK

A matriks tak negatif $n \times n$ dan $\delta_k = trace(A^k)$ dimana k = 1,2,... Dalam penulisan ini akan ditunjukkan bahwa jika n ganjil dan $\delta_1 = 0$ maka $(n-1)\delta_4 \geq \delta_2^{\,2}$. Hal tersebut dapat diaplikasikan dalam menunjukkan bahwa terdapat suatu vektor σ = ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$) dengan $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$ yang bukan spektrum dari matriks tak negatif 5 x 5. Tetapi vektor σ = ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5, 0$) dengan $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 0$ adalah spektrum matriks tak negatif 6 x 6, seperti ditunjukkan dalam matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$, yang memiliki spektrum $\left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2, 0\right)$,

akan tetapi $\left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2\right)$ bukan spektrum dari matriks tak negatif 5 x 5.

ABSTRACT

A be an nonnegative $n \times n$ matrix and $\delta_k = trace(A^k)$ where k = 1,2…. In this paper will be shown that if n is odd and $\delta_1 = 0$ then $(n-1)\delta_4 \geq \delta_2^{\ 2}$. It can be aplied to show that there are $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ with $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$ is not spectrum of a nonnegative 5 x 5 matrix. But $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, 0)$ with $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 0$ is the spectrum of nonnegative 6 x 6 matrix. As shown in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

,that have spectrum $\left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2, 0\right)$,

but $\left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2\right)$ is not spectrum of a nonnegative 5 x 5 matrix.

DAFTAR ISI

B A B I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam ilmu matematika dikenal berbagai macam matriks. Salah satunya adalah matriks tak negatif yaitu matriks yang entri-entrinya adalah bilangan real tak negatif.

Matriks tak negatif telah menjadi suatu bahasan baru, kajian yang dikembangkan belakangan ini antara lain mencari syarat sehingga suatu vektor terurut-n merupakan spektrum dari suatu matriks tak negatif.

Misalkan vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n)$ dengan λ_i adalah nilai-nilai eigen riil untuk i = 1,2,3...n dari suatu matriks yang tak negatif A, atau $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n)$ dapat dinyatakan sebagai suatu spektrum dari matriks A. Di sini diberikan dua syarat dari pencarian spektrum untuk matriks tak negatif, yaitu untuk vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n)$

- $\exists\, \lambda$ maksimum $\{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n \}$, $\lambda > 0$
- $\delta_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \geq 0$; k = 1,2,... (Hasanah Uswah, 2005)

Dua syarat tersebut untuk kasus $n \leq 3$, kedua syarat tersebut merupakan syarat cukup. Namun untuk $n > 3$ kedua syarat itu tidak dapat menjadi syarat cukup. Terdapat pula suatu vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5)$ dari bilangan real yang bukan spektrum dari matriks tak negatif 5x5, tetapi vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5 ,0)$

merupakan spektrum dari matriks tak negatif 6x6 (Laffey J Thomas&Meehan Eleanor, 1998).

Dalam hubungan dengan matriks tak negatif, ketaksamaan Johnson Loewy dan London $n^{m-1}\delta_{km} \geq \delta_k^m$ berkaitan dengan spektrum dan nilai-nilai eigen matriks tak negatif.

Salah satu kajian yang berkaitan dengan matriks tak negatif adalah teori graf. Setiap graf G dapat dinyatakan dalam bentuk matriks *adjacency* yang merupakan matriks tak negatif. Berdasarkan uraian di atas, maka akan dikaji Ketaksamaan Johnson Loewy dan London pada matriks tak negatif, yang ditulis dalam bentuk skripsi :

" Penghalusan Ketaksamaan Johnson Loewy dan London (JLL) pada Matriks tak Negatif Melalui Konstruksi Graf".

B. Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana memperoleh Penghalusan dari Ketaksamaan Johnson Loewy dan London (JLL) pada matriks tak negatif melalui analisis graf segitiga.

C. Batasan Masalah

Masalah dalam kajian dan penulisan ini dibatasi pada nilai eigen kompleks dan matriks tak negatif berorde $n = 5$

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah mengkonstruksi penghalusan dari ketaksamaan Johnson Loewy dan London (JLL) pada matriks tak negatif.

B A B II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Ketaksamaan Johnson Loewy dan London

Ketaksaman Johnson Loewy dan London, selanjutnya ditulis JLL ditemukan dan dipublikasikan oleh Johnson Loewy dan London yang menyatakan bahwa :

$$n^{m-1}\delta_{km} \geq \delta_k^{\,m}$$

dengan $\delta_{km} = \left(\lambda_1^{\,k} + \lambda_2^{\,k} + ..\lambda_n^{\,k}\right)$

$\delta_{km} = \left(\lambda_1^{\,km} + \lambda_2^{\,km} + ..\lambda_n^{\,km}\right)$

λ_i adalah nilai eigen matriks tak negatif $n \; x \; n$ untuk i = 1,2….n

k,m bilangan bulat positif (Laffey J Thomas&Meehan Eleanor, 1998).

B. Graf

Suatu graf sederhana G(V,E) adalah pasangan terurut (V,E) himpunan tak kosong V yang selanjutnya disebut simpul dan himpunan E yang selanjutnya disebut sisi. Setiap sisi e $\in$ E dapat dinyatakan sebagai pasangan (u,v) dimana u,v $\in$ V. Jika (u,v) = (v,u), maka G(V,E) disebut graf sederhana (Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990).

Misalkan N = {1,2,……..n} dengan n$\geq$ 3. Misalkan S adalah himpunan adalah himpunan-himpunan bagian N yang anggotanya sebanyak dua.

Didefenisikan suatu graf σ_n, yang setiap simpulnya adalah semua anggota-anggota dari S dan untuk $\alpha, \beta \in S$. $\alpha\beta = \beta\alpha$ adalah suatu sisi dari σ_n jika dan hanya jika $|\alpha \cap \beta| = 1$. Graf seperti ini dinamakan graf segitiga (Laffey J Thomas&Meehan Eleanor, 1998).

Defenisi *linegraf*:

Misalkan graf G memiliki sedikitnya satu sisi. Himpunan simpul dari *linegraf* G (L(G)) beranggotakan sisi-sisi dari graf G, dimana dua simpul yang berdekatan dari L(G) bersesuaian dengan sisi-sisi dari graf G. (Buckley, Fred/Harary Frank, 1989).

C. Matriks tak Negatif

Sebuah matriks real A disebut matriks positif jika semua entrinya positif dan disebut matriks tak negatif jika semua entrinya tak negatif. Untuk lebih jelasnya dapat dituliskan :

A positif jika $a_{ij} > 0$, $a_{ij} \varepsilon$ R $\forall_{i,j} = 1,2,\ldots\ldots n$

A tak negatif jika $a_{ij} \geq 0$, $a_{ij} \varepsilon$ R $\forall_{i,j} = 1,2,\ldots\ldots n$ (Minc Henryk, 1988).

D. Spektrum Matriks Tak Negatif

Spektrum dari suatu matriks tak negatif A_{nxn} adalah koleksi dari nilai-nilai eigen matriks A yang dituliskan sebagai $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n)$ dimana λ_i adalah nilai-nilai eigen dari A $\forall$ i = 1,2,….n . $\sigma = (\lambda_i)$, i = 1,2…..n dipandang sebagai spektrum dari matriks tak negatif A jika memenuhi kondisi

➢ $\exists\ \lambda$ maksimum positif

➢ $\delta_k = \sum \lambda_i^k \quad \geq 0 \qquad k = 1,2,\ldots\ldots\ldots$

Trace dari pangkat positif dari suatu matriks tak negatif harus tak negatif

$\delta_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \quad \geq 0 \quad ; m = 1,2,\ldots\ldots\ldots$ (Minc Henryk, 1988).

Kedua syarat di atas merupakan syarat cukup untuk $n \leq 3$. Sedangkan untuk $n > 3$, syarat tersebut belum dapat menjadi syarat cukup untuk matriks tak negatif (Minc Henryk, 1988).

E. Matriks Incidency

Defenisi :

Misalkan G = (V,E,f) adalah suatu graf, dengan *m* menyatakan banyaknya simpul dari graf G, dan *n* menyatakan banyaknya sisi dari G. Jika $V = \{v_1.v_2,\ldots.v_m\}$ dan $E = \{e_1,e_2,\ldots.e_n\}$, maka matriks incidency dari G disebut matriks $M(G)_{mxn} = [m_{ij}]$ adalah matriks *incidency* dari G, dengan m_{ij} menyatakan frekuensi simpul v_i *incidency* dengan sisi e_j (Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990).

Teorema 2.1

Jika G = (V,E,f) adalah graf sederhana, maka M(G) adalah matriks 0-1, dimana M(G) adalah matriks *incidency* dari graf G (Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990).

Bukti :

Misalkan G adalah graf sederhana, maka tidak terdapat loop atau sisi ganda pada graf. Jadi setiap simpul hanya berincidency dengan maksimal satu sisi. Sehingga matriks M(G) = [m_{ij}] merupakan matriks 0-1 yaitu antara 0-1.

Defenisi :

misal $v_i, v_j \in V$ dan $(v_i, v_j) \in E$. maka v_i dan v_j dikatakan ber-incidency dengan sisi e.

Teorema 2.2

Misalkan G = (V,E,f) adalah graf. Jumlah dari entri-entri pada masing-masing kolom dari matriks M(G) adalah dua (Buckley, Fred/Harary Frank, 1989).

Bukti :

Misalkan e Є E, terdapat v Є V sedemikian sehingga f(e) = {v} atau simpul yang berbeda v_1 dan v_2 dari V sedemikian sehingga f(e) = { v_1, v_2 }.

Jika terdapat simpul v sedemikian sehingga f(e) = {v}, maka entri pada baris v dan pada kolom e adalah dua dan semua entri-entri yang lain pada kolom tersebut adalah nol.

Untuk kasus kedua, jika terdapat simpul yang berbeda v_1 dan v_2 dari V sedemikian sehingga f(e) = { v_1, v_2 }, maka entri pada baris v_1 dan pada kolom e adalah satu, selanjutnya entri pada baris v_2 dan pada kolom e adalah satu. Sedangkan untuk entri-entri yang lain pada kolom e adalah nol.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk kedua kasus di atas, jumlah dari entri-entri pada kolom e adalah dua.

F. Matriks Adjacency

Defenisi matriks *adjacency*

Misal G(V,E) adalah graf dengan himpunan simpul V(G)={ $v_1, v_2, ... v_n$ }. Matriks adjacency dari G adalah matriks bujur sangkar A=(a_{ij}), i = 1,2,…n, j = 1,2,..n. Elemen baris ke-i dan kolom ke-j atau a_{ij} menunjukkan banyaknya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan simpul v_j. Matriks *Adjacency* dari G(V,E) selanjutnya ditulis A(G).(Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990).

Teorema 2.3

Jika G = (V,E,f) adalah suatu graf sederhana dengan himpunan simpul{ $v_1, v_2, ... v_n$ }, maka A(G) = [a_{ij}] adalah matriks bujursangkar yang entri-entrinya hanya 0 atau 1 dan $a_{ii} = 0$ $\forall$ i = 1,2,…..n (Maurier, B. Stephen& Ralston Anthony, 1985).

Bukti :

Misalkan G (V,E) adalah graf sederhana, dan (u,v) $\in$ E, u,v $\in$ V.

Karena G adalah graf sederhana, maka banyaknya sisi yang menghubungkan dengan u dan v yakni salah satu dari 0 atau 1. Sehingga matriks *adjacency* dari G adalah matriks 0-1. Graf sederhana tidak memiliki simpul yang berhubungan dengan dirinya sendiri. Maka $a_{ii} = 0$ untuk masing-masing i = 1,2,…n.

Teorema 2.4

Jika G = (V,E) adalah graf, maka A(G) adalah matriks symetri (Buckley, Fred/Harary Frank, 1989).

Bukti :

Misalkan $v_i, v_j \in$ V. Jika v_i tidak berhubungan dengan v_j, maka $a_{ij} = 0 = a_{ji}$. Tapi, jika v_i *adjacency* dengan v_j , maka masing-masing a_{ij} dan a_{ji} menunjukkan banyaknya sisi yang *incidency* antara v_i dan v_j. Sehingga $a_{ij} = a_{ji}$.

Teorema 2.5

Untuk suatu (p,q) graf G dengan *incidency* B,

$$A(L(G)) = B^tB - 2I$$

dengan

$A(L(G))_{qxq}$	: matriks *adjacency* dari *linegraf* G	
B_{pxq}	: matriks *incidency* dari graf G	
I_{qxq}	: matriks identitas	(Buckley, Fred/Harary Frank, 1989).

Bukti :

Dari teori sebelumnya telah diketahui bahwa *linegraf* diperoleh dari graf sederhana dimana sisi dari graf G merupakan simpul pada *linegraf*. Sehingga sangat jelas bahwa A(LG)) adalah matriks *n x n* dengan *n* merupakan banyaknya simpul pada *linegraf* sekaligus menyatakan banyaknya sisi pada graf G. Sementara matriks B merupakan matriks *incidency* dimana entri-entrinya menyatakan hubungan antara sisi dan simpul dari graf G.

Teorema 2.6

Misalkan G = (V,E) adalah graf dan misalkan $v \in V$ dan A(G) adalah matriks *adjacency* dari G. Jumlah entri-entri pada kolom v dari A(G) adalah banyaknya sisi yang berincidency dengan v (Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990).

Bukti :

Untuk setiap sisi yang berincidency dengan v menyumbang 1 pada kolom v dari A(G). Sehingga jumlah dari entri-entri pada kolom v adalah banyaknya sisi yang berincidency dengan v.

B A B III

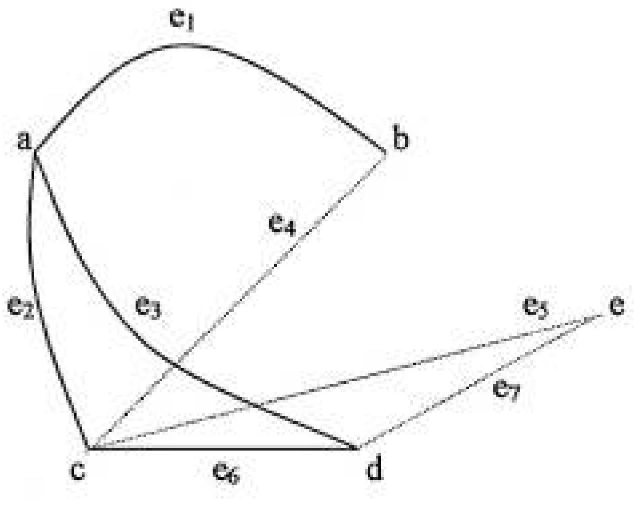
MATRIKS TAK NEGATIF YANG DIPEROLEH DARI KONSTRUKSI GRAF

Dalam penulisan ini, matriks tak negatif yang diperoleh dari konstruksi graf adalah matriks *adjacency* dan matriks *incidency.*

Misalkan V = { a,b,c,d} dan E = { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}

dan didefinisikan $f : E \longrightarrow \{(v_1,v_2);\ v_1,v_2 \in V\}$ dengan $f(e_1) = (a,b)$, $f(e_2) = (a,c)$, $f(e_3) = (a,d)$, $f(e_4) = (b,c)$, $f(e_5) = (c,e)$, $f(e_6) = (c,d)$, $f(e_7) = (d,e)$.

maka G = (V, E,f) dapat digambarkan sebagai berikut :



Graf G

Matriks *adjacency* yang bersesuaian dengan graf diatas adalah :

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks *incidency* yang bersesuaian dengan graf di atas adalah :

$$I(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Bentuk dari dua matriks di atas yang bersesuaian dengan graf, merupakan matriks tak negatif yakni matriks yang entri-entrinya tak negatif.

Dalam pembahasan ini, akan dikonstruksi suatu graf segitiga (Γ_n) untuk mendapatkan suatu matriks tak negatif dengan parameter sebagai berikut :

$$\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$$

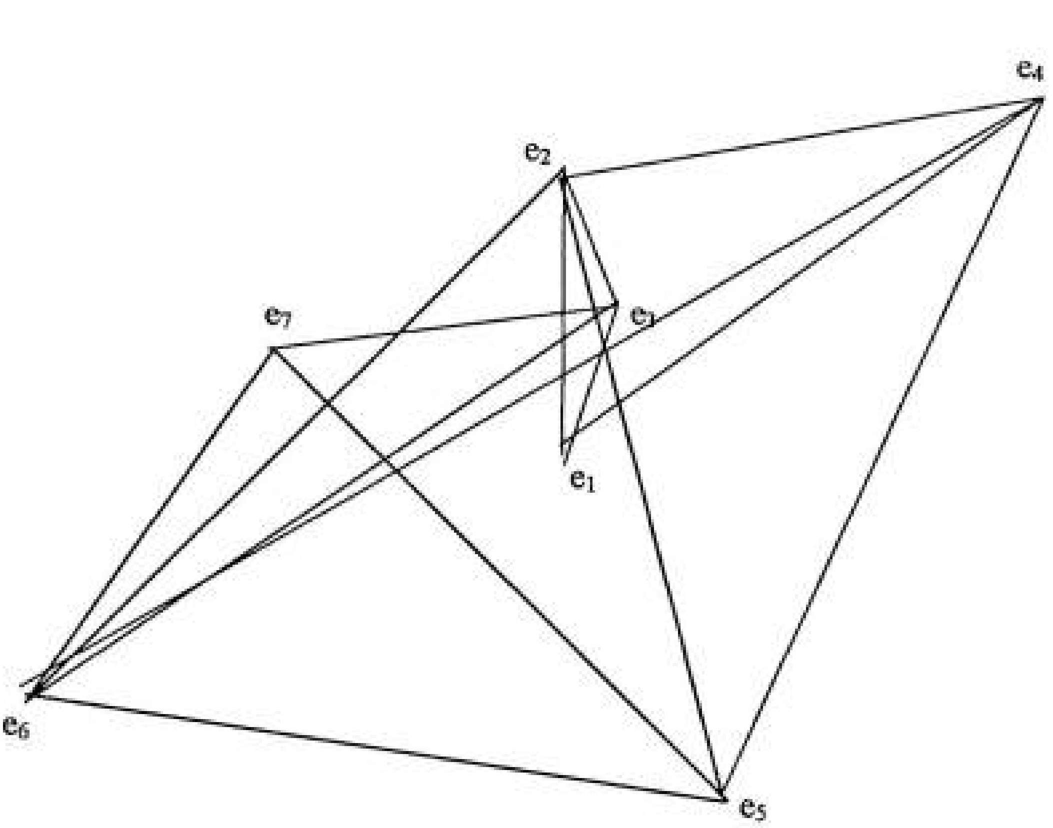
dimana $\binom{n}{2}$: banyaknya simpul

2(n-2) : derajat pada tiap-tiap simpul

n-2 : jika αβ adalah sebuah sisi, maka n-2 menyatakan banyaknya simpul yang menghubungkan antara α dan β.

4 : jika αβ bukan sisi, maka banyaknya simpul yang menghubungkan antara αβ sebanyak 4.

Sesuai dengan uraian dari bab 2, *linegraf* L(G) juga merupakan graf segitiga. *linegraf* L(G) dikonstruksi dari graf lengkap G. Berikut ini *linegraf* dari G



Linegraf (L(G))

Matriks *adjacency* yang bersesuaian dengan graf di atas adalah

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A. Bentuk Kuadratik yang Diperoleh dari Matriks tak Negatif

Berdasarkan teorema 2.5, Terdapat hubungan antara matriks *adjacency* yang bersesuaian dengan *linegraf* L(G) dan matriks *incidency* dari graf G, yakni :

$$A(G)_n = I(G)_n^{\ T} I(G)_n - 2I_N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dimana $A(G)_n$ = Matriks *adjacency* dari *linegraf* L(G)

$M(G)_n$ = Matriks *incidency* dari graf G

I_N = Matriks identitas

Dari persamaan (1), dapat diperoleh suatu bentuk kuadratik

$$Q = (x_1 \ldots\ldots x_N) A(G)_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{bmatrix} = (x_1 . x_2 \ldots\ldots x_N) I(G)_n^{\ T} I(G) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{bmatrix} - 2\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$= \Omega_1^{\ 2} + \Omega_2^{\ 2} + \ldots. + \Omega_n^{\ 2} - 2\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2}$$

dengan $(x_1 \ldots. x_N)$ adalah nilai-nilai eigen dari $A(G)_n$

$\Omega_i = x_{kj_{i(1)}} + \ldots.. + x_{kj_{i(n-1)}}$; $j_{i(1)} \ldots\ldots j_{i(n-1)}$ adalah sisi-sisi dari G yang incidency dengan simpul i dan k≠i.

B. Konstruksi Graf Segitiga Γ_n

- Untuk n = 3

Misalkan N = { 1,2,3 }

jadi S = {(1,2), (1,3), (2,3)}

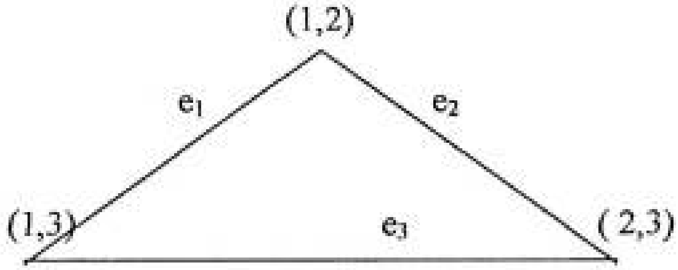
Didefinisikan graf K_3 = (V,E) dengan V = S, E adalah himpunan semua sisi pada graf K_3 yang bersifat, misalkan α dan β ∈ S, maka αβ =βα adalah sisi dari K_3 jika dan hanya jika $|\alpha \cap \beta| = 1$. Berdasarkan parameter dari graf segitiga Γ_n yaitu :

$$\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$$

maka untuk n = 3, parameter K_3 adalah (3, 2, 1, 4), dengan keterangan sebagai berikut :

- Banyaknya simpul ada tiga
- Banyaknya derajat untuk masing-masing simpul adalah dua
- Jika αβ adalah sisi, maka banyaknya simpul yang menghubungkan antara simpul α dan simpul β adalah 1
- Jika αβ bukan sisi, maka banyaknya simpul yang menghubungkan antara α dan β adalah empat.

Dari parameter graf K_3, maka gambar K_3 sebagai berikut :



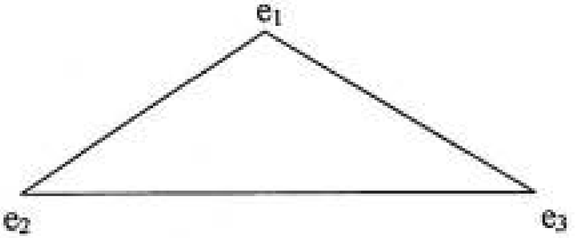
Graf K_3

Matriks *adjacency* $A(G)_3$ dan matriks *incidency* $I(G)_3$ yang bersesuaian dengan graf di atas adalah

$$A(G)_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(G)_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adapun *linegraf* dari graf lengkap K_3 di atas sebagai berikut :



Graf $L(K_3)$

➢ untuk n = 5

Misalkan N = { 1,2,3,4,5 }

jadi S = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3.4), (3,5), (4,5)}

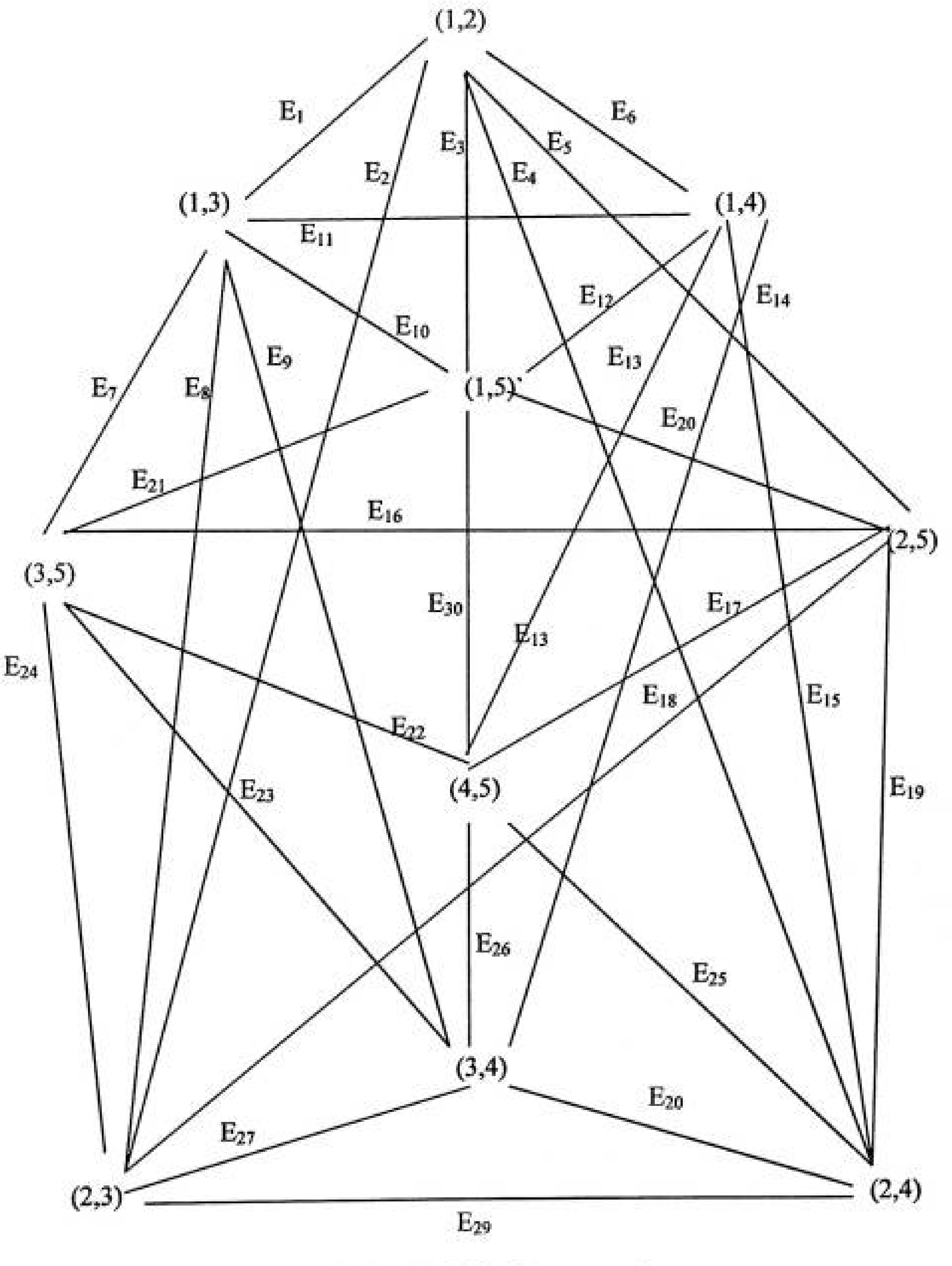
Didefinisikan graf K_5 = (V,E) dengan V = S, E adalah himpunan semua sisi pada graf K_5 yang bersifat, misalkan α dan β Є S, maka αβ =βα adalah sisi dari K_5 jika dan hanya jika $|\alpha \cap \beta| = 1$. Berdasarkan parameter dari graf segitiga Γ_n yaitu :

$$\left(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$$

maka untuk n = 5, parameter K_5 adalah $\left(\binom{5}{2}, 6, 3, 4\right)$ dengan keterangan sebagai berikut :

- Banyaknya simpul ada sepuluh
- Banyaknya derajat untuk masing-masing simpul adalah enam
- Jika αβ adalah sisi, maka banyaknya simpul yang menghubungkan antara simpul α dan simpul β adalah tiga
- Jika αβ bukan sisi, maka banyaknya simpul yang menghubungkan antara α dan β adalah empat.

Dari parameter graf K_5, maka gambar K_5 sebagai berikut



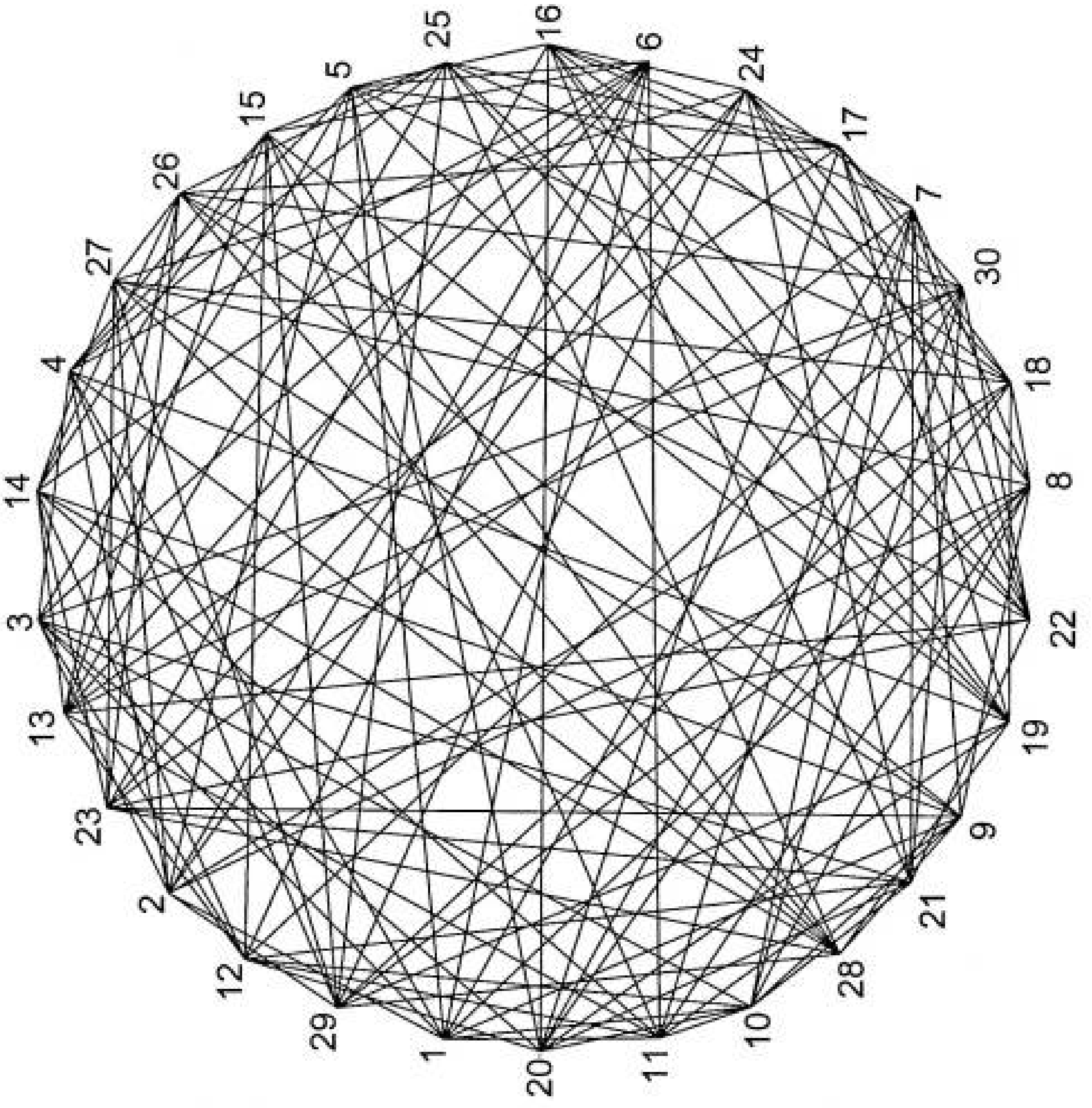
Graph Segi Tiga dengan n = 5

Matriks *adjacency* $A(G)_5$ dan matriks *incidency* $I(G)_5$ yang bersesuaian dengan graf K_5 adalah

$$A(G)_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I(G)_5 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pada graf K_5 pada halaman sebelumnya, dapat dikonstruksi suatu *linegraf* ($L(K_5)$). Himpunan simpul dari graf $L(K_5)$ beranggotakan sisi-sisi dari graf K_5. Banyaknya simpul dari $L(K_5)$ adalah 30. Berikut ini adalah *linegraf* ($L(K_5)$).



Linegraph (L(k5))

B A B IV

PENGHALUSAN KETAKSAMAAN JLL PADA MATRIKS TAK NEGATIF MELALUI KONSTRUKSI GRAF

Penghalusan dari ketaksamaan JLL ini sangatlah sederhana, namun hal tersebut mempunyai beberapa aplikasi yang sangatlah penting. Salah satu aplikasi yang dimaksudkan yaitu dapat menunjukkan bahwa terdapat suatu vektor real $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ yang bukan spektrum dari matriks tak negatif 5 x 5 tetapi terdapat vektor real $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, 0)$ yang merupakan spektrum dari matriks simetri tak negatif 6 x 6.

Dalam pembahasan ini, akan dibuktikan suatu teorema utama. Dengan teorema tersebut merupakan inti dari pembahasan ini.

Teorema Utama :

Misalkan A matriks tak negatif n x n dengan trace(A) = 0 dan n ganjil, maka $(n-1)\delta_4 \geq \delta_2^{\,2}$.

A. Ketaksamaan Johnson Loewy dan London

Teorema 3.1

Misalkan $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ adalah spektrum dari matriks tak negatif *n x n*. Maka

$$(\delta_k)^m \leq n^{m-1}\delta_{km} \quad \text{untuk beberapa bilangan bulat positif k dan m}$$

Bukti : Misalkan A = [a_{ij}] adalah matriks tak negatif *n x n* dengan spektrum $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$B = [b_{ij}] = A^k$

dan

$$D = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots\ldots\ldots b_{nn})$$

maka $B^m - D^m \geq 0$ atau $B^m - D^m$ tak negatif

oleh karena itu
$$\begin{aligned} B^m &\geq D^m \\ tr(B^m) &\geq tr(D^m) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^m \\ &\geq \frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^m \end{aligned}$$

tetapi $tr\left(B^m\right) = tr\left(A^{km}\right) = \delta_{km}$

$$tr\left(A^{km}\right) \geq \frac{1}{n^{m-1}}\left(\sum_{i=n}^{n} b_{ii}\right)^m$$

dan $\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(B) = tr(A^k) = \delta_k$

maka
$$\delta_{km} \geq \frac{1}{n^{m-1}}\delta_k^{\ m}$$

atau
$$n^{m-1}\delta_{km} \geq \delta_k^{\ m} \quad \text{(terbukti)}$$

B. Matriks tak Negatif dengan Trace 0

Misalkan A= [a_{ij}] adalah matriks tak negatif dengan trace 0

$$\delta_k = trace(A^k) \qquad ; \quad k = 1,2,.....n$$

- Untuk matriks tak negatif A_{5x5} dengan k = 2

Akan ditentukan bentuk umum dari $\delta_2 = trace(A^2)$

$$I(G)_5 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$A(G)_5 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix}$$

Dimana :

$I(G)_5$ adalah matriks *incidency* dari graf K_5

$A(G)_5$ adalah matriks *adjacency* dari *linegraf* $L(K_5)$

Misalkan nilai eigen untuk $A(G)_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

maka, dari persamaan (2) :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) I(G)_5^T I(G)_5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} =$$

$$(x_2a_{21} + x_3a_{31} + x_4a_{41} + x_5a_{51})^2 + (x_1a_{12} + x_3a_{31} + x_4a_{42} + x_5a_{52})^2 +$$

$$(x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_4a_{43} + x_5a_{53})^2 + (x_1a_{14} + x_2a_{24} + x_3a_{35} + x_5a_{54})^2 +$$

$$(x_1a_{15} + x_2a_{25} + x_3a_{35} + x_4a_{45})^2$$

sehingga diperoleh $\Omega_1 = (x_2a_{21} + x_3a_{31} + x_4a_{41} + x_5a_{51})^2$

$$\Omega_2 = (x_1a_{12} + x_3a_{31} + x_4a_{42} + x_5a_{52})^2$$

$$\Omega_3 = (x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_4a_{43} + x_5a_{53})^2$$

$$\Omega_4 = (x_1a_{14} + x_2a_{24} + x_3a_{35} + x_5a_{54})^2$$

$$\Omega_5 = (x_1a_{15} + x_2a_{25} + x_3a_{35} + x_4a_{45})^2$$

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

dimana $A_{5x5} = [a_{ij}]$ merupakan matriks tak negatif.

Diperoleh trace (A^2) =

$$a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51} + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{25}a_{52} +$$

$$a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53} + a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54} +$$

$$a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45}.$$

diketahui bahwa

$$S_2 = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5 \quad \text{dimana } \Omega_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5} a_{ij}a_{ji} \quad (\text{i} = 1,2,\ldots..5)$$

maka $\Omega_1 = a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51}$

$\Omega_2 = a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{25}a_{52}$

$\Omega_3 = a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53}$

$\Omega_4 = a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54}$

$\Omega_5 = a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45}$

diperoleh

$$\delta_2 = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5$$

$$= a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51} + a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53} +$$

$$a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54} + a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45}$$

= trace (A^2)

misalkan

$$y_1 = a_{12}a_{21}$$
$$y_2 = a_{13}a_{31}$$
$$y_3 = a_{14}a_{41}$$

$$y_{n-1} = a_{1n}a_{n1}$$

$$y_N = a_{n-1n}a_{nn-1} \qquad \text{dimana } \mathrm{N} = \binom{n}{2}; \qquad \mathrm{n} = 5$$

sehingga $\delta_2 = 2\left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)$

dan $\delta_2{}^2 = 4\sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 + 8\sum y_l y_m$ dengan $y_l = a_{pq}a_{qp}$ & $y_m = a_{rs}a_{sr}$

$$\Omega_1^2 = \left(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41} + a_{15}a_{51}\right)^2$$

$$\Omega_2^2 = \left(a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{25}a_{52}\right)^2$$

$$\Omega_3^2 = \left(a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{34}a_{43} + a_{35}a_{53}\right)^2$$

$$\Omega_4^2 = \left(a_{41}a_{14} + a_{42}a_{24} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54}\right)^2$$

$$\Omega_5^2 = \left(a_{51}a_{15} + a_{52}a_{25} + a_{53}a_{35} + a_{54}a_{45}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{5}\Omega_i{}^2 = 2[(y_1{}^2 + \ldots + y_{10}{}^2) + y_1(y_2 + \ldots y_7) + y_2(y_3 + y_4 + y_5 + y_8 + y_9) +$$

$$y_3(y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + y_4(y_7 + y_9 + y_{10}) + y_5(y_6 + \ldots + y_9) +$$

$$y_6(y_7 + y_8 + y_{10}) + y_7(y_9 + y_{10}) + y_8(y_9 + y_{10}) + 2y_9y_{10}]$$

bentuk $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\;2}$ di atas, merupakan bentuk kuadratik dalam $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{10}$.

Demikian juga halnya dengan $\delta_4 =$ trace (A^4), merupakan bentuk kuadratik dari $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{10}$,

$$\delta_4 = 2(y_1^{\;2} + \ldots y_{10}^{\;2}) + 4[y_1(y_2 + \ldots + y_7) + y_2(y_3 + y_4 + y_5 + y_8 + y_9) + y_3(y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + y_4(y_7 + y_9 + y_{10}) + y_5(y_6 + \ldots + y_9) + y_6(y_7 + y_8 + y_{10}) + y_7(y_9 + y_{10}) + y_8(y_9 + y_{10}) + 2y_9y_{10}]$$

$$\delta_4 - \sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\;2} = 2[y_1(y_2 + \ldots + y_7) + y_2(y_3 + y_4 + y_5 + y_8 + y_9) + y_3(y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + y_4(y_7 + y_9 + y_{10}) + y_5(y_6 + \ldots + y_9) + y_6(y_7 + y_8 + y_{10}) + y_7(y_9 + y_{10}) + y_8(y_9 + y_{10}) + 2y_9y_{10}]$$

$$= 2\sum y_l y_m$$

dengan $y_l = a_{pq}a_{qp}$ & $y_m = a_{rs}a_{sr}$

Semua entri-entri diagonal dari matriks A adalah 0 dan oleh karena itu $\delta_4 - \sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\;2}$ merupakan suatu jumlahan dari bentuk $a_{pq}a_{qp}a_{rs}a_{sr}$. Akan ditentukan suatu syarat dari bentuk $a_{pq}a_{qp}a_{rs}a_{sr}$ dimana $p \neq q, r \neq s$ dan $|\{p,q\} \cap \{r,s\}| = 1$.

Jika $\{r,s\}=\{p,q\}$, syarat ini hanya terdapat pada komponen $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$.

Andaikan $\{r,s\}\neq\{p,q\}$ dan $\{r,s\}\cap\{p,q\}$ kosong, model seperti ini tidak terdapat pada anggota δ_4.

- Jika p = r, syarat ini terdapat pada bentuk dari δ_4 - $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$ yaitu $a_{12}a_{21}a_{13}a_{31}$

- Jika p = s, syarat ini tidak terdapat pada bentuk dari δ_4 - $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$

- Jika $\{p,q\}\cap\{r,s\}=\{q\}$, syarat ini terdapat pada bentuk dari δ_4 - $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$.

Maka dapat diperoleh :

$$3\left(\delta_4-\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}\right)=2\left(2\sum y_l y_m\right)$$

$$\delta_4 \quad =\frac{4}{3}\sum y_l y_m+\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$$

Berdasarkan bentuk dari δ_4, $y_l y_m$ dan $\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\ 2}$, ternyata dapat diperoleh suatu pertidaksamaan secara umum yaitu :

$$\delta_4 \geq \Omega_1^{\ 2}+\Omega_2^{\ 2}+\ldots+\Omega_5^{\ 2}+2\sum y_l y_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Kemudian, dari persamaan (2) di depan, maka pertidaksamaan (3) menjadi

$$\delta_4 \geq \Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2 + ... + \Omega_5{}^2 + (y_1 ... y_{10}) A(L(K_5)) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_{10} \end{bmatrix} \text{..............(4)}$$

tetapi $\Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2 + ... + \Omega_5{}^2 = (y_1 ... y_{10}) I(K_5)^T I(K_5) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_{10} \end{bmatrix}$

dan $A(L(K_5)) = I(K_5)^T I(K_5) - 2I_{10}$

dimana $A(L(K_5))$ = matriks adjacency dari *linegraf* $L(K_5)$

$I(K_5)$ = matriks incidency dari graf K_5

I = matriks identitas *nxn*

maka persamaan (4) menjadi : $\delta_4 \geq 2\left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - \sum_{i=1}^{10} y_i{}^2\right]$........................(5)

Untuk membuktikan teorema utama, cukup ditunjukkan bahwa :

$$2(n-1)\left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - \sum_{i=1}^{10} y_i{}^2\right] \geq \delta_2{}^2 \qquad ; n = 5$$

$$8\left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - \sum_{i=1}^{10} y_i{}^2\right] = 8\left[3\sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 + 2\sum y_l y_m\right]$$

$$= 24\sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 + 16\sum y_l y_m$$

$$\geq 4\sum_{i=1}^{10} y_i^{\,2} + 8\sum y_l y_m$$

$$= \delta_2^{\,2}$$

Secara umum, dari uraian di atas telah ditunjukkan bahwa

$$2(\text{n-1})\left[\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{10} y_i^{\,2}\right] \geq \delta_2^{\,2} \quad \text{.................................(6)}$$

Walaupun demikian, telah diperoleh suatu pertidaksamaan (5) yakni :

$$\delta_4 \geq 2\left[\sum_{i=1}^{5}\Omega_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{10} y_i^{\,2}\right]$$

Berdasarkan ketaksamaan (5) dan (6) diatas maka diperoleh suatu bentuk

ketaksamaan $\qquad (n-1)\delta_4 \geq \delta_2^{\,2}$ ....(7)

Sebagaimana telah diketahui ketaksamaan JLL $n^{m-1}\delta_4 \geq \delta_2^{\,2}$

Maka ketaksamaan (7) merupakan suatu penghalusan dari ketaksamaan JLL itu sendiri yang berlaku untuk matriks tak negatif dengan n = 5.

B A B V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Bentuk kuadratik yang diperoleh dari hubungan antara matriks *adjacency* dari *linegraf* dan matriks *incidency* dari graf G yaitu :

$$Q = (x_1 \ldots\ldots x_N) A(G)_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{bmatrix} = (x_1 . x_2 \ldots\ldots x_N) I(G)_n{}^T I(G) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{bmatrix} - 2\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2$$

$$= \Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2 + \ldots + \Omega_n{}^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2$$

Berdasarkan bentuk δ_4, $y_l y_m$ dan $\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2$ maka diperoleh suatu bentuk pertidaksamaan $\delta_4 \geq \left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - 2\sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 \right]$, kemudian dari bentuk kuadratik di atas, maka pertidaksamaan tersebut menjadi

$\delta_4 \geq 2\left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - \sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 \right]$, sehingga pertidaksamaan ini mendukung teorema utama. Secara umum, untuk n = 5 telah ditunjukkan bahwa

$2(\text{n-1})\left[\sum_{i=1}^{5} \Omega_i{}^2 - \sum_{i=1}^{10} y_i{}^2 \right] \geq \delta_2{}^2$ sehingga dapat diperoleh suatu penghalusan dari ketaksamaan JLL yang berlaku untuk matriks tak negatif 5 x 5.

B. SARAN

Dalam tulisan ini terdapat banyak kekurangan baik itu dari segi materi maupun dari metode yang digunakan. Disarankan kepada pembaca yang ingin melanjutkan tulisan ini agar dapat mencari metode lain untuk kasus ini dan juga dapat melanjutkan untuk matriks tak negatif dengan $n = 5$.

DAFTAR PUSTAKA

Buckley, Fred/Harary Frank, 1989, ***Distance in Graph***, Addison Wesley Publishing company, New York.

Minc, Henryk, 1988, ***Nonnegative Matrices***, A-Wiley Interscience Publication, New York.

Maurier, B. Stephen& Ralston Anthony, 1985, ***Discrete Algorithmic Mathematics***. Addison-Wesley Publishing company, New York.

Fletcher peter, Hoyle hughes, Wayne paty,1990, ***Foundation of Discrete Mathematics***, PWS-Kent Publishing Company, Boston.

Hasanah,Uswah, 2005, ***Matriks Nonnegative yang Diperoleh dari Spektrum Nilai Eigen Kompleks***, Skripsi, Makassar.

Laffey, J Thomas&Meehan Eleanor, 1998, ***A Refinement Of Inequality Of JLL On Nonnegative Matrices and Some Aplication***, http://math.technion.ac.il/iic/eia

LAMPIRAN

Berikut ini beberapa kasus pada vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ yang bukan spektrum dari matriks tak negatif 5 x 5.

Kasus 1.

Vektor $\sigma = (10, 8, -7, -6, -5)$

Telah diperoleh syarat spektrum untuk matriks tak negatif dengan $n = 5$

1. $\lambda_1 \geq \lambda_j$; (j = 2,3,4,5)
2. $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i \geq 0$
3. $n^{2-1}\delta_4 \geq \delta_2^{\ 2}$ (ketaksamaan JLL dengan m = 2 dan k = 2)
4. $(n-1)\delta_4 \geq \delta_2^{\ 2}$

Untuk vektor $\sigma = (10, 8, -7, -6, -5)$

- Syarat 1 : dengan $\lambda_1 = 10$

$$\lambda_1 \geq \lambda_j \quad ; j = 2,3,4,5$$

- Syarat 2 :

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 10 + 8 + (-7) + (-6) + (-5)$$

$$= 0$$

- Syarat 3 :

$$\delta_2^{\ 2} = (10^2 + 8^2 + (-7)^2 + (-6)^2 + (-5)^2)^2$$

$$= 75076$$

$$\delta_4 = (10^4 + 8^4 + (-7)^4 + (-6)^4 + (-5)^4)$$

$$= 18418$$

$5\delta_4 = 92090$

$\delta_2{}^2 \leq 5\delta_4$ syarat 3 terpenuhi

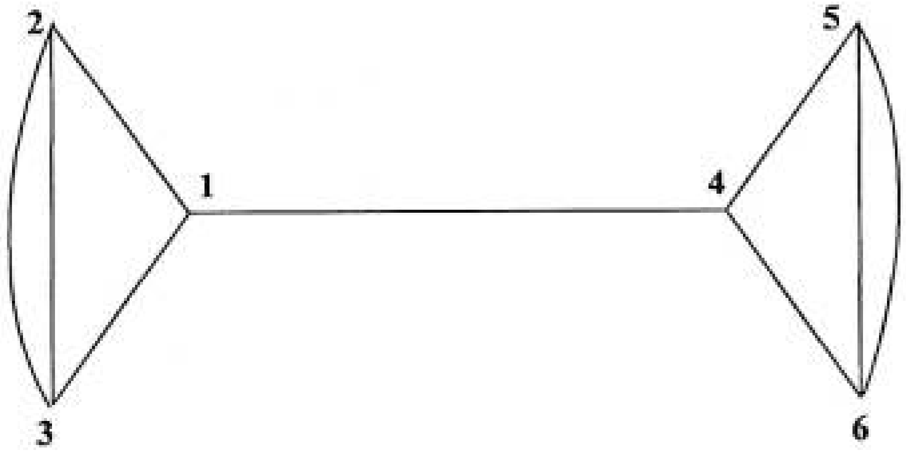
Akan tetapi syarat 4 tidak terpenuhi

$4\delta_4 - \delta_2{}^2 = -1404$

karena tidak memenuhi salah satu dari 4 syarat untuk spektrum matriks tak negatif, maka vektor σ = (10, 8, -7, -6, -5) bukanlah spektrum matriks tak negatif 5 x 5.

Kasus 2

Dari suatu graph G sederhana di bawah ini, dapat diperoleh matriks *adjacency* yang merupakan matriks tak negatif.



yakni $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Spektrum dari matriks A adalah : $\sigma = \left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2, 0\right)$

dengan spektrum tersebut memenuhi syarat untuk spektrum matriks tak negatif $n \times n$, yaitu

- $\lambda_1 \geq \lambda_j$; j = 2,3,4,5,6 dengan $\lambda_1 = 3$
- $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = \left[3 + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right) + (-2) + (-2) + 0\right]$

  $= 0$

Akan tetapi vektor $\sigma = \left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2\right)$ bukanlah spektrum untuk matriks tak negatif 5 x 5 meskipun memenuhi syarat 1,2,3 yaitu :

- syarat 1 : dengan $\lambda_1 = 10$

$\lambda_1 \geq \lambda_j$; j = 2,3,4,5

- Syarat 2 :

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = \left[3 + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right) + (-2) + (-2)\right]$$

$$= 0$$

- Syarat 3 : $\delta_2{}^2 = \left(3^2 + \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right)\right)^2 + (-2)^2 + (-2)^2\right)^2$

$$= 676$$

$$\delta_4 = \left(3^4 + \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right)\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right)\right)^4 + (-2)^4 + (-2)^4 \right)$$

$$= 162$$

$$5\delta_4 = 810$$

maka $\delta_2^{\ 2} \le 5\delta_4$ sehingga syarat 3 terpenuhi

Meskipun $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$ akan tetapi vektor $\sigma = \left(3, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{17}\right), -2, -2\right)$

tidak memenuhi syarat 4 yang berlaku untuk matriks tak negatif 5 x 5, karena

$$4\delta_4 - \delta_2^{\ 2} = -28$$

dimana : $4\delta_4 = 648$

$$\delta_2^{\ 2} = 676$$

Berikut ini kasus pada vektor $\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ yang merupakan spektrum dari matriks tak negatif 5 x 5.

Kasus 3

Vektor $\sigma = \left(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{17}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right)$

Akan ditunjukkan bahwa vektor tersebut memenuhi syarat sebagai spektrum matriks tak negatif 5 x 5

- Syarat 1 : dengan $\lambda_1 = \frac{9}{2}$

$$\lambda_1 \ge \lambda_j \quad ; j = 2,3,4,5$$

- Syarat 2 : $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = \frac{9}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{17}{10}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 0$

- Syarat 3 : $\delta_2{}^2 = \left(\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{17}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2$

$= 880{,}9024$

$\delta_4 = \left(\frac{9}{2}\right)^4 + \left(-\frac{5}{2}\right)^4 + \left(-\frac{17}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$= 457{,}5412$

dan $5\delta_4 = 2287{,}706$

diperoleh $\delta_2{}^2 \le 5\delta_4$ sehingga syarat 3 terpenuhi

- Syarat 4 : $4\delta_4 = 1830{,}1648$

diperoleh $4\delta_4 \ge \delta_2{}^2$ sehingga syarat 4 juga terpenuhi

Karena keempat syarat tersebut terpenuhi, maka vektor $\sigma = \left(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{17}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right)$ memenuhi syarat sebagai spektrum matriks tak negatif 5 x 5. Adapun matriks dari spektrum tersebut yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
s( 'a12', 'a13', 'a14', 'a15', 'a21', 'a23', 'a24', 'a25', 'a31', 'a32', 'a34', 'a35', 'a4

0 a12 a13 a14 a15; a21 0 a23 a24 a25; a31 a32 0 a34 a35; a41 a42 a43 0 a45; a51 a52 a53 a5

^2

,1)     %(menampilkan elemen pada baris 1 kolom 1 pada matriks B)

,2)     %(menampilkan elemen pada baris 2 kolom 2 pada matriks B)

,3)     %(menampilkan elemen pada baris 3 kolom 3 pada matriks B)

,4)     %(menampilkan elemen pada baris 4 kolom 4 pada matriks B)

,5)     %(menampilkan elemen pada baris 5 kolom 5 pada matriks B)

A^4

,1)      %(menampilkan elemen pada baris 1 kolom 1 pada matriks C)

,2)      %(menampilkan elemen pada baris 2 kolom 2 pada matriks C)

,3)      %(menampilkan elemen pada baris 3 kolom 3 pada matriks C)

,4)      %(menampilkan elemen pada baris 4 kolom 4 pada matriks C)

,5)      %(menampilkan elemen pada baris 5 kolom 5 pada matriks C)
```

```
 0, a12, a13, a14, a15]
21,   0, a23, a24, a25]
31, a32,   0, a34, a35]
41, a42, a43,   0, a45]
51, a52, a53, a54,   0]



12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51,           a13*a32+a14*a42+a15*a52,           a12*a23+a14*a ↙
a15*a53,          a12*a24+a13*a34+a15*a54,           a12*a25+a13*a35+a14*a45]
       a23*a31+a24*a41+a25*a51, a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52,           a21*a13+a24*a ↙
a25*a53,          a21*a14+a23*a34+a25*a54,           a21*a15+a23*a35+a24*a45]
       a32*a21+a34*a41+a35*a51,           a31*a12+a34*a42+a35*a52, a13*a31+a23*a32+a34*a ↙
a35*a53,          a31*a14+a32*a24+a35*a54,           a31*a15+a32*a25+a34*a45]
       a42*a21+a43*a31+a45*a51,           a41*a12+a43*a32+a45*a52,           a41*a13+a42*a ↙
a45*a53, a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54,           a41*a15+a42*a25+a43*a35]
       a52*a21+a53*a31+a54*a41,           a51*a12+a53*a32+a54*a42,           a51*a13+a52*a ↙
a54*a43,          a51*a14+a52*a24+a53*a34, a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54]


 =

*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51


 =

*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52


 =

*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53


 =

*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54


 =

*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54



2*(a21*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a23*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a24*(a42*a21+a ↙
31+a45*a51)+a25*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a13*(a31*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51) ↙
*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a34*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a35*(a52*a21+a53*a31+a54*a41 ↙
14*(a41*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a42*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a43*(a32*a21+ ↙
a41+a35*a51)+a45*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a15*(a51*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51 ↙
2*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a53*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a54*(a42*a21+a43*a31+a45*a5 ↙
          a12*(a21*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a23*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a24*(a41*a1 ↙
```

```
a43*a32+a45*a52)+a25*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a13*(a31*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a32*
12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a34*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a35*(a51*a12+a53*a32+a54*
2))+a14*(a41*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a42*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a43*(a31*a
+a34*a42+a35*a52)+a45*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a15*(a51*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a52
a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a53*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a54*(a41*a12+a43*a32+a45
52)),          a12*(a21*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a23*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+
4*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a25*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a13*(a31*(a12*a23+a14*a43+a1
53)+a32*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a34*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a35*(a51*a13+a52*a23+a
*a43))+a14*(a41*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a42*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a43*(a13*a31+a2
32+a34*a43+a35*a53)+a45*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a15*(a51*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+
2*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a53*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a54*(a41*a13+a42*a23+
5*a53)),          a12*(a21*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a23*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a24*(
4*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a25*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a13*(a31*(a12*a24+a13*a34
15*a54)+a32*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a34*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a35*(a51*a1
a52*a24+a53*a34))+a14*(a41*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a42*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a43*
31*a14+a32*a24+a35*a54)+a45*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a15*(a51*(a12*a24+a13*a34+a15*a5
+a52*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a53*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a54*(a14*a41+a24*a42+a34*a
+a45*a54)),          a12*(a21*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a23*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a2
(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a25*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a13*(a31*(a12*a25+a13*
5+a14*a45)+a32*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a34*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a35*(a15*a51+a25
52+a35*a53+a45*a54))+a14*(a41*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a42*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a
*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a45*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a15*(a51*(a12*a25+a13
35+a14*a45)+a52*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a53*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a54*(a41*a15+a4
a25+a43*a35))]
        a21*(a12*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a13*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a14*(a42*a21+a
*a31+a45*a51)+a15*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a23*(a31*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)
32*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a34*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a35*(a52*a21+a53*a31+a54*a41
+a24*(a41*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a42*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a43*(a32*a21+
4*a41+a35*a51)+a45*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a25*(a51*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51
a52*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a53*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a54*(a42*a21+a43*a31+a45*a5
), a21*(a12*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a13*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a14*(a41*a1
a43*a32+a45*a52)+a15*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a23*(a31*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a32*
12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a34*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a35*(a51*a12+a53*a32+a54*
2))+a24*(a41*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a42*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a43*(a31*a
a34*a42+a35*a52)+a45*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a25*(a51*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a52
12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a53*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a54*(a41*a12+a43*a32+a45
52)),          a21*(a12*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a13*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+
*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a15*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a23*(a31*(a12*a23+a14*a43+a1
53)+a32*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a34*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a35*(a51*a13+a52*a23+a
a43))+a24*(a41*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a42*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a43*(a13*a31+a2
32+a34*a43+a35*a53)+a45*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a25*(a51*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+
*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a53*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a54*(a41*a13+a42*a23+
*a53)),          a21*(a12*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a13*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a14*(
*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a15*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a23*(a31*(a12*a24+a13*a34
5*a54)+a32*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a34*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a35*(a51*a1
52*a24+a53*a34))+a24*(a41*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a42*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a43*
1*a14+a32*a24+a35*a54)+a45*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a25*(a51*(a12*a24+a13*a34+a15*a5
a52*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a53*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a54*(a14*a41+a24*a42+a34*a
a45*a54)),          a21*(a12*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a13*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a1
a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a15*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a23*(a31*(a12*a25+a13*
+a14*a45)+a32*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a34*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a35*(a15*a51+a25
2+a35*a53+a45*a54))+a24*(a41*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a42*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a
(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a45*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a25*(a51*(a12*a25+a13
5+a14*a45)+a52*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a53*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a54*(a41*a15+a4
25+a43*a35))]
        a31*(a12*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a13*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a14*(a42*a21+a
a31+a45*a51)+a15*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a32*(a21*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)
3*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a24*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a25*(a52*a21+a53*a31+a54*a41
```

```
34*(a41*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a42*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a43*(a32*a21+
a41+a35*a51)+a45*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a35*(a51*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51
2*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a53*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a54*(a42*a21+a43*a31+a45*a5
         a31*(a12*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a13*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a14
1*a12+a43*a32+a45*a52)+a15*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a32*(a21*(a13*a32+a14*a42+a15*a
a23*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a24*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a25*(a51*a12+a53*a32+a54*
)+a34*(a41*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a42*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a43*(a31*a
34*a42+a35*a52)+a45*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a35*(a51*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a52
2*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a53*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a54*(a41*a12+a43*a32+a45
)), a31*(a12*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a13*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a14*(a41
+a42*a23+a45*a53)+a15*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a32*(a21*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a
a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a24*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a25*(a51*a13+a52*a23+a
43))+a34*(a41*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a42*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a43*(a13*a31+a2
2+a34*a43+a35*a53)+a45*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a35*(a51*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+
(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a53*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a54*(a41*a13+a42*a23+
a53)),          a31*(a12*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a13*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a14*(
a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a15*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a32*(a21*(a12*a24+a13*a34
*a54)+a23*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a24*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a25*(a51*a1
2*a24+a53*a34))+a34*(a41*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a42*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a43*
*a14+a32*a24+a35*a54)+a45*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a35*(a51*(a12*a24+a13*a34+a15*a5
52*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a53*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a54*(a14*a41+a24*a42+a34*a
45*a54)),          a31*(a12*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a13*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a1
41*a15+a42*a25+a43*a35)+a15*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a32*(a21*(a12*a25+a13*
a14*a45)+a23*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a24*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a25*(a15*a51+a25
+a35*a53+a45*a54))+a34*(a41*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a42*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a
a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a45*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a35*(a51*(a12*a25+a13
+a14*a45)+a52*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a53*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a54*(a41*a15+a4
5+a43*a35))]
      a41*(a12*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a13*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a14*(a42*a21+a
31+a45*a51)+a15*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a42*(a21*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)
*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a24*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a25*(a52*a21+a53*a31+a54*a41
43*(a31*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a32*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a34*(a42*a21+
a31+a45*a51)+a35*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a45*(a51*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51
2*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a53*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a54*(a42*a21+a43*a31+a45*a5
         a41*(a12*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a13*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a14
1*a12+a43*a32+a45*a52)+a15*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a42*(a21*(a13*a32+a14*a42+a15*a
a23*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a24*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a25*(a51*a12+a53*a32+a54*
)+a43*(a31*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a32*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a34*(a41*a
43*a32+a45*a52)+a35*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a45*(a51*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a52
2*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a53*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a54*(a41*a12+a43*a32+a45
)),          a41*(a12*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a13*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+
(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a15*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a42*(a21*(a12*a23+a14*a43+a1
3)+a23*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a24*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a25*(a51*a13+a
23+a54*a43))+a43*(a31*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a32*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a34*(a4
3+a42*a23+a45*a53)+a35*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a45*(a51*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+
(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a53*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a54*(a41*a13+a42*a23+
a53)), a41*(a12*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a13*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a14*(a14*a41+
a42+a34*a43+a45*a54)+a15*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a42*(a21*(a12*a24+a13*a34+a15*a54
3*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a24*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a25*(a51*a14+a52*a2
3*a34))+a43*(a31*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a32*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a34*(a14*a41
*a42+a34*a43+a45*a54)+a35*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a45*(a51*(a12*a24+a13*a34+a15*a5
52*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a53*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a54*(a14*a41+a24*a42+a34*a
45*a54)),          a41*(a12*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a13*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a1
41*a15+a42*a25+a43*a35)+a15*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a42*(a21*(a12*a25+a13*
a14*a45)+a23*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a24*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a25*(a15*a51+a25
+a35*a53+a45*a54))+a43*(a31*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a32*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a
a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a35*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a45*(a51*(a12*a25+a13
+a14*a45)+a52*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a53*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a54*(a41*a15+a4
```

```
+a43*a35))]
      a51*(a12*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a13*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a14*(a42*a21+a
1+a45*a51)+a15*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a52*(a21*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)
(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a24*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a25*(a52*a21+a53*a31+a54*a41
3*(a31*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a32*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a34*(a42*a21+
31+a45*a51)+a35*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a54*(a41*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51
*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a43*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a45*(a52*a21+a53*a31+a54*a4
         a51*(a12*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a13*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a14
*a12+a43*a32+a45*a52)+a15*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a52*(a21*(a13*a32+a14*a42+a15*a
23*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a24*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a25*(a51*a12+a53*a32+a54*
+a53*(a31*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a32*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a34*(a41*a
3*a32+a45*a52)+a35*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a54*(a41*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a42
*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a43*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a45*(a51*a12+a53*a32+a54
),          a51*(a12*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a13*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+
a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a15*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a52*(a21*(a12*a23+a14*a43+a1
)+a23*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a24*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a25*(a51*a13+a
3+a54*a43))+a53*(a31*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a32*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a34*(a4
+a42*a23+a45*a53)+a35*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a54*(a41*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+
a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a43*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a45*(a51*a13+a52*a23+
43)),          a51*(a12*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a13*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a14*(
41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a15*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a52*(a21*(a12*a24+a13*a34
a54)+a23*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a24*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a25*(a51*a1
*a24+a53*a34))+a53*(a31*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a32*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a34*
a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a35*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a54*(a41*(a12*a24+a13*a3
*a54)+a42*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a43*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a45*(a51*a14+a52*a
3*a34)), a51*(a12*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a13*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a14*(a41*a
2*a25+a43*a35)+a15*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a52*(a21*(a12*a25+a13*a35+a14*
a23*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a24*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a25*(a15*a51+a25*a52+a35
a45*a54))+a53*(a31*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a32*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a34*(a41*
42*a25+a43*a35)+a35*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a54*(a41*(a12*a25+a13*a35+a14
+a42*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a43*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a45*(a15*a51+a25*a52+a3
+a45*a54))]


=


a21*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a23*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a24*(a42*a21+a43
a45*a51)+a25*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a13*(a31*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a
23*a31+a24*a41+a25*a51)+a34*(a42*a21+a43*a31+a45*a51)+a35*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))
(a41*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+a42*(a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a43*(a32*a21+a3
+a35*a51)+a45*(a52*a21+a53*a31+a54*a41))+a15*(a51*(a12*a21+a13*a31+a14*a41+a15*a51)+
a23*a31+a24*a41+a25*a51)+a53*(a32*a21+a34*a41+a35*a51)+a54*(a42*a21+a43*a31+a45*a51))


=


(a12*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a13*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a14*(a41*a12+a43
a45*a52)+a15*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a23*(a31*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a32*(a12*
23*a32+a24*a42+a25*a52)+a34*(a41*a12+a43*a32+a45*a52)+a35*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))
(a41*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a42*(a12*a21+a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a43*(a31*a12+a3
+a35*a52)+a45*(a51*a12+a53*a32+a54*a42))+a25*(a51*(a13*a32+a14*a42+a15*a52)+a52*(a12
a23*a32+a24*a42+a25*a52)+a53*(a31*a12+a34*a42+a35*a52)+a54*(a41*a12+a43*a32+a45*a52))


=


(a12*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a13*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a14*(a41*a13+a42
a45*a53)+a15*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a32*(a21*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a23*(a13*
```

```
a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a24*(a41*a13+a42*a23+a45*a53)+a25*(a51*a13+a52*a23+a54*a43)) ↙
*(a41*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a42*(a21*a13+a24*a43+a25*a53)+a43*(a13*a31+a23*a32+a3 ↙
3+a35*a53)+a45*(a51*a13+a52*a23+a54*a43))+a35*(a51*(a12*a23+a14*a43+a15*a53)+a52*(a21 ↙
+a24*a43+a25*a53)+a53*(a13*a31+a23*a32+a34*a43+a35*a53)+a54*(a41*a13+a42*a23+a45*a53))
```

```
(a12*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a13*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a14*(a14*a41+a24*a42+a34 ↙
+a45*a54)+a15*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a42*(a21*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a23*(a31* ↙
a32*a24+a35*a54)+a24*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54)+a25*(a51*a14+a52*a24+a53*a34)) ↙
*(a31*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a32*(a21*a14+a23*a34+a25*a54)+a34*(a14*a41+a24*a42+a3 ↙
3+a45*a54)+a35*(a51*a14+a52*a24+a53*a34))+a45*(a51*(a12*a24+a13*a34+a15*a54)+a52*(a21 ↙
+a23*a34+a25*a54)+a53*(a31*a14+a32*a24+a35*a54)+a54*(a14*a41+a24*a42+a34*a43+a45*a54))
```

```
(a12*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a13*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a14*(a41*a15+a42*a25+a43 ↙
)+a15*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a52*(a21*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a23*(a31* ↙
a32*a25+a34*a45)+a24*(a41*a15+a42*a25+a43*a35)+a25*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54)) ↙
*(a31*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a32*(a21*a15+a23*a35+a24*a45)+a34*(a41*a15+a42*a25+a4 ↙
5)+a35*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))+a54*(a41*(a12*a25+a13*a35+a14*a45)+a42*(a21 ↙
+a23*a35+a24*a45)+a43*(a31*a15+a32*a25+a34*a45)+a45*(a15*a51+a25*a52+a35*a53+a45*a54))
```

```
clc
disp('untuk nilai eigen 10, 8, -7, -6, -5')
disp('Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)')
disp('Sk_m=(Sk)^m')
disp('Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m)')
disp('JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m')
disp('P_JLL=4*Skm-Sk_m')
syms('Sk', 'Sk_m', 'k', 'm', 'Skm', 'JLL', 'P_JLL')
disp('untuk k=1 dan m=1')
for k=1
 Sk=10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k
    for m=1
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
end
disp('untuk k=2 dan m=4')
for k=2
 Sk=Sk+(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
    for m=4
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
end
disp('untuk k=2 dan m=3')
for k=2
  Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
    for m=3
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
end
disp('untuk k=2 dan m=2')
for k=2
 Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
    for m=2
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
end
disp('untuk k=3 dan m=2')
for k=3
 Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
    for m=2
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
```

```
end
disp('untuk k=3 dan m=4')
for k=3
 Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
    for m=4
    Sk_m=(Sk)^m
    Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m))
    JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
    P_JLL=4*Skm-Sk_m
    end
end
```

```
untuk nilai eigen 10, 8, -7, -6, -5
Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
Sk_m=(Sk)^m
Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m)
JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
P_JLL=4*Skm-Sk_m
untuk k=1 dan m=1

Sk =

     0


Sk_m =

     0


Skm =

     0


JLL =

     0


P_JLL =

     0

untuk k=2 dan m=4

Sk =

   274


Sk_m =

   5.6364e+009


Skm =

    124612258


JLL =

    9.9401e+009


P_JLL =

    -5.1380e+009

untuk k=2 dan m=3
```

```
untuk nilai eigen 10, 8, -7, -6, -5
Sk=(10^k+8^k+(-7)^k+(-6)^k+(-5)^k)
Sk_m=(Sk)^m
Skm=(10^(k*m)+8^(k*m)+(-7)^(k*m)+(-6)^(k*m)+(-5)^(k*m)
JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
P_JLL=4*Skm-Sk_m
untuk k=1 dan m=1

Sk =

     0


Sk_m =

     0


Skm =

     0


JLL =

     0


P_JLL =

     0

untuk k=2 dan m=4

Sk =

   274


Sk_m =

   5.6364e+009


Skm =

   124612258


JLL =

   9.9401e+009


P_JLL =

   -5.1380e+009

untuk k=2 dan m=3

Sk =
```

```
    274


Sk_m =

    20570824


Skm =

     1442074


JLL =

    15481026


P_JLL =

    -14802528

untuk k=2 dan m=2

Sk =

    274


Sk_m =

    75076


Skm =

    18418


JLL =

    17014


P_JLL =

    -1404

untuk k=3 dan m=2

Sk =

        828


Sk_m =

        685584


Skm =
```

```
     1442074


JLL =

     6524786


P_JLL =

     5082712

untuk k=3 dan m=4

Sk =

     828


Sk_m =

     4.7003e+011


Skm =

     1.0850e+012


JLL =

     1.3515e+014


P_JLL =

     3.8699e+012
```

```
c
sp('untuk nilai eigen 9/2, -5/2, -17/10, 1/5, -1/2')
sp('Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k)')
sp('Sk_m=(Sk)^m')
sp('Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m)')
sp('JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m')
sp('P_JLL=4*Skm-Sk_m')
ms('Sk', 'Sk_m', 'k', 'm', 'Skm', 'JLL', 'P_JLL')
sp('untuk k=1 dan m=1')
r k=1
=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=1
  Sk_m=(Sk)^m
  Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
  JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
  P_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
d
isp('untuk k=2 dan m=4')
r k=2
Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=4
 Sk_m=(Sk)^m
 Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
 JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
 P_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
d
isp('untuk k=2 dan m=3')
r k=2
Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=3
 Sk_m=(Sk)^m
 Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
 JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
 P_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
d
isp('untuk k=2 dan m=2')
or k=2
Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=2
 Sk_m=(Sk)^m
 Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
 JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
 P_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
nd
isp('untuk k=3 dan m=2')
or k=3
Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=2
 Sk_m=(Sk)^m
 Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
 JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
 P_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
nd
```

```
isp('untuk k=3 dan m=4')
or k=3
Sk=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k
 for m=4
 Sk_m=(Sk)^m
 Skm=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m))
 JLL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
 p_JLL=4*Skm-Sk_m
 end
nd
```

```
tuk nilai eigen 9/2, -5/2, -17/10, 1/5, -1/2
k=(9/2)^k+(-5/2)^k+(-17/10)^k+(1/5)^k+(-1/2)^k)
k_m=(Sk)^m
km=((9/2)^(k*m)+(-5/2)^(k*m)+(-17/10)^(k*m)+(1/5)^(k*m)+(-1/2)^(k*m)
LL=5^(m-1)*Skm-Sk_m
JLL=4*Skm-Sk_m
tuk k=1 dan m=1

k =

    0


k_m =

    0


km =

    0


LL =

    0


_JLL =

    0

ntuk k=2 dan m=4

k =

  29.6800


k_m =

 7.7599e+005


km =

 1.6975e+005


LL =

 2.0442e+007


_JLL =

-9.7001e+004
```

```
untuk k=2 dan m=3

Sk =

   29.6800


Sk_m =

  2.6145e+004


Skm =

  8.5721e+003


JLL =

  1.8816e+005


P_JLL =

  8.1431e+003

untuk k=2 dan m=2

Sk =

   29.6800


Sk_m =

  880.9024


Skm =

  457.5412


JLL =

  1.4068e+003


P_JLL =

  949.2624

untuk k=3 dan m=2

Sk =

   70.4700
```

```
k_m =

  .9660e+003

km =

  8.5721e+003

LL =

  3.7894e+004

_JLL =

  2.9322e+004
ntuk k=3 dan m=4

k =

   70.4700

k_m =

  2.4661e+007

km =

  6.9013e+007

LL =

  8.6019e+009

_JLL =

  2.5139e+008

>>
```