MENGUKUR KINERJA SISTEM OPERASI PELAYANAN DENGAN MODEL-MODEL ANTRIAN POISSON

Oleh:

Alia Lestari

95 03 150

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2000

MENGUKUR KINERJA SISTEM OPERASI PELAYANAN DENGAN MODEL-MODEL ANTRIAN POISSON

SKRIPSI

Untuk Melengkapi Tugas-Tugas dan Memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana

Oleh:

Alia Lestari

95 03 150

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN

2000

MENGUKUR KINERJA SISTEM OPERASI PELAYANAN DENGAN MODEL-MODEL ANTRIAN POISSON

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. A. Suhardjono	**Drs. Alimin Bado, MS**
NIP. 130 264 122	NIP. 130 604 514

Pada tanggal : *Desember 2000*

بسم الله الرحمن الرحيم

KATA PENGANTAR

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

Alhamdulillahi rabbil 'alamin, kiranya merupakan kata yang sangat tepat untuk melukiskan rasa syukur penulis kepada الله , karena atas berkat rahmat dan hidayah-Nya jualah sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Skripsi ini adalah merupakan suatu keberhasilan kerja yang tidak akan berhasil tanpa adanya dukungan, petunjuk dan keterlibatan pihak lain. Oleh karena itu tidaklah berlebihan jika pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang mendalam kepada :

1. Ayahanda Ir. Baharuddin Tepu dan Ibunda Ratnawaty yang dengan kesabaran telah membesarkan dengan penuh kasih sayang. Serta adik-adikku tersayang, Kautsar dan Anhar atas semangat dan iringan do'a yang telah diberikan selama ini.
2. Bapak Drs. A. Suhardjono selaku Pembimbing Utama atas segala keikhlasan meluangkan waktunya guna memberi bimbingan, petunjuk dan bantuannya dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Alimin Bado, MS selaku Pembimbing Pertama yang ditengah kesibukannya dapat memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
4. Bapak DR. Jeffry Kusuma selaku Penasehat Akademik atas bimbingan, arahan, dan nasehat selama penulis kuliah di Jurusan Matematika.
5. Bapak Drs. Nirwan Ilyas, MS dan Bapak Drs. M. Zakir, MSi selaku Ketua dan Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas MIPA beserta seluruh staff pegawai Jurusan Matematika.

6. Seluruh Staff Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNHAS yang telah banyak memberikan bekal ilmu pengetahuan yang tak ternilai harganya.
7. Kanda Sulaeman, yang telah bersusah payah mengirimkan bahan-bahan untuk keperluan penulisan skripsi ini, serta K' Rahma yang selalu mau menjadi tempat untuk bercerita dan berkeluh kesah.
8. Sahabatku Hery dan Indi yang tak henti-hentinya memberikan dorongan dan bantuan dalam menyelesaikan kuliahku di Jurusan Matematika FMIPA UNHAS.
9. Rekan-rekan di Jurusan Matematika : Wewen, Dewi, Santi, Fira, Dayan, Inun, Nandar, Thiar, Hendra, Culli, Oji, Memet, Arif, Taufiq, dan semua angkatan '95 yang tidak dapat disebut namanya satu persatu di sini, serta adik, Aqi, Fajar, Ile', Erman, Icha, Uci, Ade, Zabur, Ati, Opi dan adik-adik di HIMATIKA yang telah memberikan begitu banyak kenangan manis.
10. Kawan-kawanku Jo', Adam, Eni, Nhiena, Wati, Uwal, Haje', Mira, Guntur, Abe', Icha, Iqbal, Anca, Agha, Rattonk, Herman dan Malik, thanks for being such a great friend !!

Akhir kata, semoga seluruh budi baik dan perhatian dari berbagai pihak mendapat imbalan dari-Nya. Tiada karya manusia yang sempurna, demikian pula dalam tugas akhir ini yang tidak luput dari berbagai kekurangan, oleh sebab itu dengan penuh kerendahan hati penulis mohon maaf dan maklum adanya, sambil berharap semoga skripsi ini dapat berguna bagi pembaca.

Makassar, 8 Desember 2000

PENULIS

ABSTRAK

Model-model antrian adalah alat untuk mengukur kinerja sistem operasi pelayanan dengan menggunakan Distribusi Poisson. Ukuran kinerja yang terpenting pada model-model antrian ini adalah menaksir rata-rata waktu menunggu setiap pelanggan dan pemanfaatan sarana pelayanan.

Pada kasus yang diamati, yaitu pelayanan kliring BNI Tamalanrea, diperoleh rata-rata waktu menunggu tiap nasabah adalah 0,06 jam atau sekitar 3,6 menit dan pemanfaatan pelayanan sebesar 63 %.

ABSTRACT

Queuing models is a tool to determined productivity of service operation system using the Poisson Distribution. The most important result of this models is to estimate the average of costumer waiting time and the services equipment.

Base on the cases observation, clearing service at BNI Tamalanrea we found datas as follow : the average of costumer waiting time is 0,06 hours or about 3,6 minutes and the service equipment is 63 %.

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Sistem ekonomi dan dunia usaha (bisnis) sebagian besar beroperasi dengan sumber daya yang relatif terbatas. Sering terjadi orang-orang, barang-barang, komponen-komponen atau kertas kerja harus menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan. Garis-garis tunggu ini, sering disebut dengan *antrian* (queues), berkembang karena fasilitas pelayanan (server) adalah relatif mahal untuk memenuhi permintaan pelayanan dan sangat terbatas.

Sebagian besar orang-orang sadar atau tidak sadar paling tidak pernah sekali mengalami sistem antrian, misal pendaftaran ulang (registrasi) yang melelahkan bagi mahasiswa-mahasiswa suatu universitas, antri untuk membeli bahan bakar, dan sebagainya. Satu hal yang dimiliki bersama oleh situasi ini adalah fenomena menunggu. Sangat menyenangkan jika kita dapat diberi pelayanan, atau hal lainnya tanpa nuansa keharusan untuk menunggu. Tetapi baik kita menyukai atau tidak, menunggu adalah bagian dari kehidupan sehari-hari kita, dan yang kita harapkan hanyalah agar ketidaknyamanan ini dapat dikurangi.

Fenomena menunggu adalah hasil langsung dari *keacakan* dalam operasi sarana pelayanan. Secara umum, kedatangan pelanggan dan waktu perbaikan tidak diketahui sebelumnya, karena jika dapat diketahui, pengoperasian sarana tersebut dapat dijadwalkan sedemikian rupa sehingga akan sepenuhnya menghilangkan keharusan untuk menunggu. Sesungguhnya semua sistem-sistem yang mengharuskan kita untuk menunggu ini dapat dirancang lebih efisien dengan menggunakan teori antrian.

Teori antrian adalah teori menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau baris-baris penungguan. Formasi baris-baris penungguan ini tentu saja merupakan suatu fenomena biasa yang terjadi apabila kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk menyelenggarkan pelayanan itu. Keputusan-keputusan yang berkenaan dengan jumlah kapasitas ini harus dapat ditentukan, walaupun sebenarnya tidak mungkin dapat dibuat suatu prediksi yang tepat mengenai kapan unit-unit yang membutuhkan pelayanan itu akan datang dan atau berapa lama waktu yang diperlukan untuk menyelenggarakan pelayanan itu.

Dalam hal ini, apabila pelayanan terlalu banyak, maka akan memerlukan ongkos yang besar, sebaliknya, jika kapasitas pelayanan kurang, maka akan terjadi baris penungguan dalam waktu yang cukup lama yang akan menimbulkan ongkos, baik berupa ongkos sosial, kehilangan langganan, ataupun pengangguran pekerja. Dengan demikian yang menjadi tujuan utama teori antrian ini adalah mencapai keseimbangan antara ongkos pelayanan dengan ongkos yang disebabkan oleh adanya waktu menunggu tersebut.

Teori antrian sendiri tidak langsung memecahkan persoalan ini. Walaupun begitu, teori ini menyumbangkan informasi penting yang diperlukan untuk membuat keputusan seperti itu dengan cara memprediksi beberapa karakteristik dari sistem atau baris penungguan yang mengukur kinerja sistem pengoperasian sebuah sarana pelayanan. Misalnya, satu ukuran yang logis dari kinerja adalah seberapa lama seorang pelanggan diperkirakan harus menunggu sebelum dilayani. Satu ukuran lain adalah persentase waktu sarana pelayanan tersebut tidak dipergunakan. Ukuran pertama memandang sistem dari sudut pandang pelanggan, sementara ukuran kedua mengevaluasi derajat pemanfaatan sarana tersebut. Kita secara intuitif melihat bahwa semakin lama seorang pelanggan menunggu, semakin kesil persentase waktu sarana tersebut tidak dipergunakan, dan sebaliknya. Karena itu kedua ukuran kinerja tersebut dipergunakan untuk memilih tingkat pelayanan (atau laju pelayanan) yang akan menghasilkan keseimbangan yang wajar antara kedua situasi yang bertentangan ini.

Berangkat dari permasalahan di atas, maka penulis tertarik untuk menuangkannya dalam bentuk skripsi yang berjudul :

" Mengukur Kinerja Sistem Opersi Pelayanan dengan Model-model Antrian Poisson "

1. 2. TUJUAN PENULISAN

Tujuan yang diharapkan dari penulisan ini adalah :

1. Mempergunakan konsep dasar model-model antrian Poisson untuk memprediksi beberapa karakteristik yang mengukur kinerja sebuah sistem operasi pelayanan, sehingga dapat dicapai keseimbangan antara ongkos pelayanan dengan ongkos yang disebabkan oleh adanya waktu menunggu tersebut.
2. Untuk memperdalam wawasan dan kajian mengenai model-model antrian Poisson.

1. 3. RUMUSAN / BATASAN MASALAH

Agar penulisan ini nantinya lebih terarah maka pada penulisan ini hanya akan dibahas mengenai model-model antrian Poisson, tidak akan dibahas mengenai model-model antrian non Poisson.

1. 4. SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Sistematika pembahasan penulisan disusun sebagai berikut. Bab I yang merupakan pendahuluan penulisan ini berisi latar belakang penulisan, tujuan penulisan, rumusan / batasan masalah dan sistematika pembahasan. Kemudian Bab II membahas tinjuan pustaka yang berisi teori-teori yang akan digunakan dalam tulisan ini, seperti karakteristik-karakteristik antrian yang digunakan untuk mengukur kinerja sistem operasi pelayanan, peranan distribusi Poisson dan Eksponensial, proses kelahiran dan kematian murni, model Poisson yang digeneralisasi dan Ukuran Steady-State dari kinerja yang merupakan bagian dari antrian dengan gabungan kedatangan dan keberangkatan. Kemudian Bab III akan membahas tentang model-model antrian Poisson yang digunakan untuk mengukur kinerja sistem operasi pelayanan, Bab V berisi penerapan model-model antrian Poisson untuk mengukur kinerja sistem operasi pelayanan pada Bank BNI Tamalanrea, 16-20 Oktober 2000. Terakhir, Bab V berisi kesimpulan dan saran-saran yang berkaitan dengan model-model antrian Poisson

BAB II

KONSEP DASAR PROSES POISSON

Dari sudut pandang model antrian, situasi antrian diciptakan dengan cara berikut ini. Sementara para pelanggan tiba di suatu sarana pelayanan, mereka bergabung dalam sebuah antrian. Pelayan memilih seorang pelanggan dari antrian untuk memulai pelayanan. Setelah selesainya pelayanan, proses memilih pelanggan baru (yang sedang menunggu) diulangi. Diasumsikan tidak ada waktu yang terhilang antara penyelesaian pelayanan dengan diterimanya seorang pelanggan baru di sarana pelayanan tersebut.

Pelaku utama dalam sebuah situasi antrian adalah ***pelanggan*** (costumers) dan ***pelayan*** (server), dimana server ini menerima pelanggan (costumers) dari populasi khusus, yang biasa disebut sumber masukan.

2.1. Beberapa karakteristik antrian

Sumber masukan dari suatu sistem antrian dapat terdiri atas suatu populasi orang, barang, komponen atau kertas kerja yang datang pada sistem untuk dilayani, dimana yang perlu diketahui dari sumber masukan tersebut adalah ukurannya (jumlahnya), yaitu jumlah total unit yang memerlukan pelayanan dari waktu ke waktu atau disebut jumlah total langganan potensial. Ini bisa dianggap terbatas ataupun tidak terbatas. Karena perhitungannya akan lebih mudah untuk jumlah unit yang tidak terbatas, maka asumsi ini sering digunakan, terlebih lagi jika jumlah unit ini cukup besar. Untuk jumlah langganan yang terbatas, perhitungan jadi lebih sulit karena jumlah unit dalam sistem antrian akan mempengaruhi jumlah langganan potensial di luar sistem pada setiap waktu. Bagaimanapun, asumsi jumlah yang terbatas ini tetap harus dibuat jika sumber input yang menurunkan (menghasilkan) unit-unit yang memerlukan pelayanaan ini jelas-jelas dipengaruhi oleh jumlah unit dalam sistem antrian.

Dalam model-model antrian, kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan diringkaskan dalam bentuk distribusi probabilitas yang umumnya disebut sebagai ***distribusi kedatangan*** (arrival distribution) dan ***distribusi waktu pelayanan*** (service time distribution). Kedua distribusi ini mewakili situasi dimana pelanggan tiba dan dilayani secara individual (misalnya bank, atau supermarket). Dalam situasi lainnya, pelanggan dapat tiba dan dilayani dalam kelompok (misalnya restoran). Kasus terakhir ini umumnya disebut sebagai ***antrian kelompok*** (bulk queue).

Walaupun sumber masukan, pola kedatangan dan kepergian adalah faktor-faktor penting dalam analisis antrian, faktor-faktor lain juga penting dalam pengembangan model-model antrian. Faktor pertama adalah cara memilih pelanggan dari antrian untuk memulai pelayanan. Ini disebut ***peraturan pelayanan*** (service dicipline). Peraturan yang paling umum adalah **FCFS** (first come, first served / datang pertama, dilayani pertama). **LCFS** (last come, first served / datang terakhir, dilayani pertama) dan **SIRO** (service in random order / pelayanan dalam urutan acak) juga dapat timbul dalam situasi praktis. Kita juga harus menambahkan sementara peraturan pelayanan menentukan pemilihan pelanggan dari satu jalur antrian, para pelanggan yang tiba disebuah sarana pelayanan dapat juga ditempatkan dalam *antrian prioritas* (priority queue) sedemikian rupa sehingga prioritas yang lebih tinggi akan menerima preferensi untuk mulai dilayani terlebih dahulu. Pemilihan pelanggan yang spesifik dari setiap antrian prioritas dapat mengikuti peraturan pelayanan tertentu.

Faktor kedua berkaitan dengan rancangan sarana tersebut dan pelaksanaan pelayanan. Sarana tersebut dapat mencakup lebih dari satu pelayan, sehingga memungkinkan beberapa pelanggan sebanyak jumlah pelayan tersebut untuk dilayani secara berbarengan (misalnya, kasir bank). Dalam kasus ini, semua pelayan menawarkan pelayanan yang sama dan sarana pelayanan tersebut dikatakan memiliki ***pelayan sejajar*** (parallel servers).

Faktor ketiga berkaitan dengan ukuran ***antrian yang diijinkan.*** Dalam beberapa situasi tertentu, hanya sejumlah pelanggan tertentu yang diijinkan, kemungkinan karena keterbatasan ruang (misalnya, ruang untuk mobil di tempat parkir). Setelah antrian memenuhi kapasitas, pelanggan yang baru tiba tidak dapat memasuki antrian.

Model-model antrian yang mewakili situasi dimana manusia mengambil peran sebagai pelanggan dan/atau pelayan harus dirancang untuk memperhitungkan pengaruh ***perilaku manusia*** (human behavior). Pelayan "manusia" dapat mempercepat laju pelayanan ketika jalur antrian memanjang. Pelanggan "manusia" dapat berpindah dari satu jalur antrian ke jalur lainnya dengan harapan dapat mengurangi waktu menunggu. Beberapa pelanggan "manusia" juga menolak untuk bergabung dalam satu jalur antrian, karena mereka memperkirakan waktu menunggu yang lama, atau mereka dapat membatalkan setelah berada dalam antrian karena waktu menunggu mereka sudah terlanjur panjang. (Catat bahwa dalam hal perilaku manusia, waktu menunggu yang lama bagi satu orang tidak sama lama bagi orang lainnya).

Tidak diragukan lagi, terdapat ciri-ciri perilaku manusia lainnya dalam situasi antrian sehari-hari. Tetapi, dari sudut pandang model antrian, ciri-ciri ini hanya dapat diperhitungkan jika perilaku itu dapat dikuantifikasi dengan cara tertentu yang memungkinkannya untuk dimasukkan dalam model yang bersangkutan. Juga, model-model antrian tidak dapat memperhitungkan sebuah perilaku individual dari pelanggan dalam arti bahwa semua pelanggan dalam amtrian diperkirakan untuk "berperilaku" secara setara sementara mereka berada di sarana pelayanan yang bersangkutan. Jadi pelanggan yang suka mengobrol (dengan pelayan selama dilayani) dipertimbangkan sebagai kasus yang jarang dan perilakunya itu diabaikan dalam perancangan sistem. Sebaliknya, jika sebagian besar pelanggan ternyata sangat suka mengobrol, sebuah rancangan yang realistik dari sarana pelayanan tersebut harus didasari oleh fakta bahwa kebiasaan ini, walaupun membuang-buang waktu, merupakan bagian integral dari operasinya. Satu cara yang logis untuk memasukkan pengaruh kebiasaan ini adalah meningkatkan waktu pelayanan per pelanggan.

Kita sekarang melihat bahwa unsur-unsur dasar dari model antrian bergantung pada faktor-faktor atau karakteristik-karakteristik berikut ini :

1. Ukuran dari sumber masukan (terbatas atau tidak terbatas).
2. Distribusi kedatangan (kedatangan tunggal atau kelompok).
3. Distribusi waktu pelayanan (pelayanan tunggal atau kelompok).
4. Peraturan pelayanan (FCFS, LCFS, SIRO), dan prioritas pelayanan.
5. Ukuran antrian (terhingga atau tidak terhingga)
6. Perilaku manusia (perpindahan, penolakan, atau pembatalan)

Jumlah model antrian yang ada adalah sama banyak dengan jumlah variasi dalam karakteristik-karakteristik di atas. Dalam penulisan ini, kita akan memperlihatkan bahwa distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial memainkan peranan penting dalam mewakili waktu kedatangan dan waktu pelayanan dalam banyak situasi antrian, kemudian mempertimbangkan sejumlah model yang tampaknya berguna dalam situasi praktis.

2.2 Peran Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial

Perhatikan situasi antrian dimana kedatangan dan keberangkatan (kejadian) yang timbul selama satu interval waktu dikendalikan dengan kondisi berikut ini :

Kondisi 1 : Probabilitas dari sebuah kejadian (kedatangan dan keberangkatan) yang timbul antara t dan $t+s$ bergantung *hanya* pada panjangnya s, yang berarti bahwa probabilitas tidak bergantung pada t atau jumlah kejadian yang timbul selama periode waktu $(0, t)$.

Kondisi 2 : Probabilitas kejadian yang timbul selama interval waktu yang sangat kecil h adalah positif tetapi kurang dari satu.

Kondisi 3 : Paling banyak satu kejadian dapat timbul selama interval waktu yang sangat kecil h.

Di sini kita dapat melihat bahwa ketiga kondisi di atas menjabarkan sebuah proses dimana *jumlah* kejadian selama satu interval waktu yang diberikan adalah *Poisson*, dan karena itu interval waktu antara beberapa kejadian yang berturut-turut adalah *eksponensial*. Dengan kasus demikian, kita mengatakan bahwa kondisi-kondisi tersebut mewakili ***proses Poisson.***

Defenisikan :

$$p_n(t) = \text{probabilitas kejadian } n \text{ yang timbul selama waktu } t \tag{1}$$

Lalu, berdasarkan kondisi 1, probablitas tidak adanya kejadian yang timbul selama $t+h$ adalah :

$$p_0\,(t+h) = p_0\,(t) + p_0\,(h) \tag{2}$$

Untuk $h > 0$ dan cukup kecil, kondisi 2 menunjukkan bahwa $0 < p_0\,(h) < 1$. Berdasarkan kondisi ini, persamaan di atas memiliki pemecahan berikut :

$$p_0\,(t) = e^{\alpha t}, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

dimana α adalah konstanta positif.

Sekarang kita akan melihat bahwa untuk proses yang dijabarkan dengan $p_n(t)$, interval waktu antara beberapa kejadian yang berturut-turut adalah eksponensial. Dengan menggunakan hubungan yang diketahui antara eksponensial dan Poisson

Anggaplah

$f(t)$ = fungsi kepadatan probabilitas dari interval waktu t antar pemunculan *kejadian yang berturut-turut*, $t \geq 0$ 4)

Misalkan bahwa T adalah interval waktu sejak pemunculan kejadian terakhir, maka pernyataan probabilitas berikut berlaku :

$$P\begin{Bmatrix}\text{Waktu antar keadian} \\ \text{melebihi T}\end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix}\text{Tidak ada kejadian} \\ \text{sebelum T}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

Pernyataan ini dapat diterjemahkan menjadi

$$\int_T^{\infty} f(t)dt = p_0(T) \tag{6}$$

Mensubstitusi $p_0(t)$ sebagaimana diturunkan di atas, kita memperoleh

$$\int_T^\infty f(t)dt = e^{-\alpha T}, \qquad T > 0 \qquad 7)$$

atau

$$\int_0^T f(t)dt = 1 - e^{-\alpha T}, \qquad T > 0 \qquad 8)$$

Dengan mengambil derivatif dari kedua sisi dalam kaitannya dengan T, kita memperoleh

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0 \qquad \text{(eksponensial)} \qquad 9)$$

yang merupakan sebuah **distribusi eksponensial** dengan mean $E\{t\}=1/\alpha$ unit waktu.

Dengan diketahui bahwa $f(t)$ merupakan sebuah distribusi eksponensial, teori probabilitas memberi tahu kita bahwa $p_n(t)$ pastilah merupakan **distribusi Poisson**, yaitu,

$$p_n(t) = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, \qquad n = 0,1,2,... \qquad \text{(Poisson)} \qquad 10)$$

Nilai mean dari n selama periode waktu tertentu t adalah $E\{n \mid t\}=\alpha t$ kejadian. Ini berarti bahwa α mewakili *laju* timbulnya kejadian.

Kesimpulan dari hasil diatas adalah bahwa jika *interval waktu* antara beberapa kejadian yang berturut-turut adalah eksponensial dengan mean $1/\alpha$ unit waktu, maka *jumlah* kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah Poisson dengan laju pemunculan rata-rata (kejadian per unit waktu)α. Demikian pula sebaliknya.

Distribusi Poisson merupakan **proses yang sepenuhnya acak** (completely random process) karena memiliki sifat bahwa interval waktu yang tersisa sampai pemunculan kejadian berikutnya sepenuhnya tidak bergantung pada interval waktu yang telah berlalu dari pemunculan kejadian terakhir. Sifat ini setara dengan pembuktian pernyataan probabilitas berikut

$$P\{t>T+S \mid t>S\} = P\{t>T\} \qquad 11)$$

dimana S adalah interval waktu antara pemunculan kejadian terakhir. Karena t bersifat eksponensial, kita memiliki

$$\begin{aligned} P\{t>T+S/t>S\} &= \frac{P\{t>T+S/t>S\}}{P\{t>S\}} = \frac{P\{t>T+S\}}{P\{t>S\}} \\ &= \frac{e^{-\alpha(T+S)}}{e^{-\alpha S}} = e^{-\alpha T} \\ &= P\{t>T\} \end{aligned} \qquad 12)$$

Sifat ini disebut sebagai **keadaan lupa** (forgetfulness) atau **kurangnya ingatan** (lack of memory) dari distribusi eksponensial, yang menjadi dasar untuk menunjukkan bahwa distribusi Poisson sepenuhnya bersifat acak.

Satu ciri unik lainnya dari Poisson adalah bahwa ini merupakan satu-satunya distribusi dengan mean yang sama dengan varians. Sifat ini kadang-kadang dipergunakan sebagai indikator awal dari apakah sebuah sampel data ditarik dari sebuah distribusi Poisson.

2.3. Proses Kelahiran dan Kematian Murni

Kebanyakan model dasar antrian menganggap bahwa input (unit kedatangan) dan output (leaving unit) dari sistem antrian terjadi menurut proses ***birth-death*** (kelahiran-kematian). Kelahiran adalah kedatangan *calling unit* yang baru dalam sistem antrian, sedangkan kematian adalah keberangkatan unit yang telah dilayani. Proses kelahiran dan kematian ini terjadi secara random yang rata-rata terjadinya hanya bergantung pada keadaan yang sedang berlangsung (current state) dari sistem (jumlah *calling unit* dalam sistem antrian).

Jelasnya adalah :

1. *Birth Postulate*

Sistem pada state E_n (n = 1,2,...) pada saat t, kemungkinan bahwa tepat ada satu kelahiran selama interval waktu t sampai dengan $(t + h)$ adalah $[\lambda_n h + 0(h)]$, dimana λ_n positif konstan.

2. *Death Postulate*

Sistem pada state E_n (n = 1,2, ...) pada saat t, kemungkinan bahwa tepat ada satu kematian selama interval waktu t sampai dengan $(t + h)$, adalah $[\mu_n h + 0(h)]$ dimana $\mu_0 = 0$ dan μ_n positif konstan untuk $n > 0$.

3. *Multiple jump postulate*

Sistem pada state E_n (n = 1,2, ...) pada saat t, kemungkinan bahwa jumlah kombinasi kelahiran dan kematian lebih dari satu selama interval waktu t sampai dengan $(t + h)$, adalah $0(h)$.

Keterangan :

- E_n : keadaan dimana ada n pelanggan pada sistem antrian
- λ_n : tingkat kedatangan rata-rata (ekspektasi jumlah kedatangan persatuan waktu) dari pelanggan baru jika ada n unit dalam sistem.
- μ_n : tingkat pelayanan rata-rata (ekspektasi jumlah unit yang dapat selesai dilayani persatuan waktu) jika ada n unit dalam sistem.
- $0(h)$: adalah fungsi dari h yang karena h <<< (kecil sekali, mendekati nol), maka fungsi tersebut akan memenuhi persamaan :

$$\lim_{h \to 0} \frac{0(h)}{h} = 0 \qquad 13)$$

Sebagai akibat dari *postulate 3*, maka *postulate 1* akan tetap berlaku walaupun kalimat "tepat ada 1 kelahiran" diganti dengan kalimat "tepat ada satu kelahiran dan tanpa kematian". Demikian juga *postulate* 2 akan tetap berlaku walaupun kalimat "tepat ada 1 kematian" diganti dengan kalimat "tepat ada satu kematian dan tanpa kelahiran".

Selama interval waktu t sampai $(t + h)$ harus terjadi salah satu dari kejadian berikut :

1. Tepat ada satu kelahiran tanpa kematian.
2. Tepat ada satu kematian tanpa kelahiran.

3. Jumlah kematian dan kelahiran lebih besar dari satu.

4. Tidak ada kelahiran dan kematian.

Jumlah kemungkinan *event* (kejadian) tersebut adalah 1 sehingga kemungkinan terjadinya *event* (4) adalah :

$$P(4) = 1 - [P(3) + P(2) + P(1)] \qquad 14)$$

Dari uraian di atas, kita dapat mengambil kesimpulan bahwa sistem dengan state E_n (n = 1,2,...) pada saat t kemungkinan dimana tidak terjadi kelahiran dan tidak terjadi kematian pada interval waktu t sampai $(t + h)$ adalah :

$$[1 - (\lambda_n h) - (\mu_n h) + 0(h)] \qquad 15)$$

dengan catatan, karena penambahan atau pengurangan suatu bilangan yang dapat diabaikan masih harus menghasilkan suatu bilangan yang juga dapat diabaikan, maka penjumlahan atau pengurangan $0(h)$ dapat dituliskan sebagai satu $0(h)$.

Untuk n > 0, sistem dapat mencapai *state* E_n pada saat $(t + h)$ dari sistemnya pada saat t, dalam salah satu dari keempat kejadian berikut :

State pada saat t	Event dari t s/d $(t + h)$	Probabilitas
E_{n-1}	Satu kelahiran	$P_{n-1}(t)\,[\lambda_{n-1} h + 0(h)]$
E_{n+1}	Satu kematian	$P_{n+1}(t)\,[\mu_{n+1} h + 0(h)]$
?	Banyak event	$0(h)$
E_n	Tidak terjadi sesuatu	$P_n(t)\,[1-\lambda_n h - \mu_n h + 0(h)]$

Maka :

$$P_n(t + h) = P_{n-1}(t)\,[\lambda_{n-1} h + 0(h)] + P_{n+1}(t)\,[\mu_{n+1} h + 0(h)] + 0(h)$$
$$+ P_n(t)\,[1-\lambda_n h - \mu_n h + 0(h)] \qquad 16)$$

Gabungkan $0(h)$

$$P_n(t + h) = P_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1} h + P_{n+1}(t)\,\mu_{n+1} h + P_n(t)\,[1-\lambda_n h - \mu_n h] + 0(h) \qquad 17)$$

Kurangi kedua ruas dengan $P_n(t)$, kemudian dibagi dengan h.

Didapat :

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{0(h)}{h} \qquad 18)$$

Untuk h positif :

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[(\lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \frac{0(h)}{h}\right] \qquad 19)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) \qquad 20)$$

untuk $n > 0$

Jika $n = 0$, $\lambda_{-1} = 0$, dan $\mu_0 = 0$ sehingga

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) - \pi_0 P_0(t) \qquad 21)$$

2. 3. 1. Proses Kelahiran Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ untuk seluruh n (n = 0,1,2,...). Ini menunjukkan bahwa kematian tidak akan pernah terjadi sehingga prosesnya menjadi kelahiran murni dengan tingkat kedatangan rata-rata konstan.

Persamaan diferensialnya menjadi :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \qquad \text{untuk } n = 0$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \qquad \text{untuk } n = 1,2,... \qquad 22)$$

Asumsikan bahwa sistem dalam *state* E_0 pada saat $t = 0$, maka :

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ untuk $n = 0$ 23)

atau

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad \text{untuk } n = 1,2,... \qquad 24)$$

Perlu diingat bahwa distribusi kemungkinan untuk n adalah distribusi Poisson dengan parameter λt. Oleh karena itu, harga rata-rata dan variansi dari panjang garis pada saat t adalah λt dengan kedatangan rata-rata λ.

Pada kasus ini, kelahiran terjadi dengan proses Poisson dengan parameter λ untuk seluruh $n(n = 1,2,...)$.

Model ini dikenal sebagai " input Poisson"

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ menunjukkan bahwa kemungkinan tidak terjadi kelahiran selama interval waktu dari 0 s/d t adalah $e^{-\lambda t}$. Jadi, kemungkinan bahwa kelahiran pertama akan terjadi pada interval waktu ini adalah $[1- e^{-\lambda t}]$.

Jika variabel random T adalah waktu dari kelahiran pertama, maka fungsi distribusi kumulatif dari T adalah :

$$F(t) = P[T \le t] = 1- e^{-\lambda t} \qquad \text{untuk } t \ge 0 \qquad 25)$$

Karena itu Pdf dari T adalah :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \text{untuk } t \ge 0 \qquad 26)$$

Jadi T mempunyai distribusi eksponensial. Dengan kata lain, distribusi kemungkinan dari waktu antara dua kelahiran adalah distribusi eksponensial dengan parameter λ.

2. 3. 2. Proses Kematian Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = 0$ untuk $n = 0,1,2, ...$ dan bahwa $\mu_n = \mu$ untuk $n = 1,2, 3...$ Asumsikan juga bahwa sistem dalam state E_M pada saat $t = 0$. Asumsi pertama menyatakan bahwa kelahiran tidak pernah terjadi, sehingga prosesnya adalah proses kematian murni dengan tingkat pelayanan rata-rata konstan sampai proses berakhir pada *state* E_0. Jadi, proses ini ekuivalen dengan proses kelahiran murni, kecuali bahwa proses-proses ini bergerak dalam arah yang berlawanan (*line length* / panjang garisnya), dan proses berhenti setelah M *event*. Karena itu hasilnyapun analog.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t) \qquad \text{untuk n} = 0,1,2,...,M-1 \qquad 27)$$

$$\frac{dP_M(t)}{dt} = -\mu P_M(t) \qquad \text{untuk n} = M \qquad 28)$$

Ingat bahwa (M-n) adalah jumlah *event* kematian yang telah terjadi dalam proses. Dengan cara yang sama seperti pada proses kelahiran murni, kita peroleh probabilitas bahwa tidak ada *event* terjadi pada saat t adalah :

$$P_M(t) = e^{-\mu t} \qquad 29)$$

Probabilitas bahwa (M-n) *event* telah terjadi, dimana (M-n) < M adalah :

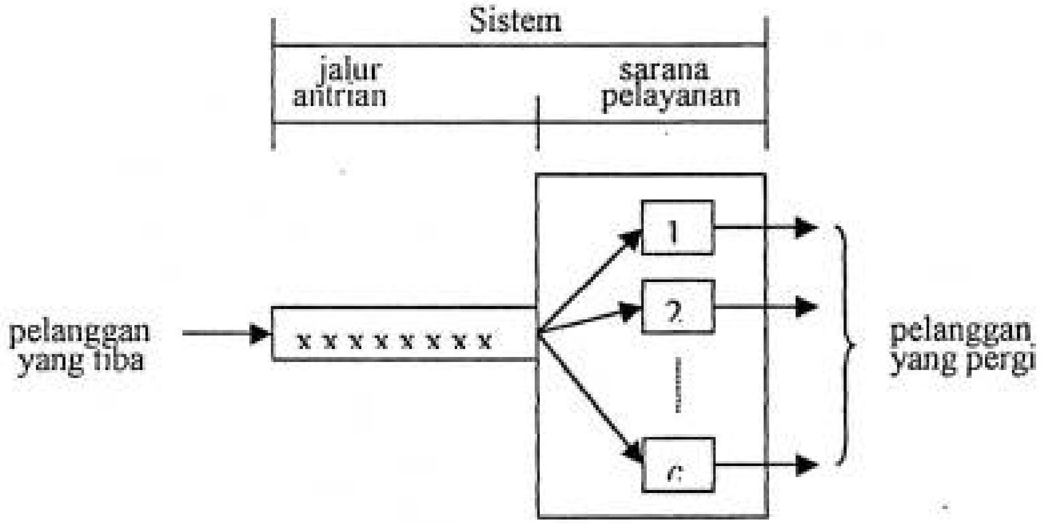
$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{M-n} e^{-\mu t}}{(M-n)!} \qquad \text{untuk n} = 1,2,...,M \qquad 30)$$

Sehingga kemungkinan bahwa M *event* telah terjadi adalah :

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{m} P_n(t) \qquad 31)$$

2. 4. Antrian Dengan Gabungan Kedatangan Dan Keberangkatan

Dalam bagian ini, akan dibahas tentang situasi antrian yang menggabungkan baik proses kedatangan (kelahiran) maupun keberangkatan (kematian). Kita membatasi perhatian kita pada jalur antrian dimana para pelanggan dilayani oleh *c* pelayan yang *paralel* sehingga *c* pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Semua pelayan menawarkan pelayanan yang setara dari sudut pandang waktu yang diperlukan untuk melayani setiap pelanggan. Gambar 1 mewakili sistem antrian paralel ini secara grafik. Catat bahwa jumlah pelanggan dalam *sistem* di setiap titik waktu didefenisikan untuk memasukkan mereka yang berada dalam *antrian* dan yang sedang *dilayani*.



Gambar 1

Notasi yang terutama sesuai dengan untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian *paralel* telah secara universal dibakukan dalam format berikut ini :

$$(a / b / c) : (d / e / f)$$

dimana simbol-simbol a, b, c, d, e, dan f adalah unsur-unsur dasar dari model ini sebagai berikut :

a ≡ distribusi kedatangan

b ≡ distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)

c ≡ jumlah pelayan paralel ($c = 1, 2, \dots, \infty$)

d ≡ peraturan pelayanan (misalnya, FCFS, LCFS, SIRO)

e ≡ jumlah maksimum yang diijinkan dalam *sistem* (dalam antrian + dalam pelayanan)

f ≡ ukuran sumber pemanggilan

Notasi baku tersebut mengganti simbol a dan b untuk kedatangan dan keberangkatan dengan kode berikut ini :

M ≡ distribusi kedatangan atau keberangkatan Poisson (atau distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan eksponensial yang setara)

D ≡ waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan yang konstan atau deterministik

E_k ≡ distribusi Erlangian atau gamma dari distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter k.

GI ≡ distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)

G ≡ distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)

Untuk mengilustrasikan, pertimbangkan

$$(M/D/10) : (GD/N/\infty)$$

Di sini kita memiliki kedatangan Poisson, waktu pelayanan konstan, dan 10 pelayan paralel dalam sarana tersebut. Peraturan pelayanan adalah umum (GD) dalam arti bahwa peraturan tersebut dapat berupa FCFS, LCFS, SIRO, atau prosedur apapun yang digunakan oleh para pelayan tersebut untuk memutuskan urutan pelanggan yang dilayani dari antrian. Tanpa bergantung pada berapa jumlah pelanggan yang tiba di sarana pelayanan tersebut, sistem ini (antrian + pelayanan) hanya dapat menampung maksimum N pelanggan ; semua pelanggan lainnya harus mencari pelayanan di tempat lain. Yang terakhir, sumber yang menghasilkan para pelanggan yang datang memiliki kapasitas tak hingga.

Tujuan akhir dari menganalisis situasi antrian ini adalah mengembangkan ukuran-ukuran kinerja untuk mengevaluasi sistem-sistem nyata. Tetapi, karena setiap sistem antrian beroperasi sebagai fungsi dari waktu, kita harus memutuskan sebelumnya apakah kita berminat untuk menganalisis sistem tersebut berdasarkan kondisi **transient** atau **steady-state**. Kondisi transient berlaku ketika perilaku sistem terus bergantung pada waktu. Jadi proses kelahiran dan kematian murni selalu beroperasi berdasarkan kondisi transient. Sebaliknya, antrian dengan gabungan kedatangan dan keberangkatan dimulai dengan kondisi transient dan secara bertahap mencapai kondisi steady-state setelah *cukup banyak* waktu berlalu., asalkan parameter dari sistem tersebut memungkinkan dicapainya steady-state (misalnya, antrian dengan laju kedatangan λ yang lebih tinggi dari laju keberangkatan μ tidak akan pernah mencapai steady-state tanpa bergantung pada waktu yang telah berlalu, karena ukuran antrian akan meningkat dengan waktu). Kita mencatat bahwa analisis transient cukup kompleks secara matematis dan karena itu tidak akan dipertimbangkan dalam penulisan ini.

Sisa bagian ini akan pertama-tama mengembangkan model steady-state untuk antrian Poisson yang digeneralisasi dengan c pelayan yang paralel. Hasil utama yang diperoleh dari model ini adalah penetuan probabilitas steady-state dengan memiliki n pelanggan dalam sistem. Probabilitas ini lalu dipergunakan untuk mengembangkan ukuran kinerja dari model antrian yang digeneralisasi.

2. 4. 1. Model Poisson yang Digeneralisasi

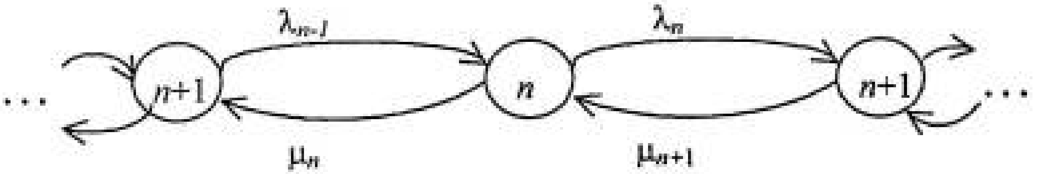
Model yang digeneralisasi yang dikembangkan dalam penulisan ini menerapkan antrian Poisson dengan laju kedatangan dan keberangkatan yang bergantung pada keadaan.

Sebelum memberikan perincian tentang model yang digeneralisasi ini, akan diterangkan tentang apa yang dimaksudkan dengan laju kedatangan dan pelayan bergantung pada keadaan (*state dependent*). Anggaplah toko mesin memiliki sejumlah total N mesin. Laju kerusakan mesin adalah fungsi dari jumlah mesin yang berada dalam kondisi yang baik; yaitu, jika λ adalah laju kerusakan *per mesin*, laju kerusakan di seluruh pabrik tersebut dengan diketahui $n(\leq N)$ mesin yang bekerja adalah $n\lambda$. Dengan cara yang sama, jika sebuah sarana pelayanan memiliki c pelayan yang paralel dan diketahui bahwa μ adalah laju pelayanan per pelayan, maka dengan n sebagai jumlah pelanggan yang ada dalam sistem tersebut (dalam antrian + dalam pelayanan), laju keberangkatan dari keseluruhan sarana tersebut adalah $n\mu$ jika $n < c$ dan $c\mu$ jika $n \geq c$.

Kedua contoh di atas menunjukkan bagaimana dalam model antrian yang digeneralisasi laju kedatangan dan keberangkatan dapat merupakan fungsi dari keadaan dalam sistem tersebut yang diwakili dengan jumlah pelanggan, n. Karena itu kita menggunakan notasi λ_n dan μ_n untuk mendefinisikan laju kedatangan dan keberangkatan sebagai fungsi dari n.

Sasaran dari model yang digeneralisasikan ini adalah menurunkan ekspresi untuk p_n, probabilitas steady-state dari n pelanggan dalam sistem, sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n. Dengan diketahui p_n akan ditunjukkan bagaimana ukuran dari kinerja sistem tersebut (misalnya, waktu menunggu yang diperkirakan dan pemanfaatan sarana pelayanan yang diperkirakan) dapat dievaluasi secara langsung.

Derivasi ekspresi untuk p_n dicapai dengan menggunakan apa yang disebut dengan diagram laju transisi (transition-rate diagram). Dari defenisi proses Poisson yang diberikan pada bab sebelumnya, dengan adanya n pelanggan dalam sistem pada saat t, jumlah pelanggan dalam sistem di akhir interval waktu yang cukup kecil h, akan $n - 1$ atau $n + 1$, bergantung pada apakah keberangkatan atau kedatangan terjadi selama h (catat bahwa probabilitas adanya *lebih dari satu kejadian* muncul selama h cenderung nol karena $h \to 0$). Karena itu kita mengatakan bahwa dalam sebuah proses Poisson, keadaan n hanya dapat berkomunikasi dengan keadaan $n - 1$ dan $n+1$. Gambar 3 – 2 mengilustrasikan situasi ini dengan menggunakan diagram laju transisi dimana panah mewakili transisi di antara keadaan n, n-1, n+1.



Gambar 2

Nilai-nilai yang berkaitan dengan setiap panah mewakili laju transisi diantara keadaan-keadaan tersebut. Misalnya, laju dari keadaan n-1 ke keadaan n adalah laju kedatangan λ_{n-1}, dimana λ_{n-1} adalah fungsi dari keadaan *semula* n-1. Sebaliknya, laju transisi dari keadaan n ke keadaan n-1 adalah laju keberangkatan μ_n yang sekali lagi merupakan fungsi dari keadaan *semula n*. Dengan cara yang sama, laju kedatangan λ_n dan laju keberangkatan μ_{n+1} memberikan laju transisi antara keadaan n dan n+1.

Dalam kondisi steady-state, laju arus masuk dan keluar yang *diperkirakan* dari keadaan n harus setara. Karena keadaan n berkomunikasi hanya dengan n-1 dan n laju transisi dari semua keadaan lain (0,1,2, ... , n-2, n+2, n+3, ...) haruslah nol. Karena itu kita memiliki

$$\begin{pmatrix}\text{laju arus masuk yang}\\ \text{diperkirakan keadaan n}\end{pmatrix} = 0(p_0 + \ldots + p_{n-2}) + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} + 0(p_{n+2} + \ldots)$$

$$= \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} \qquad 32)$$

Demikian pula,

$$\begin{pmatrix}\text{laju arus keluar yang}\\ \text{diperkirakan keadaan n}\end{pmatrix} = (\lambda_n + \mu_n)p_n \qquad 33)$$

Dengan menyamakan kedua laju ini, kita memperoleh apa yang disebut **persamaan keseimbangan** :

$$\lambda_{n-1}\, p_{n-1} + \mu_{n+1}\, p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\, p_n \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad 34)$$

Persamaan di atas hanya berlaku untuk $n > 0$. Untuk memperoleh persamaan keseimbangan untuk $n = 0$, pertimbangkan diagram laju transisi dalam gambar 3-3. Dalam kasus ini keadaan 0 hanya berhubungan dengan keadaan 1.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Gambar 3

Karena itu kita memperoleh

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \qquad n = 0 \qquad 35)$$

Persamaan keseimbangan tersebut dipecahkan secara rekursif dengan dimulai p_1, dan berlanjut dengan induksi untuk menentukan p_n. Dari persamaan keseimbangan untuk $n = 0$, kita memperoleh

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \qquad 36)$$

Selanjutnya untuk $n = 1$, kita memiliki

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \qquad 37)$$

Dengan melakukan substitusi 36), dan penyederhanaan, kita memperoleh :

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \qquad 38)$$

Secara umum, kita dapat memperlihatkan dengan induksi bahwa

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\ldots\mu_1} p_{0,} \qquad n = 1,2,\ldots \qquad 39)$$

Nilai p_0 ditentukan dari persamaan berikut ini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \qquad 40)$$

2. 4. 2. Ukuran Steady-State Dari Kinerja

Dalam bagian ini akan diperlihatkan bahwa segera setelah probabilitassteady-state dari p_n untuk n pelanggan dalam sistem ditentukan, kita dapat menghitung ukuran-ukuran steady-state dari kinerja pada situasi antrian tersebut dengan cara yang sederhana. Ukuran-ukuran kinerja seperti ini lalu dapat dipergunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian tersebut untuk maksud pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut. Ukuran-ukuran kinerja yang terpenting adalah jumlah pelanggan yang menunggu yang diperkirakan, waktu menunggu per pelanggan yang diperkirakan, dan pemanfaatan sarana pelayanan yang diperkirakan.

Anggaplah,

L_s = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam *sistem*

L_q = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam *antrian*

W_s = waktu menunggu yang diperkirakan dalam *sistem*

W_q = waktu menunggu yang diperkirakan dalam *antrian*

Ingat bahwa *sistem* terdiri dari *antrian* dan *sarana pelayanan.*

Anggaplah bahwa kita mempertimbangkan sarana pelayanan dengan c pelayan paralel. Maka dari defenisi p_n kita memperoleh

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \tag{41}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n \tag{42}$$

Terdapat hubungan yang kuat antara L_s dan W_s (juga antara L_q dan W_q), sehingga salah satu ukuran secara otomatis dapat ditentukan dari ukuran lainnya. Anggaplah λ_{eff} adalah laju kedatangan rata-rata *efektif* (tidak bergantung pada jumlah sistem n); maka

$$L_s = \lambda_{eff} W_s \tag{43}$$

$$L_q = \lambda_{eff} W_q \tag{44}$$

Nilai λ_{eff} ditentukan dari λ_n yang bergantung pada keadaan dan probabilitas p_n sebagai

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n \tag{45}$$

Hubungan langsung juga terdapat antara W_s dan W_q. Berdasarkan defenisi,

$$\begin{pmatrix}\textit{waktu}\text{ menunggu yang}\\ \text{diperkirakan dalam sistem}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{waktu menunggu yang}\\ \text{diperkirakan dalam antrian}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{waktu pelayanan}\\ \text{yang diperkirakan}\end{pmatrix}$$

Dengan diketahui bahwa μ adalah laju pelayanan per pelayan, waktu pelayanan yang diperkirakan adalah 1/μ, kita memperoleh

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{46}$$

Dengan mengalikan kedua sisi dengan λ_{eff}, kita memperoleh

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{47}$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari seduah sarana pelayanan didefenesikan sebagai fungsi dari jumlah rata-rata pelayan yang sibuk. Karena selisih antara L_s dan L_q harus sama dengan jumlah pelayan yang sibuk, yang diperkirakan, kita memperoleh

$$\begin{pmatrix} \text{jumlah pelayan yang sibuk} \\ \text{yang diperkirakan} \end{pmatrix} = \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{48}$$

Karena itu, persentase pemanfaatan sebuah sarana pelayanan dengan c pelayan yang paralel dihitung sebagai

$$\text{persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c} \times 100 \tag{49}$$

Sebagai ringkasan, dengan diketahui p_n, kita dapat menghitung ukuran kinerja sistem tersebut dengan urutan berikut ini :

$$p_n \rightarrow L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \rightarrow W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \rightarrow W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \rightarrow L_q = \lambda_{eff} W_q \rightarrow \bar{c} = L_s L_q$$

BAB III

MODEL-MODEL ANTRIAN POISSON

Dalam bagian ini, akan ditunjukkan tentang beberapa model antrian Poisson yang merupakan hasil-hasil dari model yang digeneralisasi. Setiap model dijabarkan dalam bentuk notasi Kendall yang diperluas yang telah disajikan pada bab sebelumnya. Karena penurunan p_n dalam model Poisson yang digeneralisasi tidak bergantung pada peraturan antrian (FCFS, LCFS, SIRO), maka adalah sesuai untuk menggunakan simbol GD (peraturan umum) dalam notasi Kendall.

3. 1. (M/M/1) : (GD/∞/∞)

Ini adalah model pelayanan tunggal tanpa batas kapasitas, baik dari kapasitas sistem tersebut maupun kapasitas sumber pemanggilan. Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah dalam sistem tersebut; yaitu $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n. Demikian pula, diasumsikan bahwa pelayan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan ($\mu_n = \mu$) untuk semua n. Akibatnya, model ini memiliki kedatangan dan keberangkatan Poisson dengan mean λ dan μ berturut-turut.

Dengan mendefinisikan $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, ekspresi untuk p_n dalam model yang digeneralisasi berkurang menjadi :

$$P_n = \rho n p_0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Kita memerlukan p_0 dengan menggunakan fakta bahwa jumlah semua p_n untuk $n = 1, 2, \ldots$, sama dengan 1, kita memperoleh

$$p_0 (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1 \tag{51}$$

Jika kita mengasumsikan bahwa $\rho < 1$, maka

$$p_0 \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = 1 \tag{52}$$

atau

$$p_0 = 1 - \rho \qquad 53)$$

Karena itu kita memperoleh rumus umum berikut ini :

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 1, 2, ... \qquad (M/M/1) : (GD/\infty/\infty) \qquad 54)$$

yang merupakan sebuah **distribusi geometris.**

Persyaratan matematis $\rho > 1$ yang diperlukan untuk memastikan konvergensi dari serial geometris $(1 + \rho + \rho^2 + ...)$ mengarah pada sebuah argumen intuitif. Pada intinya, $\rho < 1$ berarti bahwa $\lambda < \mu$, yang menyatakan bahwa laju kedatangan harus secara ketat lebih kecil daripada laju pelayanan di sarana tersebut agar sistem tersebut mencapai stabilitas (kondisi steady-state). Ini masuk akal karena dalam kondisi lainnya, ukuran antrian akan meningkat menjadi tak hingga.

Ukuran L_s dapat diturunkan dengan cara berikut ini :

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \qquad 55) \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Catat bahwa konvergensi ... $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ ... dipastikan karena $\rho < 1$. Dengan menggunakan hubungan yang diberikan sebelumnya, kita memperoleh semua ukuran dasar dari kinerja sebagai

$$L_s = E\{n\} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad 56)$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad 57)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad 58)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad 59)$$

3. 2. (M/M/1) : (GD/N/∞)

Satu-satunya perbedaan antara model ini dengan model (M/M/1) : (GD/∞/∞) adalah bahwa jumlah pelanggan masuk yang diijinkan dalam sistem adalah N (panjang antrian maksimum N-1). Ini berarti bahwa setelah terdapat N pelanggan dalam sistem, mereka yang baru tiba akan membatalkan niatnya atau tidak diijinkan bergabung dengan antrian. Dalam bentuk model yang digeneralisasi, situasi ini diterjemahkan menjadi

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 1,2,\ldots,N-1 \\ 0, & n = N, N+1,\ldots \end{cases} \quad 60)$$

$\mu_n = \mu$ untuk semua n = 1,2,...

Dengan menganggap $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, kita memperoleh

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n \le N \\ 0, & n > N \end{cases} \quad 61)$$

Nilai p_0 ditentukan dari persamaan

$$\sum_{n=0}^{N} p_n = 1, \text{ yang menghasilkan } p_0(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^N) = 1 \quad 62)$$

atau

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad 63)$$

Rumus untuk p_n dapat diringkaskan sebagai

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\rho^n, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad n = 0,1,2,\ldots,N \quad (\text{M/M/1}):(\text{GD/N/}\infty) \qquad 64)$$

Catat bahwa $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ tidak perlu kurang dari 1 seperti dalam kasus (M/M/1) : (GD/∞/∞). Secara intuitif, kita memahami hasil ini, karena jumlah pelanggan yang diijinkan dikendalikan oleh panjang antrian (= N-1), bukan berdasarkan laju kedatangan dan keberangkatan relatif, λ dan μ.

Dengan menggunakan p_n di atas, kita menemukan bahwa jumlah yang diperkirakan dalam sistem dihitung sebagai berikut :

$$\begin{aligned} L_s = E\{n\} &= \sum_{n=0}^{N} np_n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\rho^n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{\rho\{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \end{aligned} \qquad 65)$$

atau

$$L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho\{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2} & \rho = 1 \end{cases} \qquad 66)$$

Ukuran L_q, W_s, dan W_q dapat diturunkan dari L_s setelah laju kedatangan efektif λ_{eff} ditentukan. Dari bagian 3.2, kita memiliki

$$\lambda_{eff} = \lambda(p_0 + p_1 + \ldots + p_{N-1}) + 0p_n$$

Karena itu kita mendapatkan

$$\lambda_{eff} = \lambda\,(1 - p_n) \qquad 68)$$

Rumus untuk λ_{eff} masuk akal, karena probabilitas bagi seorang pelanggan untuk *tidak* dapat bergabung dengan sistem adalah p_N. Jadi rasio pelanggan yang dapat bergabung dalam sistem adalah $(1-p_N)$, yang secara langsung mengarah pada rumus untuk λ_{eff}. Dengan menggunakan L_s dan λ_{eff}, kita memperoleh

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L_s - \frac{\lambda(1-p_N)}{\mu} \qquad 69)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)} \qquad 70)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1-p_N)} \qquad 71)$$

Dari rumus di atas pula dapat dikatakan bahwa

$$\lambda_{eff} = \mu(L_s - L_q) = \lambda(1 - p_N) \qquad 72)$$

3. 3. (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Dalam model ini, para pelanggan tiba dengan laju konstan λ dan maksimum c pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Laju pelayanan per pelayan juga konstan dan sama dengan μ. Dari bagian 3.2, kita memperoleh $\lambda_{eff} = \lambda$.

Pengaruh terakhir dari penggunaan c pelayan yang paralel adalah *mempercepat* laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika jumlah pelanggan dalam sistem, n, sama dengan atau lebih besar dari c, laju keberangkatan gabungan dari sarana tersebut adalah c. Jika tidak, jika n lebih kecil dari c, laju pelayanan adalah $n\mu$. Jadi, dalam bentuk model yang digeneralisasi, kita memiliki

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0 \qquad 73)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases} \qquad 74)$$

Karena itu kita menghitung p_n untuk $n \leq c$ sebagai

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)...(n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 \qquad 75)$$

dan untuk $n \geq c$, kita memiliki

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)...(c-1)\mu\underbrace{(c\mu)(c\mu)...(c\mu)}_{(n-c)kali}} p_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} p_0 \qquad 76)$$

Jika kita menganggap $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, nilai p_0 ditentukan dari $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, yang memberikan

$$p_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c} \right)^j \right\}^{-1} \qquad 77)$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}, \quad \frac{\rho}{\mathrm{c}} < 1$$

Jadi

$$p_n = \begin{cases} \left(\frac{\rho^n}{n!} \right) p_0, & 0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{c} \\ \left(\frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) p_0 & n > c \end{cases} \qquad (\mathrm{M/M/c}):(\mathrm{GD}/\infty/\infty) \qquad 78)$$

dimana

$$\frac{\rho}{c} < 1 \quad \text{atau} \quad \frac{\lambda}{\mu c} < 1 \qquad 79)$$

Ekspresi untuk L_q diperoleh sebagai berikut

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n = \sum_{k=0}^{\infty}kp_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!}p_0$$

$$= p_0\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho}{c}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = p_0\frac{\rho^c}{c!}\frac{\rho}{c}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}\right] \qquad 80)$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]p_0 = \left[\frac{cp}{(c-p)^2}\right]p_c$$

Karena itu kita memperoleh

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]p_0 = \left[\frac{cp}{(c-p)^2}\right]p_c \qquad 81)$$

$$L_s = L_q + \rho \qquad 82)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad 83)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad 84)$$

Perhitungan yang berkaitan dengan model ini kemungkinan membosankan. *Morse* memberikan dua aproksimasi yang berguna untuk p_0 dan L_q. Untuk ρ yang jauh lebih kecil dari 1,

$$p_0 \cong 1-\rho \qquad \text{dan} \qquad L_q \cong \frac{\rho^{c+1}}{c^2} \qquad 85)$$

dan untuk ρ/c yang sangat dekat dengan 1,

$$p_0 \cong \frac{(c-p)(c-1)!}{c^c} \qquad \text{dan} \qquad L_q \cong \frac{\rho}{c-\rho} \qquad 86)$$

3. 4. (M/M/c) : (GD/N/∞), c ≤ N

Situasi antrian ini berbeda dari (M/M/c) : (GD/N/∞) dalam hal kapasitas sistem dibatasi sampai N (yaitu, ukuran antrian maksimum = N - c). Dalam bentuk model yang digeneralisasi, λ_n dan μ_n untuk model ini diketahui

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n < N \\ 0, & n \ge N \end{cases} \qquad 87)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le c \\ c\mu, & c \le n \le N \end{cases} \qquad 88)$$

Mengganti λ_n dan μ_n dalam ekspresi umum dengan p_n dan mencatat bahwa $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, kita memperoleh

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \le n \le c \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0, & c \le n \le N \end{cases} \qquad (\mathrm{M/M/c}):(\mathrm{GD/N/\infty}) \qquad 89)$$

dimana

$$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^c (1-(\rho/c)^{N-c+1})}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1}, & \rho/c \ne 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^c}{c!}(N-c+1) \right]^{-1}, & \rho/c = 1 \end{cases} \qquad 90)$$

Perlu diketahui bahwa perbedaan satu-satunya antara p_n dalam model ini dengan (M/M/c) : (GD/∞/∞) terjadi dalam ekspresi untuk p_0, juga bahwa *faktor pemanfaatan* ρ/c tidak perlu kurang dari 1.

Selanjutnya kita menghitung L_q sebagai

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c+1}^{N}(n-c)p_n \\ &= \sum_{j=1}^{N-c} jp_{j+c} \\ &= p_0\frac{p^c}{c!}\frac{\rho}{c}\sum_{j=1}^{N-c} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1} \\ &= p_0\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-p)^2}\left\{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}-(N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right\} \end{aligned} \qquad 91)$$

Karena itu kita memiliki

$$L_q = \begin{cases} p_0\dfrac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-p)^2}\left\{1-\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}-(N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{n-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right\}, & \rho/c \neq 1 \\ p_0\dfrac{\rho(N-c)(n-c+1)}{2c!}, & \rho/c = 1 \end{cases} \qquad 92)$$

$$L_s = L_q + (c-\overline{c}) = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \qquad 93)$$

dimana

$\overline{c}$ = jumlah pelayan yang menganggur yang diperkirakan = $\sum_{n=0}^{c}(c-n)p_n$ 94)

$$\lambda_{eff} = \lambda(1-p_N) = \mu(c-\overline{c}) \qquad 95)$$

Perhatikan interpretasi dari λ_{eff} dalam kasus ini. Karena $(c-\overline{c})$ mewakili jumlah jalur yang sibuk yang diperkirakan, $\mu(c-\overline{c})$ mewakili jumlah aktual yang dilayani per unit waktu dan karena itu merupakan laju kedatangan efektif.

BAB IV

MENGUKUR KINERJA SISTEM OPERASI PELAYANAN DENGAN MODEL-MODEL ANTRIAN POISSON

Sebagai penerapan dari model-model antrian Poisson yang dikemukakan sebelumnya, maka penulis mencoba memakai model-model antrian Poisson tersebut untuk mengukur kinerja sistem operasi pelayanan pada Bank BNI Cabang Tamalanrea pada tanggal 16-20 Oktober 2000.

Data yang diambil berupa banyaknya nasabah yang datang dan dilayani setiap jam serta lamanya nasabah dilayani. Diasumsikan bahwa semua kegiatan yang dilayani oleh teller yang diamati (dalam hal ini, teller yang diamati hanya satu), baik itu menabung, menarik uang tabungan, deposito, dan lain-lain adalah sama, diperoleh data sebagai berikut :

Hari Senin, 16 Oktober 2000

Jam ke	Interval Jam	Jumlah Nasabah (Orang)	Lama Pelayanan (Menit)
1	8:00 - 9:00	10	11
2	9:00 - 10:00	35	55
3	10:00 - 11:00	41	58
4	11:00 - 12:00	36	51
5	12:00 - 13:00	Istirahat	Istirahat
6	13:00 - 14:00	21	31
	Jumlah :	143	210

Hari Selasa, 17 Oktober 2000

Jam ke	Interval Jam	Jumlah Nasabah (Orang)	Lama Pelayanan (Menit)
1	8:00 - 9:00	14	20
2	9:00 - 10:00	33	43
3	10:00 - 11:00	35	52
4	11:00 - 12:00	38	47
5	12:00 - 13:00	Istirahat	Istirahat
6	13:00 - 14:00	29	39
	Jumlah :	149	203

Hari Rabu, 18 Oktober 2000

Jam ke	Interval Jam	Jumlah Nasabah (Orang)	Lama Pelayanan (Menit)
1	8:00 - 9:00	13	17
2	9:00 - 10:00	30	43
3	10:00 - 11:00	35	50
4	11:00 - 12:00	27	39
5	12:00 - 13:00	Istirahat	Istirahat
6	13:00 - 14:00	28	38
	Jumlah :	133	187

Hari Kamis, 19 Oktober 2000

Jam ke	Interval Jam	Jumlah Nasabah (Orang)	Lama Pelayanan (Menit)
1	8:00 - 9:00	12	16
2	9:00 - 10:00	33	46
3	10:00 - 11:00	27	37
4	11:00 - 12:00	26	37
5	12:00 - 13:00	Istirahat	Istirahat
6	13:00 - 14:00	26	35
	Jumlah :	124	171

Hari Jumat, 20 Oktober 2000

Jam ke	Interval Jam	Jumlah Nasabah (Orang)	Lama Pelayanan (Menit)
1	8:00 - 9:00	12	19
2	9:00 - 10:00	28	40
3	10:00 - 11:00	31	37
	Jumlah :	71	96

Untuk mengetahui apakah data di atas berdistribusi Poisson, maka akan diuji dengan Uji Kolmogorov-Smirnov, yang merupakan bagian dari uji Chi-Square untuk menguji apakah suatu data berdistribusi tertentu. Data yang diperoleh diatas disusun menjadi :

Jumlah Nasabah Yang Dilayani (Xi)	Frekuensi	Fi . Xi
0	25	0
1	45	45
2	84	168
3	84	252
4	35	140
5	3	15
	276	620

Dari hasil analisis data pada lampiran 6, diperoleh bahwa data di atas berdistribusi Poisson.

Dari data di atas juga diperoleh :

Jumlah nasabah yang datang selama 5 hari kerja adalah

$$143 + 149 + 133 + 124 + 71 = 620 \text{ orang}$$

Lama pelayanan selama 5 hari kerja adalah

$$210 + 203 + 187 + 171 + 96 = 867 \text{ menit.}$$

Dan jumlah jam kerja selama 5 hari adalah

$$5 + 5 + 5 + 5 + 3 = 23 \text{ jam}$$

Jadi diperoleh

$$\lambda = \frac{\text{jumlah nasabah yang datang}}{\text{jam kerja}} = \frac{620}{23} = 26{,}95 \text{ orang per jam}$$

$$\mu = \frac{\text{lama pelayanan}}{\text{jumlah nasabah yang datang}} = \frac{867}{620} = 1{,}398 \text{menit per orang}$$

$$= \frac{60}{1{,}398} = 42{,}92 \text{ orang per jam}$$

Untuk situasi di atas kita memiliki model antrian (M/M/1) : (GD/∞/∞), karena teller yang diamati hanya 1, kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan tidak terbatas. Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah nasabah dalam sistem tersebut; yaitu $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n, dimana $\lambda = 26, 95$ orang per jam. Demikian pula, diasumsikan bahwa pelayan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan; yaitu, $\mu_n = \mu$ untuk semua n dimana diketahui $\mu = 42, 91$ orang per jam. Karena $\rho = \lambda/\mu = 26{,}95/42{,}91$ adalah kurang dari 1, sistem ini dapat beroperasi dalam kondisi steady-state. Keluaran dari analisis sistem ini diperlihatkan pada lampiran 7. Nilai L_q = 1, 05963 memberikan kita gambaran tentang seberapa banyak orang yang menunggu untuk dilayani secara rata-rata ketika seorang nasabah tiba. Untuk sebuah sistem operasi pelayanan seperti bank, nilai L_q seperti tersebut diatas tidak terlalu mengganggu kenyamanan pelayanan dari sudut pandang nasabah, apalagi waktu menunggu yang diperkirakan dari saat nasabah datang sampai selesai dilayani dapat dilihat pada nilai W_s = 0, 06 jam atau hanya sekitar 3,6 menit. Selain itu kita juga dapat melihat bahwa jumlah orang yang diperkirakan menunggu dalam sistem pada nilai L_s = 1, 68754 orang dan waktu menunggu setiap orang sebelum dilayani adalah 0,04 jam atau sekitar 2, 4 menit.

Informasi lain tentang sistem operasi pelayanan pada Bank BNI Cabang Tamalanrea yang dapat kita peroleh adalah bahwa persentase waktu operasi pelayanan tersebut sama dengan probabilitas tidak ada nasabah dalam sistem, yaitu, $p_0 \cong 0{,}37209$, yang berarti bahwa sistem operasi pelayanan tersebut menganggur sekitar 37 % dari waktunya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. KESIMPULAN

1. Teori Antrian memberikan model-model untuk menganalisis pengoperasian sarana pelayanan.
2. Ukuran kinerja sistem operasi pelayanan dapat dipergunakan untuk manganalisis operasi antrian tersebut, dimana ukuran kinerja yang terpenting adalah jumlah pelanggan yang menunggu yang diperkirakan, waktu menunggu per pelanggan yang diperkirakan, dan pemanfaatan saranan pelayanan yang diperkirakan.
3. Distribusi Poisson dan eksponensial memainkan peranan penting dalam analisis antrian. Distribusi ini mencirikan sarana pelayanan dimana baik kedatangan maupun pelayanan *sepenuhnya bersifat acak.*
4. Dari hasil analisis data pelayanan Bank BNI Tamalanrea pada Hari Senin tanggal 16 Oktober 2000 sampai dengan Hari Jumat tanggal 20 Oktober 2000 diperoleh bahwa rata-rata jumlah nasabah yang menunggu untuk dilayani setiap seorang nasabah tiba adalah 1,06 orang, kemudian waktu menunggu rata-rata setiap nasabah adalah 0,06 jam atau sekitar 3,6 menit. Untuk sebuah sistem operasi pelayanan seperti bank, nilai ini tidak terlalu mengganggu kenyamanan pelanggan, walaupun hal tersebut mengakibatkan persentase waktu sarana pelayanan ini menganggur sampai 37 % dari waktunya.

5.2. SARAN

Karena dalam penulisan ini hanya dibahas tentang model-model antrian Poisson, maka disarankan pada penulisan selanjutnya dibahas tentang model-model antrian non Poisson.

DAFTAR PUSTAKA

Achmad Dimyati, Ir, MBA, Tjutju Dimyati, Ir, MSIE, (1992), *Operation Reseach Model-model Pengambilan Keputusan*, Sinar Baru Bandung, Bandung.

Pangestu Subagyo, Drs, MBA, Marwan Asri, Drs, MBA, T. Hani Handoko, Dr. MBA, *Dasar-dasar Operation Reseach*, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

Saaty L. Thomas, (1961), *Elements of QueuingTheory With Applications*, Mc Graw-HillBook Company.INC, New York Toronto London.

SFrench, RHartley, LC Thomas and DJ White, (1986), *Operational Reseach Techniques*, Edward Arnold Advision of Hodder dan Stoughton, London New York Melbourne Auckland.

Sri Mulyono, (1991), *Operation Reseach*, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

Taha A. H, (1997), *Operation Reseach an Introduction, Sixth edition*, Prentice-Hall International. INC.

Takacs Lajos, (1962), *Introduction to The Theory of Queues*, Oxford University Press, New York.

Winston L. Wayne, (1993), *Operation Reseach Application and Algorithms, third edition*, Duxbury Press an inprint of wordsworth publishing company, Belmont California.

Lampiran 1. Data Pelayanan Bank BNI Cabang Tamalanrea Hari Senin, 16 Oktober 2000

8:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	8:11	8:12	0:01
Orang 2	8:20	8:21	0:01
Orang 3	8:21	8:22	0:01
Orang 4	8:22	8:23	0:01
Orang 5	8:30	8:31	0:01
Orang 6	8:35	8:36	0:01
Orang 7	8:36	8:37	0:01
Orang 8	8:45	8:46	0:01
Orang 9	8:46	8:47	0:01
Orang 10	8:50	8:52	0:02
		Jumlah :	0:11

9:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	9:01	9:02	0:01
Orang 2	9:04	9:05	0:01
Orang 3	9:05	9:07	0:02
Orang 4	9:07	9:09	0:02
Orang 5	9:09	9:10	0:01
Orang 6	9:10	9:12	0:02
Orang 7	9:12	9:14	0:02
Orang 8	9:14	9:16	0:02
Orang 9	9:16	9:18	0:02
Orang 10	9:18	9:19	0:01
Orang 11	9:19	9:20	0:01
Orang 12	9:20	9:21	0:01
Orang 13	9:24	9:26	0:02
Orang 14	9:26	9:27	0:01
Orang 15	9:27	9:29	0:02
Orang 16	9:29	9:31	0:02
Orang 17	9:31	9:32	0:01
Orang 18	9:32	9:33	0:01
Orang 19	9:33	9:35	0:02
Orang 20	9:35	9:37	0:02
Orang 21	9:37	9:38	0:01
Orang 22	9:38	9:40	0:02
Orang 23	9:40	9:41	0:01
Orang 24	9:41	9:42	0:01
Orang 25	9:42	9:43	0:01
Orang 26	9:43	9:45	0:02
Orang 27	9:45	9:46	0:01
Orang 28	9:46	9:48	0:02
Orang 29	9:48	9:50	0:02
Orang 30	9:50	9:52	0:02
Orang 31	9:52	9:54	0:02
Orang 32	9:54	9:56	0:02
Orang 33	9:56	9:57	0:01
Orang 34	9:57	9:59	0:02
Orang 35	9:59	10:01	0:02
		Jumlah :	0:55

10:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	10:01	10:02	0:01
Orang 2	10:02	10:03	0:01
Orang 3	10:03	10:05	0:02
Orang 4	10:05	10:07	0:02
Orang 5	10:07	10:09	0:02
Orang 6	10:09	10:11	0:02
Orang 7	10:11	10:12	0:01
Orang 8	10:12	10:13	0:01
Orang 9	10:13	10:15	0:02
Orang 10	10:15	10:17	0:02
Orang 11	10:17	10:18	0:01
Orang 12	10:18	10:20	0:02
Orang 13	10:20	10:21	0:01
Orang 14	10:21	10:22	0:01
Orang 15	10:22	10:24	0:02
Orang 16	10:24	10:26	0:02
Orang 17	10:26	10:27	0:01
Orang 18	10:27	10:28	0:01
Orang 19	10:28	10:30	0:02
Orang 20	10:30	10:31	0:01
Orang 21	10:32	10:34	0:02
Orang 22	10:34	10:36	0:02
Orang 23	10:36	10:37	0:01
Orang 24	10:37	10:38	0:01
Orang 25	10:38	10:39	0:01
Orang 26	10:39	10:41	0:02
Orang 27	10:41	10:43	0:02
Orang 28	10:43	10:44	0:01
Orang 29	10:44	10:45	0:01
Orang 30	10:45	10:46	0:01
Orang 31	10:46	10:47	0:01
Orang 32	10:47	10:48	0:01
Orang 33	10:48	10:49	0:01
Orang 34	10:49	10:51	0:02
Orang 35	10:51	10:52	0:01
Orang 36	10:52	10:53	0:01
Orang 37	10:53	10:55	0:02
Orang 38	10:55	10:56	0:01
Orang 39	10:56	10:57	0:01
Orang 40	10:57	10:59	0:02
Orang 41	10:59	11:00	0:01
		Jumlah :	0:58

11:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	11:00	11:02	0:02
Orang 2	11:02	11:03	0:01
Orang 3	11:03	11:05	0:02
Orang 4	11:05	11:06	0:01
Orang 5	11:06	11:08	0:02
Orang 6	11:09	11:11	0:02
Orang 7	11:11	11:12	0:01
Orang 8	11:12	11:13	0:01
Orang 9	11:13	11:16	0:03
Orang 10	11:16	11:17	0:01
Orang 11	11:17	11:18	0:01
Orang 12	11:21	11:22	0:01
Orang 13	11:22	11:23	0:01
Orang 14	11:23	11:24	0:01
Orang 15	11:24	11:25	0:01
Orang 16	11:25	11:27	0:02
Orang 17	11:27	11:29	0:02
Orang 18	11:29	11:30	0:01
Orang 19	11:30	11:32	0:02
Orang 20	11:32	11:33	0:01
Orang 21	11:34	11:36	0:02
Orang 22	11:36	11:37	0:01
Orang 23	11:37	11:38	0:01
Orang 24	11:38	11:39	0:01
Orang 25	11:39	11:41	0:02
Orang 26	11:41	11:42	0:01
Orang 27	11:42	11:43	0:01
Orang 28	11:43	11:45	0:02
Orang 29	11:45	11:47	0:02
Orang 30	11:47	11:48	0:01
Orang 31	11:50	11:51	0:01
Orang 32	11:51	11:53	0:02
Orang 33	11:53	11:54	0:01
Orang 34	11:55	11:56	0:01
Orang 35	11:56	11:57	0:01
Orang 36	11:59	12:01	0:02
		Jumlah :	0:51

13:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	13:00	13:02	0:02
Orang 2	13:02	13:04	0:02
Orang 3	13:04	13:05	0:01
Orang 4	13:09	13:11	0:02
Orang 5	13:13	13:14	0:01
Orang 6	13:15	13:17	0:02
Orang 7	13:20	13:21	0:01
Orang 8	13:22	13:23	0:01
Orang 9	13:23	13:24	0:01
Orang 10	13:26	13:27	0:01
Orang 11	13:29	13:31	0:02
Orang 12	13:31	13:33	0:02
Orang 13	13:33	13:35	0:02
Orang 14	13:38	13:39	0:01
Orang 15	13:40	13:42	0:02
Orang 16	13:42	13:43	0:01
Orang 17	13:45	13:47	0:02
Orang 18	13:50	13:52	0:02
Orang 19	13:52	13:53	0:01
Orang 20	13:53	13:54	0:01
Orang 21	13:54	13:55	0:01
		Jumlah :	0:31

Lampiran 2. Data Pelayanan Bank BNI Tamalanrea Hari Selasa,
17 Oktober 2000

8:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	8:06	8:07	0:01
Orang 2	8:09	8:10	0:01
Orang 3	8:11	8:13	0:02
Orang 4	8:16	8:17	0:01
Orang 5	8:23	8:24	0:01
Orang 6	8:24	8:25	0:01
Orang 7	8:26	8:28	0:02
Orang 8	8:28	8:29	0:01
Orang 9	8:30	8:32	0:02
Orang 10	8:32	8:33	0:01
Orang 11	8:33	8:35	0:02
Orang 12	8:35	8:37	0:02
Orang 13	8:40	8:42	0:02
Orang 14	8:42	8:43	0:01
		Jumlah :	0:20

9:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	9:01	9:02	0:01
Orang 2	9:02	9:04	0:02
Orang 3	9:04	9:06	0:02
Orang 4	9:07	9:08	0:01
Orang 5	9:08	9:09	0:01
Orang 6	9:09	9:10	0:01
Orang 7	9:11	9:13	0:02
Orang 8	9:13	9:14	0:01
Orang 9	9:14	9:15	0:01
Orang 10	9:17	9:18	0:01
Orang 11	9:18	9:19	0:01
Orang 12	9:19	9:21	0:02
Orang 13	9:21	9:23	0:02
Orang 14	9:23	9:24	0:01
Orang 15	9:24	9:25	0:01
Orang 16	9:25	9:26	0:01
Orang 17	9:29	9:31	0:02
Orang 18	9:31	9:32	0:01
Orang 19	9:32	9:33	0:01
Orang 20	9:33	9:34	0:01
Orang 21	9:34	9:35	0:01
Orang 22	9:35	9:36	0:01
Orang 23	9:36	9:38	0:02
Orang 24	9:38	9:40	0:02
Orang 25	9:40	9:41	0:01
Orang 26	9:43	9:44	0:01
Orang 27	9:44	9:45	0:01
Orang 28	9:45	9:46	0:01
Orang 29	9:46	9:47	0:01
Orang 30	9:49	9:50	0:01
Orang 31	9:50	9:52	0:02
Orang 32	9:56	9:57	0:01
Orang 33	9:59	10:01	0:02
		Jumlah :	0:43

10:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	10:05	10:06	0:01
Orang 2	10:08	10:10	0:02
Orang 3	10:10	10:11	0:01
Orang 4	10:11	10:12	0:01
Orang 5	10:12	10:13	0:01
Orang 6	10:13	10:15	0:02
Orang 7	10:15	10:19	0:04
Orang 8	10:19	10:20	0:01
Orang 9	10:20	10:21	0:01
Orang 10	10:21	10:22	0:01
Orang 11	10:22	10:25	0:03
Orang 12	10:25	10:26	0:01
Orang 13	10:26	10:27	0:01
Orang 14	10:27	10:28	0:01
Orang 15	10:28	10:30	0:02
Orang 16	10:30	10:31	0:01
Orang 17	10:31	10:32	0:01
Orang 18	10:32	10:33	0:01
Orang 19	10:33	10:35	0:02
Orang 20	10:35	10:36	0:01
Orang 21	10:36	10:38	0:02
Orang 22	10:38	10:40	0:02
Orang 23	10:40	10:42	0:02
Orang 24	10:42	10:43	0:01
Orang 25	10:43	10:44	0:01
Orang 26	10:46	10:47	0:01
Orang 27	10:47	10:48	0:01
Orang 28	10:49	10:50	0:01
Orang 29	10:50	10:52	0:02
Orang 30	10:52	10:54	0:02
Orang 31	10:54	10:56	0:02
Orang 32	10:56	10:57	0:01
Orang 33	10:57	10:58	0:01
Orang 34	10:58	10:59	0:01
Orang 35	10:59	11:02	0:03
		Jumlah :	0:52

11:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	11:02	11:04	0:02
Orang 2	11:05	11:06	0:01
Orang 3	11:06	11:07	0:01
Orang 4	11:07	11:08	0:01
Orang 5	11:08	11:10	0:02
Orang 6	11:10	11:11	0:01
Orang 7	11:11	11:12	0:01
Orang 8	11:12	11:13	0:01
Orang 9	11:13	11:14	0:01
Orang 10	11:14	11:15	0:01
Orang 11	11:18	11:19	0:01
Orang 12	11:19	11:22	0:03
Orang 13	11:22	11:23	0:01
Orang 14	11:23	11:24	0:01
Orang 15	11:24	11:25	0:01
Orang 16	11:25	11:26	0:01
Orang 17	11:26	11:27	0:01
Orang 18	11:27	11:29	0:02
Orang 19	11:29	11:30	0:01
Orang 20	11:30	11:31	0:01
Orang 21	11:31	11:32	0:01
Orang 22	11:32	11:33	0:01
Orang 23	11:33	11:35	0:02
Orang 24	11:35	11:37	0:02
Orang 25	11:37	11:38	0:01
Orang 26	11:39	11:40	0:01
Orang 27	11:40	11:41	0:01
Orang 28	11:41	11:42	0:01
Orang 29	11:42	11:43	0:01
Orang 30	11:43	11:44	0:01
Orang 31	11:48	11:50	0:02
Orang 32	11:51	11:52	0:01
Orang 33	11:52	11:54	0:02
Orang 34	11:55	11:56	0:01
Orang 35	11:56	11:57	0:01
Orang 36	11:57	11:58	0:01
Orang 37	11:58	11:59	0:01
Orang 38	11:59	12:00	0:01
		Jumlah :	0:47

13:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	13:00	13:03	0:03
Orang 2	13:03	13:04	0:01
Orang 3	13:04	13:05	0:01
Orang 4	13:05	13:07	0:02
Orang 5	13:07	13:09	0:02
Orang 6	13:09	13:10	0:01
Orang 7	13:10	13:11	0:01
Orang 8	13:11	13:12	0:01
Orang 9	13:13	13:15	0:02
Orang 10	13:15	13:16	0:01
Orang 11	13:16	13:18	0:02
Orang 12	13:18	13:20	0:02
Orang 13	13:20	13:21	0:01
Orang 14	13:21	13:22	0:01
Orang 15	13:22	13:23	0:01
Orang 16	13:24	13:26	0:02
Orang 17	13:26	13:27	0:01
Orang 18	13:27	13:28	0:01
Orang 19	13:35	13:36	0:01
Orang 20	13:40	13:41	0:01
Orang 21	13:43	13:44	0:01
Orang 22	13:44	13:46	0:02
Orang 23	13:48	13:50	0:02
Orang 24	13:50	13:51	0:01
Orang 25	13:52	13:53	0:01
Orang 26	13:53	13:54	0:01
Orang 27	13:54	13:55	0:01
Orang 28	13:56	13:57	0:01
Orang 29	13:57	13:58	0:01
		Jumlah :	0:39

Lampiran 3. Data Pelayanan Bank BNI Tamalanrea Hari Rabu,
18 Oktober 2000

8:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	8:10	8:11	0:01
Orang 2	8:15	8:16	0:01
Orang 3	8:19	8:20	0:01
Orang 4	8:20	8:21	0:01
Orang 5	8:21	8:23	0:02
Orang 6	8:25	8:26	0:01
Orang 7	8:30	8:32	0:02
Orang 8	8:36	8:37	0:01
Orang 9	8:40	8:42	0:02
Orang 10	8:42	8:43	0:01
Orang 11	8:47	8:49	0:02
Orang 12	8:49	8:50	0:01
Orang 13	8:55	8:56	0:01
		Jumlah :	0:17

9:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	9:00	9:04	0:04
Orang 2	9:05	9:06	0:01
Orang 3	9:08	9:09	0:01
Orang 4	9:10	9:12	0:02
Orang 5	9:12	9:13	0:01
Orang 6	9:15	9:16	0:01
Orang 7	9:16	9:17	0:01
Orang 8	9:19	9:20	0:01
Orang 9	9:20	9:21	0:01
Orang 10	9:21	9:23	0:02
Orang 11	9:25	9:27	0:02
Orang 12	9:27	9:28	0:01
Orang 13	9:28	9:30	0:02
Orang 14	9:30	9:31	0:01
Orang 15	9:31	9:32	0:01
Orang 16	9:32	9:34	0:02
Orang 17	9:34	9:35	0:01
Orang 18	9:40	9:41	0:01
Orang 19	9:41	9:42	0:01
Orang 20	9:42	9:44	0:02
Orang 21	9:44	9:45	0:01
Orang 22	9:45	9:47	0:02
Orang 23	9:47	9:48	0:01
Orang 24	9:48	9:49	0:01
Orang 25	9:49	9:51	0:02
Orang 26	9:51	9:52	0:01
Orang 27	9:52	9:53	0:01
Orang 28	9:53	9:54	0:01
Orang 29	9:54	9:56	0:02
Orang 30	9:56	9:58	0:02
		Jumlah :	0:43

10:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	10:01	10:02	0:01
Orang 2	10:02	10:03	0:01
Orang 3	10:05	10:06	0:01
Orang 4	10:08	10:10	0:02
Orang 5	10:12	10:14	0:02
Orang 6	10:14	10:15	0:01
Orang 7	10:15	10:16	0:01
Orang 8	10:16	10:18	0:02
Orang 9	10:18	10:19	0:01
Orang 10	10:19	10:21	0:02
Orang 11	10:21	10:22	0:01
Orang 12	10:22	10:23	0:01
Orang 13	10:23	10:25	0:02
Orang 14	10:25	10:26	0:01
Orang 15	10:26	10:28	0:02
Orang 16	10:28	10:29	0:01
Orang 17	10:28	10:30	0:02
Orang 18	10:30	10:31	0:01
Orang 19	10:31	10:32	0:01
Orang 20	10:35	10:36	0:01
Orang 21	10:36	10:37	0:01
Orang 22	10:37	10:39	0:02
Orang 23	10:39	10:40	0:01
Orang 24	10:40	10:42	0:02
Orang 25	10:42	10:43	0:01
Orang 26	10:43	10:44	0:01
Orang 27	10:46	10:48	0:02
Orang 28	10:48	10:50	0:02
Orang 29	10:50	10:51	0:01
Orang 30	10:51	10:52	0:01
Orang 31	10:52	10:54	0:02
Orang 32	10:54	10:55	0:01
Orang 33	10:55	10:57	0:02
Orang 34	10:57	10:59	0:02
Orang 35	10:59	11:01	0:02
		Jumlah :	0:50

11:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	11:01	11:03	0:02
Orang 2	11:03	11:04	0:01
Orang 3	11:05	11:07	0:02
Orang 4	11:07	11:08	0:01
Orang 5	11:10	11:11	0:01
Orang 6	11:11	11:12	0:01
Orang 7	11:15	11:17	0:02
Orang 8	11:17	11:18	0:01
Orang 9	11:21	11:23	0:02
Orang 10	11:23	11:24	0:01
Orang 11	11:25	11:27	0:02
Orang 12	11:27	11:28	0:01
Orang 13	11:28	11:30	0:02
Orang 14	11:30	11:31	0:01
Orang 15	11:33	11:35	0:02
Orang 16	11:35	11:37	0:02
Orang 17	11:37	11:38	0:01
Orang 18	11:38	11:39	0:01
Orang 19	11:40	11:41	0:01
Orang 20	11:41	11:42	0:01
Orang 21	11:43	11:45	0:02
Orang 22	11:45	11:46	0:01
Orang 23	11:46	11:48	0:02
Orang 24	11:48	11:49	0:01
Orang 25	11:52	11:54	0:02
Orang 26	11:54	11:55	0:01
Orang 27	11:57	11:59	0:02
		Jumlah :	0:39

13:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	13:01	13:03	0:02
Orang 2	13:03	13:04	0:01
Orang 3	13:04	13:05	0:01
Orang 4	13:05	13:06	0:01
Orang 5	13:06	13:07	0:01
Orang 6	13:11	13:13	0:02
Orang 7	13:15	13:17	0:02
Orang 8	13:17	13:18	0:01
Orang 9	13:19	13:20	0:01
Orang 10	13:20	13:22	0:02
Orang 11	13:22	13:24	0:02
Orang 12	13:24	13:25	0:01
Orang 13	13:26	13:27	0:01
Orang 14	13:28	13:30	0:02
Orang 15	13:33	13:34	0:01
Orang 16	13:37	13:39	0:02
Orang 17	13:39	13:40	0:01
Orang 18	13:41	13:43	0:02
Orang 19	13:43	13:45	0:02
Orang 20	13:49	13:50	0:01
Orang 21	13:50	13:51	0:01
Orang 22	13:51	13:52	0:01
Orang 23	13:52	13:53	0:01
Orang 24	13:53	13:54	0:01
Orang 25	13:54	13:55	0:01
Orang 26	13:55	13:56	0:01
Orang 27	13:56	13:58	0:02
Orang 28	13:58	13:59	0:01
		Jumlah :	0:38

Lampiran 4. Data Pelayanan Bank BNI Tamalanrea Hari Kamis,
19 Oktober 2000

8:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	8:12	8:13	0:01
Orang 2	8:17	8:19	0:02
Orang 3	8:22	8:23	0:01
Orang 4	8:24	8:26	0:02
Orang 5	8:30	8:31	0:01
Orang 6	8:34	8:35	0:01
Orang 7	8:38	8:39	0:01
Orang 8	8:42	8:43	0:01
Orang 9	8:43	8:45	0:02
Orang 10	8:45	8:47	0:02
Orang 11	8:47	8:48	0:01
Orang 12	8:50	8:51	0:01
		Jumlah :	0:16

9:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	9:03	9:04	0:01
Orang 2	9:07	9:08	0:01
Orang 3	9:11	9:12	0:01
Orang 4	9:13	9:15	0:02
Orang 5	9:15	9:17	0:02
Orang 6	9:17	9:18	0:01
Orang 7	9:18	9:20	0:02
Orang 8	9:20	9:21	0:01
Orang 9	9:21	9:22	0:01
Orang 10	9:22	9:24	0:02
Orang 11	9:24	9:25	0:01
Orang 12	9:25	9:26	0:01
Orang 13	9:26	9:28	0:02
Orang 14	9:28	9:29	0:01
Orang 15	9:30	9:31	0:01
Orang 16	9:31	9:33	0:02
Orang 17	9:33	9:34	0:01
Orang 18	9:34	9:35	0:01
Orang 19	9:35	9:36	0:01
Orang 20	9:36	9:38	0:02
Orang 21	9:38	9:40	0:02
Orang 22	9:40	9:42	0:02
Orang 23	9:42	9:43	0:01
Orang 24	9:43	9:45	0:02
Orang 25	9:45	9:46	0:01
Orang 26	9:47	9:49	0:02
Orang 27	9:49	9:50	0:01
Orang 28	9:50	9:52	0:02
Orang 29	9:52	9:54	0:02
Orang 30	9:54	9:55	0:01
Orang 31	9:56	9:57	0:01
Orang 32	9:57	9:58	0:01
Orang 33	9:58	9:59	0:01
		Jumlah :	0:46

10:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	10:00	10:02	0:02
Orang 2	10:02	10:03	0:01
Orang 3	10:04	10:05	0:01
Orang 4	10:09	10:11	0:02
Orang 5	10:11	10:12	0:01
Orang 6	10:13	10:15	0:02
Orang 7	10:15	10:16	0:01
Orang 8	10:16	10:18	0:02
Orang 9	10:22	10:24	0:02
Orang 10	10:24	10:25	0:01
Orang 11	10:26	10:27	0:01
Orang 12	10:27	10:28	0:01
Orang 13	10:30	10:32	0:02
Orang 14	10:32	10:33	0:01
Orang 15	10:35	10:36	0:01
Orang 16	10:36	10:38	0:02
Orang 17	10:38	10:39	0:01
Orang 18	10:42	10:44	0:02
Orang 19	10:44	10:45	0:01
Orang 20	10:46	10:47	0:01
Orang 21	10:49	10:50	0:01
Orang 22	10:51	10:53	0:02
Orang 23	10:53	10:54	0:01
Orang 24	10:54	10:55	0:01
Orang 25	10:56	10:58	0:02
Orang 26	10:58	10:59	0:01
Orang 27	10:59	11:00	0:01
		Jumlah :	0:37

11:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	11:03	11:05	0:02
Orang 2	11:05	11:06	0:01
Orang 3	11:07	11:09	0:02
Orang 4	11:10	11:12	0:02
Orang 5	11:12	11:13	0:01
Orang 6	11:15	11:16	0:01
Orang 7	11:19	11:21	0:02
Orang 8	11:21	11:22	0:01
Orang 9	11:23	11:25	0:02
Orang 10	11:25	11:26	0:01
Orang 11	11:27	11:28	0:01
Orang 12	11:28	11:29	0:01
Orang 13	11:30	11:32	0:02
Orang 14	11:32	11:34	0:02
Orang 15	11:35	11:36	0:01
Orang 16	11:36	11:37	0:01
Orang 17	11:41	11:43	0:02
Orang 18	11:43	11:44	0:01
Orang 19	11:46	11:48	0:02
Orang 20	11:50	11:51	0:01
Orang 21	11:52	11:54	0:02
Orang 22	11:54	11:55	0:01
Orang 23	11:55	11:56	0:01
Orang 24	11:56	11:57	0:01
Orang 25	11:57	11:59	0:02
Orang 26	11:59	12:00	0:01
		Jumlah :	0:37

13:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	13:05	13:07	0:02
Orang 2	13:07	13:08	0:01
Orang 3	13:09	13:11	0:02
Orang 4	13:11	13:12	0:01
Orang 5	13:13	13:14	0:01
Orang 6	13:15	13:16	0:01
Orang 7	13:16	13:17	0:01
Orang 8	13:19	13:21	0:02
Orang 9	13:21	13:22	0:01
Orang 10	13:22	13:23	0:01
Orang 11	13:23	13:24	0:01
Orang 12	13:24	13:26	0:02
Orang 13	13:26	13:27	0:01
Orang 14	13:27	13:29	0:02
Orang 15	13:29	13:30	0:01
Orang 16	13:30	13:32	0:02
Orang 17	13:35	13:36	0:01
Orang 18	13:38	13:40	0:02
Orang 19	13:40	13:42	0:02
Orang 20	13:43	13:44	0:01
Orang 21	13:47	13:48	0:01
Orang 22	13:48	13:50	0:02
Orang 23	13:52	13:53	0:01
Orang 24	13:54	13:55	0:01
Orang 25	13:55	13:56	0:01
Orang 26	13:56	13:57	0:01
		Jumlah :	0:35

Lampiran 5. Data Pelayanan Bank BNI Tamalanrea Hari Jumat,
20 Oktober 2000

8:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	8:10	8:12	0:02
Orang 2	8:17	8:18	0:01
Orang 3	8:19	8:21	0:02
Orang 4	8:23	8:24	0:01
Orang 5	8:30	8:32	0:02
Orang 6	8:35	8:39	0:04
Orang 7	8:41	8:42	0:01
Orang 8	8:45	8:46	0:01
Orang 9	8:48	8:50	0:02
Orang 10	8:51	8:52	0:01
Orang 11	8:54	8:55	0:01
Orang 12	8:55	8:56	0:01
		Jumlah :	0:19

9:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	9:01	9:04	0:03
Orang 2	9:05	9:07	0:02
Orang 3	9:08	9:10	0:02
Orang 4	9:10	9:12	0:02
Orang 5	9:12	9:13	0:01
Orang 6	9:16	9:17	0:01
Orang 7	9:17	9:19	0:02
Orang 8	9:19	9:20	0:01
Orang 9	9:20	9:22	0:02
Orang 10	9:23	9:24	0:01
Orang 11	9:25	9:27	0:02
Orang 12	9:27	9:30	0:03
Orang 13	9:30	9:32	0:02
Orang 14	9:32	9:33	0:01
Orang 15	9:36	9:37	0:01
Orang 16	9:37	9:38	0:01
Orang 17	9:38	9:40	0:02
Orang 18	9:41	9:42	0:01
Orang 19	9:43	9:45	0:02
Orang 20	9:45	9:46	0:01
Orang 21	9:48	9:49	0:01
Orang 22	9:49	9:51	0:02
Orang 23	9:51	9:52	0:01
Orang 24	9:53	9:55	0:02
Orang 25	9:55	9:56	0:01
Orang 26	9:56	9:57	0:01
Orang 27	9:57	9:58	0:01
Orang 28	9:58	9:59	0:01
		Jumlah :	0:40

10:00	Mulai Dilayani	Selesai Dilayani	Lama Pelayanan
Orang 1	10:00	10:01	0:01
Orang 2	10:02	10:04	0:02
Orang 3	10:04	10:05	0:01
Orang 4	10:05	10:06	0:01
Orang 5	10:07	10:09	0:02
Orang 6	10:09	10:10	0:01
Orang 7	10:11	10:12	0:01
Orang 8	10:15	10:16	0:01
Orang 9	10:16	10:17	0:01
Orang 10	10:17	10:19	0:02
Orang 11	10:20	10:21	0:01
Orang 12	10:22	10:24	0:02
Orang 13	10:24	10:25	0:01
Orang 14	10:25	10:26	0:01
Orang 15	10:28	10:29	0:01
Orang 16	10:30	10:32	0:02
Orang 17	10:32	10:33	0:01
Orang 18	10:35	10:37	0:02
Orang 19	10:37	10:38	0:01
Orang 20	10:39	10:41	0:02
Orang 21	10:41	10:42	0:01
Orang 22	10:44	10:46	0:02
Orang 23	10:46	10:47	0:01
Orang 24	10:47	10:48	0:01
Orang 25	10:48	10:50	0:02
Orang 26	10:50	10:52	0:02
Orang 27	10:52	10:53	0:01
Orang 28	10:53	10:54	0:01
Orang 29	10:54	10:55	0:01
Orang 30	10:55	10:56	0:01
Orang 31	10:56	10:58	0:02
		Jumlah :	0:37

Lampiran 6. Uji Chi-Kuadrat Untuk Data Pelayanan Bank BNI Tamalanrea, 16-20 Oktober 200(

Akan diuji apakah kedatangan nasabah berdistribusi Poisson, maka data disusun sebagai berikut
Hari Senin, 16 Oktober

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
8:00 - 8:05	0
8:05 - 8:10	0
8:10 - 8:15	1
8:15 - 8:20	0
8:20 - 8:25	3
8:25 - 8:30	0
8:30 - 8:35	1
8:35 - 8:40	2
8:40 - 8:45	0
8:45 - 8:50	2
8:50 - 8:55	1
8:55 - 9:00	0

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
9:00 - 9:05	2
9:05 - 9:10	3
9:10 - 9:15	3
9:15 - 9:20	3
9:20 - 9:25	2
9:25 - 9:30	3
9:30 - 9:35	3
9:35 - 9:40	3
9:40 - 9:45	4
9:45 - 9:50	3
9:50 - 9:55	3
9:55 - 10:00	3

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
10:00 - 10:05	3
10:05 - 10:10	3
10:10 - 10:15	3
10:15 - 10:20	3
10:20 - 10:25	4
10:25 - 10:30	3
10:30 - 10:35	3
10:35 - 10:40	4
10:40 - 10:45	3
10:45 - 10:50	4
10:50 - 10:55	4
10:55 - 11:00	4

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
11:00 - 11:05	3
11:05 - 11:10	2
11:10 - 11:15	4
11:15 - 11:20	2
11:20 - 11:25	4
11:25 - 11:30	3
11:30 - 11:35	3
11:35 - 11:40	4
11:40 - 11:45	3
11:45 - 11:50	2
11:50 - 11:55	3
11:55 - 12:00	3

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
13:00 - 13:05	3
13:05 - 13:10	1
13:10 - 13:15	1
13:15 - 13:20	1
13:20 - 13:25	3
13:25 - 13:30	2
13:30 - 13:35	2
13:35 - 13:40	1
13:40 - 13:45	2
13:45 - 13:50	1
13:50 - 13:55	4
13:55 - 14:00	0

Hari Selasa, 17 Oktober 2000

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
8:00 - 8:05	0
8:05 - 8:10	2
8:10 - 8:15	1
8:15 - 8:20	1
8:20 - 8:25	2
8:25 - 8:30	2
8:30 - 8:35	3
8:35 - 8:40	1
8:40 - 8:45	2
8:45 - 8:50	0
8:50 - 8:55	0
8:55 - 9:00	0

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
9:00 - 9:05	3
9:05 - 9:10	3
9:10 - 9:15	3
9:15 - 9:20	3
9:20 - 9:25	3
9:25 - 9:30	2
9:30 - 9:35	4
9:35 - 9:40	3
9:40 - 9:45	3
9:45 - 9:50	3
9:50 - 9:55	1
9:55 - 10:00	2

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
10:00 - 10:05	0
10:05 - 10:10	2
10:10 - 10:15	4
10:15 - 10:20	2
10:20 - 10:25	3
10:25 - 10:30	4
10:30 - 10:35	4
10:35 - 10:40	3
10:40 - 10:45	3
10:45 - 10:50	3
10:50 - 10:55	3
10:55 - 11:00	4

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
11:00 - 11:05	1
11:05 - 11:10	4
11:10 - 11:15	5
11:15 - 11:20	2
11:20 - 11:25	3
11:25 - 11:30	4
11:30 - 11:35	4
11:35 - 11:40	3
11:40 - 11:45	4
11:45 - 11:50	1
11:50 - 11:55	2
11:55 - 12:00	5

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
13:00 - 13:05	3
13:05 - 13:10	3
13:10 - 13:15	3
13:15 - 13:20	3
13:20 - 13:25	4
13:25 - 13:30	2
13:30 - 13:35	0
13:35 - 13:40	1
13:40 - 13:45	3
13:45 - 13:50	1
13:50 - 13:55	4
13:55 - 14:00	2

Hari Rabu, 18 Oktober 2000

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
8:00 - 8:05	0
8:05 - 8:10	0
8:10 - 8:15	1
8:15 - 8:20	2
8:20 - 8:25	2
8:25 - 8:30	1
8:30 - 8:35	1
8:35 - 8:40	1
8:40 - 8:45	2
8:45 - 8:50	2
8:50 - 8:55	0
8:55 - 9:00	1

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
9:00 - 9:05	1
9:05 - 9:10	2
9:10 - 9:15	2
9:15 - 9:20	3
9:20 - 9:25	2
9:25 - 9:30	3
9:30 - 9:35	4
9:35 - 9:40	0
9:40 - 9:45	4
9:45 - 9:50	4
9:50 - 9:55	4
9:55 - 10:00	1

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
10:00 - 10:05	2
10:05 - 10:10	2
10:10 - 10:15	2
10:15 - 10:20	4
10:20 - 10:25	3
10:25 - 10:30	4
10:30 - 10:35	2
10:35 - 10:40	4
10:40 - 10:45	3
10:45 - 10:50	2
10:50 - 10:55	5
10:55 - 11:00	3

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
11:00 - 11:05	2
11:05 - 11:10	2
11:10 - 11:15	2
11:15 - 11:20	2
11:20 - 11:25	2
11:25 - 11:30	3
11:30 - 11:35	2
11:35 - 11:40	3
11:40 - 11:45	3
11:45 - 11:50	3
11:50 - 11:55	2
11:55 - 12:00	1

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
13:00 - 13:05	3
13:05 - 13:10	2
13:10 - 13:15	1
13:15 - 13:20	3
13:20 - 13:25	3
13:25 - 13:30	2
13:30 - 13:35	1
13:35 - 13:40	2
13:40 - 13:45	2
13:45 - 13:50	1
13:50 - 13:55	4
13:55 - 14:00	3

Hari Kamis, 19 Oktober 2000

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
8:00 - 8:05	0
8:05 - 8:10	0
8:10 - 8:15	1
8:15 - 8:20	1
8:20 - 8:25	2
8:25 - 8:30	0
8:30 - 8:35	2
8:35 - 8:40	1
8:40 - 8:45	2
8:45 - 8:50	2
8:50 - 8:55	1
8:55 - 9:00	0

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
9:00 - 9:05	1
9:05 - 9:10	1
9:10 - 9:15	2
9:15 - 9:20	3
9:20 - 9:25	4
9:25 - 9:30	3
9:30 - 9:35	4
9:35 - 9:40	3
9:40 - 9:45	3
9:45 - 9:50	3
9:50 - 9:55	3
9:55 - 10:00	3

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
10:00 - 10:05	3
10:05 - 10:10	1
10:10 - 10:15	2
10:15 - 10:20	2
10:20 - 10:25	2
10:25 - 10:30	2
10:30 - 10:35	2
10:35 - 10:40	3
10:40 - 10:45	2
10:45 - 10:50	2
10:50 - 10:55	3
10:55 - 11:00	3

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
11:00 - 11:05	1
11:05 - 11:10	2
11:10 - 11:15	2
11:15 - 11:20	2
11:20 - 11:25	2
11:25 - 11:30	3
11:30 - 11:35	2
11:35 - 11:40	2
11:40 - 11:45	2
11:45 - 11:50	1
11:50 - 11:55	3
11:55 - 12:00	4

Interval menit	Jumlah nasabah yang dilayani
13:00 - 13:05	0
13:05 - 13:10	3
13:10 - 13:15	2
13:15 - 13:20	3
13:20 - 13:25	4
13:25 - 13:30	3
13:30 - 13:35	1
13:35 - 13:40	2
13:40 - 13:45	2
13:45 - 13:50	2
13:50 - 13:55	2
13:55 - 14:00	2

Hari Jumat, 20 Oktober 2000

Interval menit	Jumlah nasabah Yang dilayani
8:00 - 8:05	0
8:05 - 8:10	0
8:10 - 8:15	1
8:15 - 8:20	2
8:20 - 8:25	1
8:25 - 8:30	0
8:30 - 8:35	1
8:35 - 8:40	1
8:40 - 8:45	1
8:45 - 8:50	2
8:50 - 8:55	2
8:55 - 9:00	1

Interval menit	Jumlah nasabah Yang Dilayani
9:00 - 9:05	1
9:05 - 9:10	2
9:10 - 9:15	2
9:15 - 9:20	3
9:20 - 9:25	2
9:25 - 9:30	2
9:30 - 9:35	2
9:35 - 9:40	3
9:40 - 9:45	2
9:45 - 9:50	3
9:50 - 9:55	2
9:55 - 10:00	4

Interval menit	Jumlah nasabah Yang Dilayani
10:00 - 10:05	3
10:05 - 10:10	3
10:10 - 10:15	1
10:15 - 10:20	3
10:20 - 10:25	3
10:25 - 10:30	2
10:30 - 10:35	2
10:35 - 10:40	3
10:40 - 10:45	2
10:45 - 10:50	3
10:50 - 10:55	4
10:55 - 11:00	2

Dari data tersebut diperoleh :

Jumlah Nasabah Yang Dilayani (Xi)	Frekuensi Observasi	Fi.Xi	P(Xi)	P(Xi) Kum.	Frekuensi Harapan
0	25	0	0.1057818	0.105781798	29.19577638
1	45	45	0.23762578	0.343407578	65.58471505
2	84	168	0.26689852	0.610306098	73.66399154
3	84	252	0.19985155	0.810157647	55.15902748
4	35	140	0.11223547	0.922393118	30.97699007
5	3	15	0.05042463	0.97281775	13.91719844
	276	620			

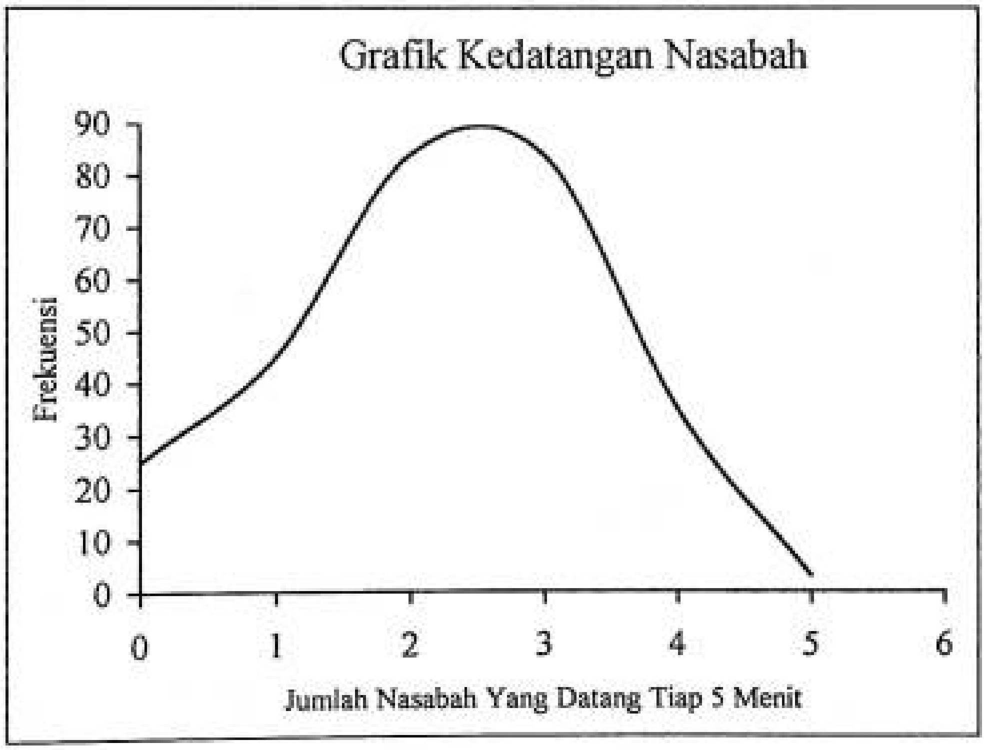
Lambda 2.2463768

Dengan Hipotesis :

H0 : Data berdistribusi Poisson

H1 : Data tidak berdistribusi Poisson

dan taraf keberartian = 0,05



Data kemudian diuji dengan Microstat, diperoleh hasil sebagai berikut,

```
------------------ CROSSTAB / CHI-SQUARE TESTS ----------
--------

                     GOODNESS OF FIT TEST

                     UJI DISTRIBUSI POISSON

           FREQUENCIES                    PROPORTIONS
CLASS   OBSERVED   EXPECTED          OBSERVED   EXPECTED
  1        25.00      29.20             .0403      .0471
  2        45.00      65.58             .0726      .1058
  3        84.00      73.66             .1355      .1188
  4        84.00      55.16             .1355      .0890
  5        35.00      30.98             .0565      .0500
  6         3.00      13.92             .0048      .0224
TOTALS    276.00     268.49             .4452      .4331

CHI-SQUARE WITH  CONTINUITY CORRECTION FACTOR = 30.692,
PROB.= 3.032E-08

CHI-SQUARE WITHOUT CONTINUITY CORRECTION FACTOR = 32.680,
PROB.= 1.094E-08

  D.F. = 1

FISHER EXACT PROBABILITY:     Lower Tail =6.9527,
                              Upper Tail =5.0226


      KOLMOGOROV-SMIRNOV GOODNESS OF FIT TEST

    CLASS CORRESPONDING TO LARGEST DIFFERENCE:  2

    D MAX = .0994
```

Dari Uji Kolmogorov-Smirnov di atas diperoleh bahwa Dmax = 0,0994 yang lebih . kecil dari perbedaan terbesar dari kelas koresponden (= 2). Oleh karena itu kita dapat menarik kesimpulan bahwa H_0 diterima, yang berarti bahwa data di atas berdistribusi Poisson

Lampiran 7. Hasil Analisis Data dengan TORA

```
TORA Optimization System - Version 1.03
Copyright (c) 1989-92, Hamdy A. Taha. All Right Reserved.
Date: Sun Dec 10 22:48:26 2000



                         QUEUEING OUTPUT

Problem title :Sistem Operasi Pelayanan BNI Tamalanrea
Scenario 1 --   (M/M/1):(GD/*/*)

-----------------------------------------------------------
Lambda      =    26.95000            Lambda eff  = 26.95000
Mu          =    42.92000            Rho         =  0.62791

Ls          =     1.68754            Lq          =  1.05963
Ws          =     0.06262            Wq          =  0.03932
-----------------------------------------------------------

Values of p(n) for n=0 to 22, else p(n) <  .00001

 0 0.37209   1 0.23364   2 0.14670   3 0.09212   4 0.05784
 5 0.03632   6 0.02281   7 0.01432   8 0.00899   9 0.00565
10 0.00355  11 0.00233  12 0.00140  13 0.00088  14 0.00055
15 0.00035  16 0.00022  17 0.00014  18 0.00009  19 0.00005
20 0.00003  21 0.00002  22 0.00001


Cumulative values of p(n) for n=0 to 22

 0 0.37209   1 0.60573   2 0.75243   3 0.84455   4 0.90239
 5 0.93871   6 0.96151   7 0.97583   8 0.98483   9 0.99047
10 0.99402  11 0.99624  12 0.99764  13 0.99852  14 0.99907
15 0.99942  16 0.99963  17 0.99977  18 0.99986  19 0.99991
20 0.99994  21 0.99996  22 0.99998
```