MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Oleh:

A. Dian Erawati
H 111 01 009

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2005

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Skripsi

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Pada Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Oleh:

A. Dian Erawati
H 111 01 009

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2005

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 19 Desember 2005

A. DIAN ERAWATI
NIM. H 111 01 009

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 19 Desember 2005

A. DIAN ERAWATI
NIM. H 111 01 009

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	**A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si**
NIP. 131 992 471	**NIP. 132 259 231**

Pada Tanggal : 19 Desember 2005

Pada hari ini, Senin tanggal 19 Desember 2005, panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik Skripsi yang berjudul :

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 19 Desember 2005

Panitia Ujian Skripsi		Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. H. Muh. Hasbi, M.Sc	(.......................)
2. Sekretaris	: Dra. Nasrah Sirajang	(.......................)
3. Anggota	: Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc	(.......................)
4. Anggota	: A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si	(.......................)
5. Anggota	: Firman, S.Si, M.Si	(.......................)

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Assalaamu Alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji hanya bagi Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, yang selalu memberikan kemudahan bagi hamba-hamaba-Nya. Dan puji syukur juga kami panjatkan atas junjungan Nabi Besar kami Muhammad SAW yang telah membawa kami dari alam kegelapan ke alam yang terang benderang dengan Rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan segala keterbatasan yang dimiliki. Skripsi ini merupakan tugas akhir untuk mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.

Sebagai manusia biasa yang tak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa masih banyak yang perlu dibenahi dan disempurnakan dalam skripsi ini, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang konstruktif dari semua pihak.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak terutama dari Bapak **Drs. Amir Kamal Amir, M.Sc** selaku **Pembimbing Utama** yang juga selaku Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Unhas dan Bapak **A. Kresna Jaya, S.Si, M.Si** selaku **Pembimbing Pertama**, terima kasih yang sebesar-besarnya atas bimbingan serta petunjuk yang diberikan selama penyusunan skripsi ini.

Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Ayahanda **Andi Muchtar** dan Ibunda **Nursana M, BA** yang senantiasa memberikan dorongan, semangat dan doa dengan penuh keikhlasan sehingga penulis dapat menyelesaikan studinya hingga mencapai gelar Sarjana Sains. Terutama buat Ibuku yang telah berjasa besar untukku, bagiku Ibu adalah Ibu yang terbaik di dunia.
2. Om **Ir. H. Muh. Ramli Y, M.Si** dan Tante **Ir. Hj. Suhartati, M.Si** yang telah kuanggap sebagai orang tuaku, yang memberikan semangat serta doa yang tulus untukku.
3. **Muh. Faizal HR, S.STP** yang menjadi orang terdekatku sekaligus menjadi sahabat dan kakak bagiku, yang dengan tulus memberikan banyak bantuan, semangat dan doa untukku.
4. Kakakku **Nani** yang ikut andil dalam membantu keluarga serta adik-adikku **Iwan** dan **Heri** yang selalu menghiburku.
5. **Uci** yang manis, **Farid** dan **Hera** yang sudah kuanggap seperti adik-adikku sendiri, dan seluruh keluargaku yang tidak sempat disebutkan namanya satu persatu, terima kasih atas sumbangsihnya.
6. Bapak Rektor Universitas Hasanuddin **Prof. DR. Radi A. Gany**.
7. Bapak Pimpinan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta stafnya.

8. Bapak **Drs. Muh. Zakir, M.Si** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin.
9. Ibu **DR. Hj. Aidawayati R, MS** selaku Penasehat Akademik.
10. Bapak **Drs. H. Muh. Hasbi, M.Sc** , Ibu **Dra. Nasrah Sirajang** dan Bapak **Firman, S.Si, M.Si** selaku dosen penguji.
11. Seluruh Staf Dosen Matematika yang telah mengasuh dan membekali penulis dengan berbagai ilmu pengetahuan selama menjadi mahasiswa pada Jurusan matematika FMIPA Unhas.
12. Seluruh Staf Akademik dan Staf Jurusan Matematika FMIPA Unhas yang telah banyak membantu dalam mengurus berbagai keperluan yang mendukung studi penulis.
13. Sahabat-sahabatku **Nunu, Neldy, Yemi, Muja** dan **Arwi,** terima kasih sudah mau membantuku, mendengar curhat-curhatku, menemani dan menghiburku disaatku sedang sedih. Kalian akan selalu menjadi sahabat-sahabat terbaikku.
14. Teman-teman seperjuanganku, **Asdery, Amma, Fani, Arma, Hasnah, Rahma, Maya, Ida, Fi-vhy, Yati, Esra, Sina, Anty, Ahsan, Sudi, Fahd, Awi, Imran, Ciky, Wawan, Ilyas, Yudin** dan semua teman-temanku seangkatan **'01** yang tidak sempat disebutkan namanya, terima kasih atas kebersamaan kalian di kampus merah.
15. Kakak-kakak seniorku, **K'Hamka, K'Ichamb, K'Tj, K'Atun, K'Edy, K'Ichal, K'Make, K'Niswar, K'Cica, K'Aswati, K'Muli,** and all of The

UPT's Geng serta adik-adik angkatan **'02, '03, '04, '05** dan segenap pengurus HIMATIKA FMIPA Unhas.

Semoga segala bantuannya dapat bernilai ibadah dan mendapat kemuliaan serta balasan dari Allah SWT. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Wassalaamu Alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Makassar, Desember 2005

Penulis

ABSTRAK

Dalam skripsi ini diberikan cara penyelesaian sistem persamaan polinomial (SPP) dalam variabel x_1 , x_2 , ... , x_n dengan melakukan perhitungan-perhitungan matriks polinomial $M(x_1)$ yang bersesuaian dengan sistem persamaan polinomial yang diberikan. Determinan dari matriks $M(x_1)$ bersesuaian dengan resultan multipolinomial $R(x_1)$ dari SPP yang diberikan. Resultan $R(x_1)$ diperoleh setelah mengeliminasi n-1 variabel selain variabel x_1 . Penguraian matriks polinomial $M(x_1)$ menjadi persamaan polinomial dalam variabel x_1 dengan koefisien-koefisien variabel berupa matriks numerik, dapat membentuk sebuah matriks numerik C.
Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks C digunakan untuk memperoleh solusi (x_1 , x_2 , ... , x_n).

Dalam skripsi ini ditunjukkan bagaimana bentuk persamaan polinomial $M(x_1)$ dan bentuk matriks C yang dihasilkan dari sistem persamaan polinomial berderajat satu dan berderajat dua, yang terdiri dari 2 persamaan dengan 2 variabel maupun 3 persamaan dengan 3 variabel, dan bagaimana solusi real yang diperoleh untuk SPP berderajat satu dan SPP berderajat dua.

ABSTRACT

In this skripsi is given the way of the solving system of polynomial equations (SPP) in variables x_1 , x_2 , ... , x_n by doing computations of matrix polynomial $M(x_1)$ that corresponds to the given system of polynomial equations. Determinant of matrix $M(x_1)$ corresponds to multipolynomial resultant $R(x_1)$ from the given system of polynomial equations. The resultant $R(x_1)$ obtained after eliminating $n-1$ variables of beside variable x_1 . Decompositions of matrix polynomial $M(x_1)$ becoming a polynomial equation in variable x_1 with the coefficients of variable in the form of numeric matrix, can form a numeric matrix C.
Computations of eigenvalues and eigenvectors from the matrix C used to obtain solutions (x_1 , x_2 , ... , x_n).

In this skripsi is given performance of form of polynomial equation $M(x_1)$ and form of matrix C yielded from system of polynomial equations of degree of one and degree of two, consisted of 2 equations by 2 variables and 3 equations by 3 variables, *and how real solutions obtained from SPP with degree of one and degree of two.*

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam ilmu aljabar telah dikenal Sistem Persamaan Linier yang disingkat SPL. SPL terdiri dari beberapa persamaan linier. SPL sudah dikenal secara umum, bahkan sudah dianggap termasuk dasar dari ilmu aljabar linier. Jika ilmu aljabar ditinjau lebih jauh, terdapat bentuk sistem persamaan lain yang jarang diperoleh dan pemecahannya tidak semudah dengan pemecahan SPL. Sistem yang dimaksud adalah Sistem Persamaan Polinomial yang disingkat dengan SPP.

Sistem Persamaan Polinomial terdiri dari beberapa persamaan polinomial. Dalam hal ini diberikan sebuah sistem dari *n* persamaan polinomial.

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

dengan derajat masing-masing persamaan adalah $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Resultan Multipolinomial dari Sistem Persamaan Polinomial di atas digunakan untuk menyederhanakan sistem dari *n* variabel menjadi satu variabel. Resultan dapat dinyatakan sebagai determinan dari sebuah matriks tunggal yang bersesuaian dengan SPP yang diberikan. Matriks tunggal ini adalah matriks polinomial yang entri-entrinya merupakan fungsi polinomial dalam satu variabel yang sama dengan variabel resultan.

Menyelesaikan sistem persamaan polinomial bukanlah hal yang sangat mudah. Oleh karena itu penulis akan menganalisis cara penyelesaiannya dalam tulisan ini sebagai tugas akhir dengan judul

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penulisan ini adalah bagaimana penyelesaian suatu sistem persamaan polinomial dengan berdasar pada resultan multipolinomial dan perhitungan matriks.

C. Batasan Masalah

1. Pada contoh, SPP dibatasi sampai $n = 3$ yang berarti 3 persamaan dengan 3 variabel, dan derajat dari SPP dibatasi sampai pada derajat 2 dengan setiap suku pada persamaan terdiri dari satu macam variabel
2. Resultan multipolinomial dan matriks tunggal dari SPP dibatasi dalam variabel atau peubah x_1. Jadi resultan dan matriks polinomial yang dicari adalah $R(x_1)$ dan $M(x_1)$
3. Solusi yang dicari dibatasi pada solusi bernilai real.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mendapatkan solusi atau pemecahan dari sistem persamaan polinomial dengan menggunakan resultan multipolinomial dan perhitungan matriks.

E. Manfaat Penulisan

- Memudahkan penyelesaian Sistem Persamaan Polinomial yang masih dianggap rumit hingga memperoleh solusinya
- Sebagai referensi bagi mahasiswa yang ingin mengembangkan atau melanjutkan skripsi ini
- Sumbangan karya ilmiah Jurusan Matematika FMIPA Unhas.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Resultan

Resultan digunakan untuk menyederhanakan sistem persamaan polinomial, diperoleh dengan mengeliminasi suatu himpunan variabel dari SPP yang diberikan. Misalkan diberikan SPP yang terdiri dari *n* persamaan dengan *n* variabel. *n*-1 variabel dari persamaan-persamaan dalam SPP dieliminasi hingga menghasilkan satu persamaan polinomial dalam satu variabel. Resultan ini juga dapat dinyatakan sebagai determinan dari sebuah matriks tunggal yang bersesuaian dengan SPP yang diberikan. (Dinesh Manocha, 1994)

B. Matriks

Sebuah matriks A dapat ditulis dalam bentuk sederhana sebagai $A = \left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$ matriks atau $A = \left[a_{i,j}\right]$ dimana $a_{i,j}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ melambangkan elemen dari yang berada pada perpotongan dari baris ke-i kolom ke-j dari A

Tinjau matriks $m \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$

$$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

terbentuk dari baris-baris A yang dinamakan *vektor-vektor baris A*, dan vektor-vektor

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

yang terbentuk dari kolom-kolom A yang dinamakan *vektor-vektor kolom A*.

Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen real dilambangkan dengan $\Re^{m \times n}$. Sama halnya dengan $C^{m \times n}$ yang melambangkan himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen kompleks.

Sedangkan $\Re^{m \times 1}$ dan $C^{m \times 1}$ melambangan himpunan semua matriks kolom real dan kopleks dengan panjang m, yang berturut-turut biasa ditulis $\Re^{m}$ dan C^{m}.

Jika jumlah baris dari suatu matriks sama dengan jumlah kolomnya, yaitu $m = n$, maka matriks tersebut adalah *matriks kuadrat berorde n (square matrix of order n)*. Jenis matriks kuadrat yang paling penting adalah *matriks identitas* yaitu matriks yang keseluruhan diagonal utamanya adalah bilangan satu sedangkan elemen yang lainnya adalah bilangan nol. Matriks identitas biasa dilambangkan I yang memenuhi persamaan $AI = IA = A$ untuk setiap matriks berukuran $n \times n$.

(Lancaster, Peter, Miron Tismenetsky, 1985)

C. Matriks Polinomial

Misalkan diberikan sebuah matriks polinomial dalam variabel x_1, maka dapat ditulis dalam bentuk

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2 + \dots + M_k x_1^k$$

dimana M_i adalah matriks numerik dan k adalah derajat maksimum dari x_1. Untuk setiap M_i memiliki orde yang sama, dengan kata lain M_i merupakan matriks kuadrat. Determinan dari $M(x_1)$ bersesuaian dengan resultan dari persamaan polinomial yang diberikan.

(Dinesh Manocha, 1994)

D. Determinan

Permutasi himpunan bilangan bulat { 1, 2, 3, ... , n } adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan { 1, 2, 3, ... , n }, maka akan dituliskan $\{j_1, j_2, j_3, \dots, j_n\}$. Disini, j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasian, j_2 adalah bilangan kedua dan seterusnya. Sebuah *invers* dikatakan terjadi dalam permutasi $\{j_1, j_2, j_3, \dots, j_n\}$ jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Sebuah permutasi dinamakan *genap* jika jumlah invers elemen seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap, dan dinamakan *ganjil* jika jumlah invers elemen seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Misalkan A adalah matriks berorde n x n, maka hasil kali elementer dari matriks A adalah setiap hasil kali n entri A, sedangkan dua di antaranya tidak boleh berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama. Jumlah keseluruhan hasil kali elementernya adalah $n!$. Hasil kali elementer tersebut adalah hasil kali yang berbentuk $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ dimana $\{ j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \}$ adalah permutasi himpunan $\{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$. Yang diartikan hasil kali elementer bertanda A adalah hasil kali elementer $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 atau -1. Digunakan tanda + jika $\{ j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \}$ adalah permutasi genap dan tanda − jika $\{ j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n \}$ adalah permutasi ganjil.

***Definisi* :**

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, $\det : M^{nxn} \rightarrow \Re$, M^{nxn} adalah himpunan matriks berordo n x n. Dimana det (A) didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elemeter bertanda dari A. Jumlah det (A) kita namakan *determinan* dari A.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks adalah metode *Ekspansi Kofaktor*

***Definisi* :**

Jika A adalah matriks kuadrat, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkannya, yakni untuk setiap $1 \leq i \leq n$ *dan* $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i)

(Howard Anton, 1998)

E. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

***Definisi* :**

Jika A adalah matriks yang berukuran n x n, maka vektor kolom tak nol X di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika AX adalah kelipatan skalar dari X, yakni

$$AX = \lambda X$$

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan X dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A berukuran n x n, persamaan $AX = \lambda X$ dapat ditulis sebagai $AX = \lambda IX$

atau secara ekivalen

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Sistem persamaan linier homogen mempunyai penyelesaiaan yang tak trivial (tak nol). Jika hanya jika determinan dari matriks koefisien sama dengan nol

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinan ini adalah suatu polinomial dalam λ suku berderajat tertinggi dalam λ pada polinomial ini berasal dari hasil kali unsur-unsur diagonal.

Jadi $(-\lambda)^n$ adalah suku berderajat tertinggi sehingga

$$\det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + b_1(-\lambda) + b_0 = 0$$

Persamaan diatas adalah polinomial dalam λ yang berderajat n dengan sebanyak n akar. Akar-akarnya dapat berupa bilangan real, kompleks, bahkan ada yang bernilai nol. Akar-akar persamaan diatas disebut akar karakteristik atau nilai eigen dari A.

Setelah nilai eigen diperoleh, maka masalah berikutnya adalah menentukan vektor eigen. Vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol X yang memenuhi $AX = \lambda X$. Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah $(A - \lambda I)\,X = 0$. Ruang pemecahan ini disebut sebagai ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

(Howard Anton, 1998)

BAB III

MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Diberikan sebuah sistem dari n persamaan polinomial dimana n tidak diketahui dan koefisien-koefisien dari multivariat adalah konstanta numerik.

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Misalkan derajat dari masing-masing persamaan multivariat tersebut adalah $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Untuk menyederhanakan sistem persamaan polinomial (SPP) yang telah diberikan dibuat resultan multipolinomial dalam satu variabel, misalkan variabel x_1. Jadi resultan multipolinomial yang dibuat adalah $R(x_1)$, diperoleh dengan cara mengeliminasi n-1 variabel selain x_1, yaitu variabel $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Resultan $R(x_1)$ merupakan persamaan polinomial dalam x_1 dan akar-akarnya bersesuaian dengan koordinat x_1 dari setiap solusi persamaan polinomial multivariat yang diberikan.

Formulasi resultan multipolinomial juga bersesuaian dengan determinan dari sebuah matriks polinomial yang berasal dari SPP yang semula. Karena resultan yang dibuat dari SPP adalah fungsi polinomial dalam variabel x_1, maka matriks polinomial dari SPP tersebut adalah matriks yang entri-entrinya juga merupakan fungsi polinomial dalam variabel x_1 .

Untuk memperoleh matriks polinomial, maka sistem persamaan polinomial direduksi ke dalam bentuk

$$M(x_1)\,\mathrm{v} = 0 \qquad\qquad (*)$$

$M(x_1)$ adalah matriks kuadrat yang ukurannya bergantung pada banyaknya entri-entri dari vektor v, dimana entri-entri dari v adalah kombinasi variabel-variabel selain x_1 mulai dari berderajat nol sampai derajat tertinggi dari SPP ditambah satu (kecuali pada SPP berderajat satu, variabel dalam vektor v hanya sampai berderajat satu), sedangkan 0 adalah vektor nol yang ukurannya sama dengan vektor v.

Matriks polinomial $\mathrm{M}(x_1)$ dapat diuraikan ke dalam bentuk

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2 + \dots + M_k x_1^k$$

M_i dimana $i = 0, 1, 2, \dots, k$ adalah matriks-matriks numerik dan k merupakan derajat maksimum dari variabel x_1 dalam matriks polinomial $\mathrm{M}(x_1)$.

Masalah mencari akar-akar determinan matriks polinomial $\mathrm{M}(x_1)$ dapat direduksi menjadi masalah nilai eigen. Dalam kasus ini, jika setelah penguraian matriks tunggal $\mathrm{M}(x_1)$ menjadi bentuk persamaan polinomial dalam variabel x_1 dengan koefisien-koefisien variabel berbentuk matriks M_i dimana $i = 0, 1, 2, \dots, k$, dan diperoleh matriks pemuka (matriks koefisien dari variabel x_1 yang berderajat tertinggi) M_k yang singular, maka dilakukan transformasi linier $x_1 = 1/y$.

Jadi bentuk matriks polinomial adalah

$$M(y) = M_0 + M_1\frac{1}{y} + M_2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \dots + M_k\left(\frac{1}{y}\right)^k$$

Dari matriks M_i tersebut dapat dibentuk sebuah matriks C. Akar-akar determinan matriks polinomial $M(x_1)$ berkorespondensi dengan nilai-nilai eigen matriks C, dimana

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -M_0^{-1}M_k & -M_0^{-1}M_{k-1} & \cdots & -M_0^{-1}M_1 \end{bmatrix}$$

0 dan I masing-masing adalah matriks nol dan matriks identitas

dan selanjutnya dicari nilai-nilai eigennya yang bersesuaian dengan solusi untuk nilai x_1 . Nilai-nilai eigen matriks C merupakan nilai y . Selanjutnya nilai eigen disubtitusi kembali pada $x_1 = 1 / y$, maka diperoleh nilai-nilai x_1 yang merupakan akar-akar dari determinan matriks polinomial $M(x_1)$ atau akar-akar dari resultan multipolinomial $R(x_1)$.

Selanjutnya nilai x_2, x_3, ... , x_n diperoleh dari vektor eigen matriks C yang memenuhi

$$(C - \lambda I)\,V = 0$$

dimana λ adalah nilai eigen tak nol dari matriks C dan V vektor eigen C yang memenuhi $V = [v \quad \lambda v \quad \lambda^2 v \quad \cdots \quad \lambda^{k-1} v]^t$

dan v dalam vektor eigen V adalah vektor eigen dari matriks $M(x_1)$ yang memenuhi persamaan (*).

Berikut ini diberikan lebih jelas penyelesaian sistem persamaan polinomial dalam bentuk umum.

Untuk SPP dengan 2 persamaan polinomial berderajat 1

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad F_1$$
$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad F_2$$

Dari persamaan F_2

$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$$
$$b_2 x_2 = -b_0 - b_1 x_1$$
$$x_2 = \frac{-b_0 - b_1 x_1}{b_2}$$

Perolehan nilai x_2 disubstitusi kepersamaan F_1 , maka

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2\left(\frac{-b_0 - b_1 x_1}{b_2}\right) = 0$$
$$a_0 + a_1 x_1 - \frac{a_2 b_0}{b_2} - \frac{a_2 b_1}{b_2} x_1 = 0$$
$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + \left(a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}\right) x_1 = 0$$

Jadi diperoleh resultan multipolinomial R(x_1)

$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + \left(a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}\right) x_1 = 0$$

R(x_1) bersesuaian dengan determinan dari matriks polinomial M(x_1)

$$R(x_1) = det\,(M(x_1))$$

dimana $M(x_1)$ reduksi dari sistem persamaan polinomial yang telah diberikan

$$M(x_1)\, v = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1x_1 & a_2 \\ b_0 + b_1x_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{aligned} \det(M(x_1)) = (a_0 + a_1x_1)\,b_2 - a_2(b_0 + b_1x_1) &= 0 \\ a_0b_2 + a_1b_2x_1 - a_2b_0 - a_2b_1x_1 &= 0 \\ a_0b_2 - a_2b_0 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_1 &= 0 \end{aligned}$$

kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{b_2}$, maka

$$a_0 - \frac{a_2b_0}{b_2} + \left(a_1 - \frac{a_2b_1}{b_2}\right)x_1 = 0$$

Jadi terbukti bahwa $R(x_1) = det\ (M(x_1))$

Selanjutnya matriks $M(x_1)$ diuraikan menjadi

$$M(x_1) = M_0 + M_1\,x_1$$

$$M(x_1) = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} x_1$$

Diperoleh matriks pemuka M_1 singular, maka dilakukan transformasi linear $x_1 = 1/y$ sehingga bentuk penguraian matriks menjadi

$$M(y) = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{y}$$

Dari M_0 dan M_1 dibentuk sebuah matriks numerik C

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}M_2 & -M_0^{-1}M_1 \end{bmatrix}$$

dimana 0 dan I masing-masing adalah matriks nol dan matriks identitas.

Untuk matriks $-M_0^{-1}M_2$ dianggap matriks nol karena tidak terdapat M_2. Selanjutnya dicari matriks $-M_0^{-1}M_1$.

$$-M_0^{-1} = \frac{-1}{\det M_0}\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_0 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$-M_0^{-1} = \frac{-1}{a_0b_2 - a_2b_0}\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_0 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$-M_0^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-b_2}{a_0b_2 - a_2b_0} & \dfrac{a_2}{a_0b_2 - a_2b_0} \\ \dfrac{b_0}{a_0b_2 - a_2b_0} & \dfrac{-a_0}{a_0b_2 - a_2b_0} \end{bmatrix}$$

maka

$$-M_0^{-1}M_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-b_2}{a_0b_2 - a_2b_0} & \dfrac{a_2}{a_0b_2 - a_2b_0} \\ \dfrac{b_0}{a_0b_2 - a_2b_0} & \dfrac{-a_0}{a_0b_2 - a_2b_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-M_0^{-1}M_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \\ \dfrac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \end{bmatrix}$$

jadi matriks C yang dihasilkan adalah

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks C

$$\det\,(\lambda I - C) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - \left(\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_0b_2 - a_2b_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_0b_2 - a_2b_0} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Untuk determinan matriks di atas dapat dihitung salah satunya dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom keempat, maka determinannya adalah

$$\det\,(\lambda I - C) = 0.c_{14} + (-1).c_{24} + 0.c_{34} + \lambda.c_{44} = 0$$
$$(-1).c_{24} + \lambda.c_{44} = 0$$

$$(-1).(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-\left(\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right) \\ 0 & 0 & \dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{a_0b_2-a_2b_0} \end{vmatrix} + \lambda.(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\left(\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1).(1).0+\lambda.1\left(\lambda^2\left(\lambda-\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)\right)\right)=0$$

$$\lambda\left(\lambda^2\left(\lambda-\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)\right)\right)=0$$

$$\lambda^4-\lambda^3\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)=0$$

$$\lambda^3\left(\lambda-\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)\right)=0$$

maka

$$\lambda^3=0 \quad dan \quad \lambda=\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)$$

Jadi nilai eigen dari matriks C yang digunakan adalah

$$\lambda=\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right) \quad atau \quad y=\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)$$

Nilai y disubstitusi ke persamaan $x_1 = 1/y$, sehingga diperoleh solusi untuk x_1

$$x_1=\frac{1}{\left(\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_0b_2-a_2b_0}\right)} \quad jadi \quad x_1=\frac{a_0b_2-a_2b_0}{a_2b_1-a_1b_2}$$

Akan dibuktikan x_1 memenuhi $R(x_1)$, x_1 disubstitusi ke persamaan $R(x_1)$

$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + \left(a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}\right) x_1 = 0$$

$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + \left(a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2}\right)\left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\right) = 0$$

$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} + \frac{a_0 a_1 b_2 - a_1 a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} - \left(\frac{a_0 a_2 b_1 b_2 - a_2^2 b_0 b_1}{b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}\right) = 0$$

Kedua ruas dikalikan dengan $b_2(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ sehingga diperoleh

$$a_0 a_2 b_1 b_2 - a_0 a_1 b_2^2 - a_2^2 b_0 b_1 + a_1 a_2 b_0 b_2 + a_0 a_1 b_2^2 - a_1 a_2 b_0 b_2 - a_0 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_0 b_1 = 0$$

$$(a_0 a_2 b_1 b_2 - a_0 a_2 b_1 b_2) + (-a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_1 b_2^2) + (-a_2^2 b_0 b_1 + a_2^2 b_0 b_1) +$$

$$(a_1 a_2 b_0 b_2 - a_1 a_2 b_0 b_2) = 0$$

$$0 = 0$$

Jadi terbukti benar bahwa solusi untuk x_1 adalah

$$x_1 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

Untuk solusi x_2 diperoleh dari vektor eigen matriks C yaitu V yang memenuhi

$$V = [v \quad \lambda v \quad \lambda^2 v \quad \cdots \quad \lambda^{k-1} v]^t$$

dimana v adalah vektor eigen dari matriks polinomial $M(x_1)$.

Jadi vektor eigen V dari matriks C untuk SPP yang diberikan berbentuk

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_0 b_2 - a_2 b_0} & \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_0 b_2 - a_2 b_0} x_2 \end{bmatrix}'$$

Dari vektor eigen di atas dapat diperoleh solusi untuk x_2. Karena SPP ini diberikan dalam bentuk umum, maka vektor eigen dari matriks C sulit untuk diperoleh. Jadi perhitungan vektor eigen matriks C untuk memperoleh solusi $x_2, x_3, \ldots, x_n$ dapat dilihat pada bab IV. Demikian pula untuk contoh SPP berderajat 2 baik untuk SPP dengan 2 persamaan polinomial maupun untuk SPP dengan 3 persamaan polinomial, dapat dilihat pada bab IV yang memberikan contoh aplikasi penyelesaian sistem persamaan polinomial dalam bilangan real.

BAB IV

CONTOH APLIKASI PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL BERDASARKAN RESULTAN MULTIPOLINOMIAL DAN PERHITUNGAN MATRIKS

Diberikan sebuah sistem dari 2 persamaan polinomial berderajat 1 dengan bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 1 = 0 & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ F_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2 = 0 & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ F_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Dari SPP di atas dibuat resultan multipolinomial $R(x_1)$ dengan mengeliminasi variabel x_2

Dari persamaan F_2 diperoleh

$$3x_2 = 2 - 2x_1$$

$$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_1$$

x_2 disubtitusi ke persamaan F_1 , sehingga F_1 menjadi

$$x_1 + 2\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_1\right) + 1 = 0$$

$$x_1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_1 + 1 = 0$$

kedua ruas dikali 3, maka

$$3x_1 + 4 - 4x_1 + 3 = 0$$

$$-x_1 + 7 = 0$$

diperoleh resultan multipolinomial $R(x_1)$

$$-x_1 + 7 = 0$$

SPP yang telah diberikan direduksi kedalam bentuk

$$(x_1)\, v = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1+1 & 2 \\ 2x_1-2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks polinomial dari SPP yang telah diberikan adalah

$$M(x_1) = \begin{bmatrix} x_1+1 & 2 \\ 2x_1-2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks $M(x_1)$ bersesuaian dengan resultan multipolinomial $R(x_1)$

$$\begin{aligned} \det(M(x_1)) &= \begin{vmatrix} x_1+1 & 2 \\ 2x_1-2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(x_1+1) - 2(2x_1-2) \\ &= 3x_1 + 3 - 4x_1 + 4 \\ &= -x_1 + 7 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\det(M(x_1))$ bersesuaian dengan $R(x_1)$

Selanjutnya matriks $M(x_1)$ diuraikan menjadi

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1$$

$$M(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x_1$$

Diperoleh matriks pemuka M_1 singular, maka dilakukan transformasi linier $x_1 = 1/y$

sehingga bentuk penguraian matriks menjadi

$$M(y)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{y}$$

Dari matriks M_0 dan M_1 di atas dibentuk matriks C

$$C=\begin{bmatrix}0 & I\\ -M_0^{-1}M_2 & -M_0^{-1}M_1\end{bmatrix}$$

dimana 0 dan I masing-masing adalah matriks nol dan matriks identitas

Matriks yang dihasilkan oleh $-M_0^{-1}M_2$ adalah matriks nol karena tidak terdapat matriks M_2 sehingga matriks M_2 dianggap matriks nol. Jadi matriks C yang terbentuk adalah

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0\end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks C dengan persamaan karakteristik matriks C memenuhi $\det(C-\lambda I)=0$

$$\det\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

Jadi persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks C adalah

$$\lambda^4 - \frac{1}{7}\lambda^3 = 0$$

Nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah λ = 0 dan λ = 1/7, tetapi nilai eigen yang diperlukan adalah nilai eigen yang tidak nol yaitu λ = 1/7. Nilai eigen yang diperoleh merupakan nilai y karena dihasilkan dari matriks C yang terbentuk dari matriks polinomial $M(y)$.

Untuk memperoleh solusi untuk nilai x_1, nilai eigen λ = 1/7 atau y = 1/7 disubtitusi kembali ke $y = 1/x_1$ atau $x_1 = 1/y$, maka diperoleh $x_1 = 7$.

Untuk memperoleh nilai x_2, nilai x_1 dapat langsung disubtitusi kepersamaan F_1

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 1 &= 0 \\ 7 + 2x_2 + 1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{-1-7}{2} \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Tapi jika mengikuti langkah-langkah penyelesaian SPP seperti pada bab sebelumnya, maka nilai x_2 diperoleh dengan cara sebagai berikut

Dicari vektor eigen dari matriks C yang bersesuaian dengan λ= 1/7 atau λ= 0.142857142857143, sehingga diperoleh vektor eigen

$$V^* = [\,0.240098019199512 \quad -0.960392076798 05 \quad 0.0342997170285018 \quad -0.137198868114007]'$$

Vektor eigen diatas bersesuaian dengan

$$V = [1 \quad x_2 \quad \lambda \quad \lambda x_2]'$$

$$V = [1 \quad x_2 \quad 0.142857142857143 \quad 0.142857142857143\, x_2\,]'$$

maka vektor eigen V^* dibagi dengan 0.240098019199512 , sehingga diperoleh

$$V = [1 \quad -4 \quad 0.142857142857143 \quad -0.571428571428572]'$$

Jadi dapat dilihat bahwa $x_2 = -4$

Jadi solusi SPP (*) adalah $(x_1, x_2) = (7, -4)$

Uji solusi pada Sistem Persamaan Polinomial yang diberikan

Untuk persamaan F_1

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 1 &= 0 \\ 7 + 2(-4) + 1 &= 0 \\ 7 - 8 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa solusi memenuhi persamaan F_1

Untuk persamaan F_2

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2 &= 0 \\ 2(7) + 3(-4) - 2 &= 0 \\ 14 - 12 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa solusi memenuhi persamaan F_2

Diberikan sebuah sistem dari 2 persamaan polinomial dengan derajat maksimum dari SPP adalah 2, dengan bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2 &= 0 \qquad \text{..................} F_1 \\ x_1^2 + 3x_2^2 - 4 &= 0 \qquad \text{..................} F_2 \end{aligned} \qquad (**)$$

Dari SPP di atas dibuat resultan multipolinomial R(x_1) dengan mengeliminasi variabel x_2

Dari persamaan F_1 diperoleh

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1$$

maka

$$x_2^2 = \left(1 - \frac{1}{2}x_1\right)^2$$

$$x_2^2 = 1 - x_1 + \frac{1}{4}x_1^2$$

x_2^2 disubtitusi ke persamaan F_2, sehingga F_2 menjadi

$$x_1^2 + 3\left(1 - x_1 + \frac{1}{4}x_1^2\right) - 4 = 0$$

$$x_1^2 + 3 - 3x_1 + \frac{3}{4}x_1^2 - 4 = 0$$

$$\frac{7}{4}x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0$$

$$7x_1^2 - 12x_1 - 4 = 0$$

diperoleh resultan multipolinomial R(x_1)

$$7x_1^2 - 12x_1 - 4 = 0$$

SPP yang telah diberikan direduksi kedalam bentuk

$$M(x_1)\,v = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1-2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1-2 & 2 & 0 \\ x_1^2-4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & x_1^2-4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi matriks polinomial dari SPP yang telah diberikan adalah

$$M\,(x_1) = \begin{bmatrix} x_1-2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1-2 & 2 & 0 \\ x_1^2-4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & x_1^2-4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks $M(x_1)$ bersesuaian dengan resultan multipolinomial $R(x_1)$

Perhitungan determinan matriks $M(x_1)$ dapat dilakukan dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke 4

$$\det(M(x_1)) = (-1)^{4+4}\,3\begin{vmatrix} x_1-2 & 2 & 0 \\ 0 & x_1-2 & 2 \\ x_1^2-4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(M(x_1)) = 3\left|\begin{array}{ccccc} \overset{+}{x_1-2} & \overset{+}{2} & \overset{+}{0} & x_1-2 & 2 \\ 0 & x_1-2 & 2 & 0 & x_1-2 \\ \underset{-}{x_1^2-4} & \underset{-}{0} & \underset{-}{3} & x_1^2-4 & 0 \end{array}\right| = 0$$

$$\begin{aligned} \det(M(x_1)) = 4\left(3(x_1-2)^2 + 4(x_1^2-4)\right) &= 0 \\ 3(x_1-2)^2 + 4(x_1^2-4) &= 0 \\ 3(x_1^2-4x_1+4) + 4x_1^2 - 16 &= 0 \\ 3x_1^2 - 12x_1 + 12 + 4x_1^2 - 16 &= 0 \\ 7x_1^2 - 12x_1 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa det($M(x_i)$) bersesuaian dengan $R(x_i)$

Selanjutnya matriks $M(x_i)$ diuraikan menjadi

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2$$

$$M(x_1) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1^2$$

diperoleh matriks pemuka M_2 singular, maka dilakukan transformasi linier $x_1 = 1/y$

sehingga bentuk penguraian matriks menjadi

$$M(y) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

Dari matriks M_0, M_1 dan M_2 di atas dibentuk matriks C

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1} M_2 & -M_0^{-1} M_1 \end{bmatrix}$$

dimana 0 dan I masing-masing adalah matriks nol dan matriks identitas.

Pada kasus ini perhitungan matriks C menggunakan program matlab, dimana matriks C yang diperoleh adalah

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks C ini diperoleh dua nilai eigen yang tidak nol, yaitu $\lambda_1 = 1/2$ dan $\lambda_2 = -7/2$. Nilai-nilai eigen tersebut merupakan nilai y karena dihasilkan dari matriks C yang terbentuk dari matriks polinomial $M(y)$. Selanjutnya akan dicari solusi SPP (x_1 , x_2).

- Untuk $\lambda_1 = 1/2$ atau $y = 1/2$

  x_1 diperoleh dengan mensubtitusi nilai $y = 1/2$ ke persamaan $x_1 = 1/y$, maka diperoleh $x_1 = 2$. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai x_2 dicari vektor eigen matriks C yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1/2$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} V^* = [&0.894427190999916 \quad -7.375920305973340e-017 \quad -1.180147248955730e-015 \\ &-1.671875269353960e-015 \quad 0.447213595499958 \quad -3.687960152986670e-017 \\ &-5.900736244778670e-016 \quad -8.359376346769780e-016]' \end{aligned}$$

Vektor eigen diatas bersesuaian dengan

$$V = [1 \quad x_2 \quad x_2^2 \quad x_2^3 \quad \lambda_1 \quad \lambda_1 x_2 \quad \lambda_1 x_2^2 \quad \lambda_1 x_2^3]'$$
$$V = [1 \quad x_2 \quad x_2^2 \quad x_2^3 \quad 0.5 \quad 0.5x_2 \quad 0.5x_2^2 \quad 0.5x_2^3]'$$

maka vektor eigen V^* dibagi dengan 0.894427190999916, sehingga diperoleh

$V = [\ 1 \quad -8.24652960038872e-017 \quad -1.31944473606219e-015$
$-1.86921337608811e-015 \quad 0.5 \quad -4.12326480019436e-017$
$-6.59722368031097e-016 \quad -9.34606688044054e-016\ ]'$

atau

$$V = [\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]'$$

Dapat dilihat bahwa $x_2 = 0$.

Jadi solusi untuk $\lambda_1 = 1/2$ adalah $(x_1, x_2) = (2,0)$

- Untuk $\lambda_2 = -7/2$ atau $y = -7/2$

x_1 diperoleh dengan mensubtitusi nilai $y = -7/2$ ke persamaan $x_1 = 1/y$, maka diperoleh $x_1 = -2/7$. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai x_2 dicari vektor eigen matriks C yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = -7/2$ dan diperoleh

$V^* = [\ 0.109974127670844 \quad 0.125684717338107 \quad 0.143639676957837$
$0.164159630808956 \quad -0.384909446847953 \quad -0.439896510683375$
$-0.502738869352429 \quad -0.574558707831347\ ]'$

Vektor eigen diatas bersesuaian dengan

$$V = [1 \;\; x_2 \;\; x_2^2 \;\; x_2^3 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_2 x_2 \;\; \lambda_2 x_2^2 \;\; \lambda_2 x_2^3]'$$
$$V = [1 \;\; x_2 \;\; x_2^2 \;\; x_2^3 \;\; -3.5 \;\; -3.5x_2 \;\; -3.5x_2^2 \;\; -3.5x_2^3]'$$

maka vektor eigen V^* dibagi dengan 0.109974127670844, sehingga diperoleh

$V = [\ 1 \quad 1.14285714285714 \quad 1.30612244897959 \quad 1.49271137026238$
$-3.49999999999999 \quad -3.99999999999999 \quad -4.57142857142857$
$-5.22448979591836\ ]'$

atau

$V = [\,1 \quad 1.14285714285714 \quad 1.30612244897959 \quad 1.49271137026238$
$\quad -3.5 \quad -4 \quad -4.57142857142857 \quad -5.22448979591836\,]'$

Dapat dilihat bahwa x_2= 1.14285714285714 atau x_2= 8/7. Jadi solusi untuk

$\lambda_2 = -7/2$ adalah (x_1, x_2) = (-2/7 , 8/7)

Jadi solusi real untuk SPP (**) ada dua yaitu

$$(x_1, x_2) = (2{,}0) \quad dan \quad (x_1, x_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

Uji solusi pada Sistem Persamaan Polinomial yang diberikan

Solusi $(x_1, x_2) = (2{,}0)$ *dan* $(x_1, x_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)$

Untuk persamaan F_1

Untuk solusi $(x_1, x_2) = (2{,}0)$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2 &= 0 \\ 2 + 2(0) - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa solusi pertama memenuhi persamaan F_1

Untuk Solusi $(x_1, x_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2 &= 0 \\ -\frac{2}{7} + 2\left(\frac{8}{7}\right) - 2 &= 0 \\ -\frac{2}{7} + \frac{16}{7} - \frac{14}{7} &= 0 \\ \frac{-2 + 16 - 14}{7} &= 0 \\ \frac{0}{7} &= 0 \qquad maka \qquad 0 = 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa solusi kedua memenuhi persamaan F_1

Untuk persamaan F_2

Untuk solusi $(x_1, x_2) = (2,0)$

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 4 = 0$$
$$(2)^2 + 3(0)^2 - 4 = 0$$
$$4 + 0 - 4 = 0$$
$$0 = 0$$

Terbukti bahwa solusi pertama memenuhi persamaan F_2

Untuk Solusi $(x_1, x_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)$

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 4 = 0$$
$$\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{8}{7}\right)^2 - 4 = 0$$
$$\frac{4}{49} + 3\left(\frac{64}{49}\right) - \frac{196}{49} = 0$$
$$\frac{4 + 192 - 196}{49} = 0$$
$$\frac{0}{49} = 0$$
$$0 = 0$$

Terbukti bahwa solusi kedua memenuhi persamaan F_2

Diberikan sebuah sistem dari 3 persamaan polinomial dengan derajat maksimum dari SPP adalah 2, dengan bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}(1.6e-3)x_1^2+(1.6e-3)x_2^2-1=0 &\qquad \text{.........} \ F_1\\ (5.3e-4)x_1^2+(5.3e-4)x_2^2+(5.3e-4)x_3^2+(2.7e-2)x_1-1=0 &\qquad \text{.........} \ F_2 \quad (***)\\ (-1.4e-4)x_1+(1.0e-4)x_2+x_3-3.4e-3=0 &\qquad \text{.........} \ F_3\end{aligned}$$

Dari SPP di atas dibuat resultan multipolinomial R(x_1) dengan mengeliminasi variabel x_2 dan x_3

Dari persamaan F_1 diperoleh

$$x_2^2=\frac{1-(1.6e-3)x_1^2}{(1.6e-3)}$$

$$x_2^2=625-x_1^2$$

$$x_2=\left(625-x_1^2\right)^{1/2}$$

x_2^2 disubtitusi ke persamaan F_2, sehingga diperoleh

$$(5.3e-4)x_1^2+(5.3e-4)(625-x_1^2)+(5.3e-4)x_3^2+(2.7e-2)x_1-1=0$$

$$x_3^2=\frac{1-(5.3e-4)x_1^2-(5.3e-4)(625-x_1^2)-(2.7e-2)x_1}{5.3e-4}$$

$$x_3^2=\frac{1}{5.3e-4}-x_1^2-(625-x_1^2)-\frac{(2.7e-2)}{5.3e-4}x_1$$

$$x_3^2=\frac{1}{5.3e-4}-625-\frac{(2.7e-2)}{5.3e-4}x_1$$

$$x_3^2=\frac{0.66875-(2.7e-2)x_1}{5.3e-4}$$

$$x_3^2 = 1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1$$
$$x_3 = (1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1)^{1/2}$$

x_2 dan x_3 disubtitusi ke persamaan F_3 , sehingga F_3 menjadi

$$(-1.4e-4)x_1 + (1.0e-4)(625 - x_1^2)^{1/2} + (1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1)^{1/2}$$
$$-3.4e-3 = 0$$
$$(1.0e-4)(625 - x_1^2)^{1/2} + (1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1)^{1/2} =$$
$$3.4e-3 + (1.4e-4)x_1$$

kedua ruas dipangkat duakan sehingga

untuk persamaan di ruas kanan

$$(1.0e-4)^2(625 - x_1^2) + 2(1.0e-4)(625 - x_1^2)^{1/2}(1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1)^{1/2}$$
$$+ (1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1) = 0$$

$$(6.25e-6) - (1.0e-8)x_1^2 + (2.0e-4)(625 - x_1^2)^{1/2}(1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1)^{1/2}$$
$$+ (1261.79245283019 - 50.9433962264151 x_1) = 0$$

untuk persamaan di ruas kiri

$$0 = (3.4e-3 + (1.4e-4)x_1)^2$$
$$0 = (3.4e-3)^2 + 2(3.4e-3)(1.4e-4)x_1 + (1.4e-4)^2 x_1^2$$
$$0 = 1.156e-5 + (6.8e-3)(1.4e-4)x_1 + (1.4e-4)^2 x_1^2$$
$$0 = 1.156e-5 + (9.52e-7)x_1 + (1.96e-8)x_1^2$$

selanjutnya untuk ruas kanan dan kiri dari persamaan di atas menjadi

$$(2.0e-4)(625 - x_1^2)^{1/2}(1261.79245\ 283019 - 50.9433962\ 264151\ x_1)^{1/2} =$$
$$1.156e-5 + (9.52e-7)x_1 + (1.96e-8)x_1^2 - (6.25e-6) + (1.0e-8)x_1^2$$
$$-1261.79245\ 283019 + 50.9433962\ 264151\ x_1$$

$$(625 - x_1^2)^{1/2}(1261.79245\ 283019 - 50.9433962\ 264151\ x_1)^{1/2} = \frac{1}{2.0e-4}(1.156e-5$$
$$-1261.79245\ 283019 + 50.9433962\ 26415\ x_1)$$
$$+(9.52e-7)x_1 + (2.96e-8)x_1^2 - (6.25e-6)$$

$$(625-x_1^2)^{1/2}(1261.79245283019-50.9433962264151x_1)^{1/2}=0.02655+0.00476x_1$$
$$+0.000148x_1^2-6308962.26415095+254716.981132076x_1$$

$$(625-x_1^2)^{1/2}(1261.79245283019-50.9433962264151x_1)^{1/2}=0.000148x_1^2+$$
$$254715.985892076x_1-6308952.23760095$$

kedua ruas persamaan di atas dipangkat duakan sehingga menjadi

$$(625-x_1^2)(1261.79245283019-50.9433962264151x_1)=(0.000148x_1^2+$$
$$254715.985892076x_1-6308952.23760095)^2$$

$$788620.283018869-31839.6226415094x_1-1261.79245283019x_1^2+$$
$$50.9433962264151x_1^3=(2.1904e-8)x_1^4+64880233468.9723x_1^2+39802878336330$$
$$+75.3959318240545x_1^3-1867.44986232988x_1^2-3213981978293.1x_1$$

$$788620.283018869-31839.6226415094x_1-1261.79245283019x_1^2+$$
$$50.9433962264151x_1^3=(2.1904e-8)x_1^4+75.3959318240545x_1^3+$$
$$64880231601.5224x_1^2-3213981978293.1x_1$$

ruas kiri pada persamaan di atas dipindahkan ke ruas kanan sehingga diperoleh

$$(-2.1904e-8)x_1^4+(50.9433962264151-75.3959318240545)x_1^3-$$
$$(1261.79245283019+64880231601.5224)x_1^2+$$
$$(3213981978293.1-31839.6226415094)x_1+788620.283018869$$
$$-39802878336330=0$$

$$(-2.1904e-8)x_1^4-24.4525355976394x_1^3-64880232863.3149x_1^2+$$
$$3213981946453.48x_1-39802877547709.7=0$$

Maka resultan multipolinomial $R(x_1)$ dari SPP (***) adalah

$$2.1904e-8x_1^4+24.4525355976394x_1^3+64880232863.3149x_1^2-$$
$$3213981946453.48x_1+39802877547709.7=0$$

SPP (***) direduksi ke dalam bentuk

$$M(x_1)\,\mathrm{v} = 0$$

Matriks $M(x_1)$ adalah

$$\begin{bmatrix}
-1+(1.6e-3)x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1+(1.6e-3)x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1+(1.6e-3)x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 \\
(5.3e-4)x_1^2+(2.7e-2)x_1-1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 \\
0 & (5.3e-4)x_1^2+(2.7e-2)x_1-1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 \\
0 & 0 & (5.3e-4)x_1^2+(2.7e-2)x_1-1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 \\
(-1.4e-4)x_1-3.4e-3 & 1.0e-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (-1.4e-4)x_1-3.4e-3 & 0 & 1 & 1.0e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (-1.4e-4)x_1-3.4e-3 & 1.0e-4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (-1.4e-4)x_1-3.4e-3 & 0 & 0 & 1.0e-4 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

dan vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks $M(x_1)$ adalah

$$v = [1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_2x_3 \;\; x_2^2 \;\; x_2^3 \;\; x_2^2x_3 \;\; x_3^2 \;\; x_2x_3^2 \;\; x_3^3]^T$$

Selanjutnya matriks $M(x_1)$ diuraikan menjadi

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2$$

maka diperoleh

$$M_0 = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 5.3e-4 \\
-3.4e-3 & 1.0e-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.4e-3 & 0 & 1 & 1.0e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3.4e-3 & 1.0e-4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3.4e-3 & 0 & 0 & 1.0e-4 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.7e-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7e-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7e-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.4e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.4e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6e-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.3e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3e-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari penguraian matriks $M(x_i)$ diperoleh matriks pemuka M_2 yang singular, maka dilakukan transformasi linier $x_1 = 1/y$. Tetapi matriks-matriks koefisien M_0, M_1 dan M_2 tetap sama sebelum dilakukan transformasi linier $x_1 = 1/y$.

Dari matriks M_0, M_1 dan M_2 dibentuk matriks C

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}M_2 & -M_0^{-1}M_1 \end{bmatrix}$$

Perhitungan matriks C dibantu dengan menggunakan program matlab, dimana matriks C yang diperoleh adalah

C =

Columns 1 through 3

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
-7.92523371147963e-012	-2.01948391736579e-028	-4.27103441318338e-017
2.69457950397986e-010	1.0842021724855e-019	7.92523375672323e-008
-5.38915882372073e-014	-3.97046694025453e-023	-7.92523380255261e-012
0.000100000001411484	8.470329472543e-022	2.69457950397986e-010
-1.00000000495327	-1.55096364853693e-025	-2.66939654408604e-014
1.68411218998741e-007	-1	4.95327109795202e-005
-3.36822423251115e-011	-2.03287907341032e-020	-1.00000000495327
-1.00000003243798e-008	-3.10192729707385e-025	-5.3891590495736e-014
3.4000000816727e-007	3.30872245021211e-024	0.000100000001411484
-6.79999997282854e-011	-8.13151629364128e-020	-1.00000003833145e-008

Columns 4 through 10

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 11 through 13

1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0.0403738327228123	-3.28534274742653e-011	1.10953272594125e-007
-2.05333921714158e-008	0.0403738327228123	-3.73715514087297e-014
0.000277271033310901	-4.03738338398288e-006	3.77241130557181e-010
-0.0025233646149893	0.000277271033310901	-6.9345796641961e-009
25.2336454517577	-2.05333921714158e-008	6.93457953713282e-005
-1.28333701071349e-005	25.2336454517577	-2.3357219630456e-011
0.173294395819313	-0.0025233646149893	2.35775706598238e-007
1.19505797475599e-006	-4.14542068366319e-008	0.000140000001976078
-2.59088792728949e-005	1.19505797475599e-006	-4.71551415180905e-011
0.349858497220123	-0.00509433988309161	-50.9433957504151

Columns 14 through 20

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0
-5.97944822539675e-017	0	0	0	0	0	0
1.10953272594125e-007	0	0	0	0	0	0
-1.10953274627138e-011	0	0	0	0	0	0
3.77241130557181e-010	0	0	0	0	0	0
-3.73715514087297e-014	0	0	0	0	0	0
6.93457953713282e-005	0	0	0	0	0	0
-6.9345796641961e-009	0	0	0	0	0	0
-7.54482264289448e-014	0	0	0	0	0	0
0.000140000001976078	0	0	0	0	0	0
-1.40000004541317e-008	0	0	0	0	0	0

Dari matriks C ini diperoleh 4 nilai eigen yang tidak nol, tetapi dari 4 nilai eigen tersebut hanya 2 yang bernilai real yaitu

$$\lambda_1 = 0.0403738334376684 \text{ dan } \lambda_2 = 0.0403738331393274$$

dimana nilai eigentersebut merupakan nilai y.

Selanjutnya akan dicari solusi SPP (x_1, x_2, x_3)

- Untuk $\lambda_1 = 0.0403738334376684$ atau $y = 0.0403738334376684$

  x_1 diperoleh dengan mensubtitusi nilai $y = 0.0403738334376684$ ke persamaan $x_1 = 1/y$ maka diperoleh $x_1 = 24.7685174989356$. Selanjutnya, nilai x_2, x_3 diperoleh dari vektor eigen matriks C yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0.0403738334376684$

  dan diperoleh $V^* = [$-0.0244191433650311 0.0828832758298823
  -0.000175989052371889 0.000597340752150799
  -0.281321740000367 0.954861379681735
  -0.00202748917229073 -1.26835516300727e-006
  4.30504172740569e-006 -9.14105049791788e-009
  -0.000985894426910304 0.00334631567924597
  -7.10535269052396e-006 2.41169360328679e-005
  -0.0113580370731699 0.0385514142993326
  -8.18575101387422e-005 -5.12083600910621e-008
  1.7381103764449e-007 -3.69059250248252e-010$]'$

  Vektor eigen di atas bersesuaian dengan

  $$V = [1\ x_2\ x_3\ x_2x_3\ x_2^2\ x_2^3\ x_2^2x_3\ x_3^2\ x_2x_3^2\ x_3^3\ \lambda_1\ \lambda_1x_2\ \lambda_1x_3\ \lambda_1x_2x_3\ \lambda_1x_2^2\ \lambda_1x_2^3\ \lambda_1x_2^2x_3\ \lambda_1x_3^2\ \lambda_1x_2x_3^2\ \lambda_1x_3^3]'$$

  maka vektor eigen V^* dibagi dengan -0.0244191433650311, sehingga diperoleh

$$V = [\ 1 \quad -3.39419260499422$$
$$0.00720701171786027 \quad -0.0244619863695222$$
$$11.5205409049372 \quad -39.1029843024356$$
$$0.0830286772137204 \quad 5.19410179156239e-005$$
$$-0.000176297819421898 \quad 3.74339523761023e-007$$
$$0.0403738334376681 \quad -0.137036571235254$$
$$0.000290974690811596 \quad -0.000987624163237603$$
$$0.465128399607782 \quad -1.5787373751423$$
$$0.00335218598437669 \quad 2.09705800590834e-006$$
$$-7.11781879676387e-006 \quad 1.51135215814636e-008\ ]^t$$

Jadi dapat dilihat bahwa $x_2 = -3.39419260499422$ dan $x_3 = 0.00720701171786027$

Jadi solusi SPP (***) untuk $\lambda_1 = 0.0403738334376684$ adalah

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685174989356 , -3.39419260499422 , 0.00720701171786027)

- Untuk $\lambda_2 = 0.0403738331393274$ atau $y = 0.0403738331393274$

x_1 diperoleh dengan mensubtitusi nilai $y = 0.0403738331393274$ ke persamaan $x_1 = 1/y$ maka diperoleh x_1 =24.7685176819617. Selanjutnya, nilai x_2, x_3 diperoleh dari vektor eigen matriks C yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0.0403738331393274$

dan diperoleh
$$V^* = [-0.0244191875366719 \quad -0.0828833706383146$$
$$-0.000159412691383902 \quad -0.000541077012913773$$
$$-0.281322027483321 \quad -0.954861708487887$$
$$-0.00183651908214795 \quad -1.04067369901954e-006$$
$$-3.53224454356166e-006 \quad -6.79369839475083e-009$$
$$-0.000985896203003531 \quad -0.00334631939913092$$
$$-6.43610140543296e-006 \quad -2.18453530349064e-005$$
$$-0.0113580485960289 \quad -0.038551427289623$$
$$-7.41473149798319e-005 \quad -4.20159862767017e-008$$
$$-1.42610251809058e-007 \quad -2.74287645388587e-010\ ]^t$$

Vektor eigen di atas bersesuaian dengan

$$V = [1\ x_2\ x_3\ x_2x_3\ x_2^2\ x_2^3\ x_2^2x_3\ x_3^2\ x_2x_3^2\ x_3^3\ \lambda_1\ \lambda_1x_2\ \lambda_1x_3\ \lambda_1x_2x_3\ \lambda_1x_2^2\ \lambda_1x_2^3$$
$$\lambda_1x_2^2x_3\ \lambda_1x_3^2\ \lambda_1x_2x_3^2\ \lambda_1x_3^3]'$$

maka vektor eigen V^* dibagi dengan -0.0244191433650311 , sehingga diperoleh

$V = [$ 1	3.39419034 78092
0.00652817 343511128	0.02215786 30370565
11.5205318 383685	39.1029270 34485
0.07520803 38213517	4.26170484 770098e - 005
0.00014465 037128107	2.78211483 676444e - 007
0.04037383 31393273	0.13703647 5685587
0.00026356 7385105153	0.00089459 7864982191
0.46512803 0118601	1.57873505 134959
0.00303643 660824014	1.72061360 410143e - 006
5.84008995 364366e - 006	1.12324640 193975e - 008 $]'$

Jadi dapat dilihat bahwa $x_2 = 3.3941903478092$ dan $x_3 = 0.00652817343511128$

Jadi solusi SPP (***) untuk $\lambda_2 = 0.0403738331393274$ adalah

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685176819617 , 3.3941903478092 , 0.00652817343511128)

Jadi solusi real untuk SPP(***) ada dua yaitu

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685174989356 , -3.39419260499422 , 0.00720701171786027)

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685176819617 , 3.3941903478092 , 0.00652817343511128)

Uji solusi pada Sistem Persamaan Polinomial yang diberikan

$$(1.6e-3)x_1^2 + (1.6e-3)x_2^2 - 1 = 0 \qquad \dots\dots\dots\ F_1$$
$$(5.3e-4)x_1^2 + (5.3e-4)x_2^2 + (5.3e-4)x_3^2 + (2.7e-2)x_1 - 1 = 0 \qquad \dots\dots\dots\ F_2$$
$$(-1.4e-4)x_1 + (1.0e-4)x_2 + x_3 - 3.4e-3 = 0 \qquad \dots\dots\dots\ F_3$$

Untuk solusi

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685174989356 , -3.39419260499422 , 0.00720701171786027)

diperoleh

F_1 = 4.05580236062519e-009 ≈ 0

F_2 = 1.343485322991e-009 ≈ 0

F_3 = 7.50986382455632e-012 ≈ 0

Terbukti bahwa solusi pertama memenuhi persamaan F_1 , F_2 dan F_3

Untuk solusi

(x_1, x_2, x_3) =(24.7685176819617 , 3.3941903478092 , 0.00652817343511128)

diperoleh

F_1 = -5.95390314828137e-009 ≈ 0

F_2 = -1.97222882469816e-009 ≈ 0

F_3 = -5.58243729020802e-012 ≈ 0

Terbukti bahwa solusi kedua memenuhi persamaan F_1 , F_2 dan F_3

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Matriks $M(x_1)$ dapat diuraikan ke dalam bentuk

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2 + \ldots + M_k x_1^k$$

- Untuk SPP berderajat 1 yang juga merupakan SPL, penguraian matriks $M(x_1)$ berbentuk

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1$$

- Untuk SPP berderajat 2, baik untuk $n = 2$ maupun $n = 3$, penguraian matriks $M(x_1)$ berbentuk

$$M(x_1) = M_0 + M_1 x_1 + M_2 x_1^2$$

Dari matriks-matriks numerik M_i dimana $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ dapat dibuat matriks C dengan bentuk

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -M_0^{-1}M_k & -M_0^{-1}M_{k-1} & \cdots & -M_0^{-1}M_1 \end{bmatrix}$$

Untuk SPP berderajat 1 dan 2, bentuk matriks C yang dihasilkan adalah

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_0^{-1}M_2 & -M_0^{-1}M_1 \end{bmatrix}$$

tetapi untuk SPP berderajat 1, matriks $-M_0^{-1}M_2$ dianggap matriks nol karena pada penguraian matriks $M(x_1)$ tidak menghasilkan matriks M_2.

Solusi x_1 diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks C, sedangkan $x_2, x_3, \ldots, x_n$ diperoleh dari vektor eigen matriks C.

- Untuk SPP berderajat 1 hanya diperoleh 1 pemecahan atau solusi real
- Untuk SPP berderajat 2 diperoleh 2 solusi real

B. Saran

Diharapkan kepada mahasiswa FMIPA Unhas khususnya Jurusan Matematika yang tertarik pada bidang aljabar agar dapat mengembangkan skripsi ini dengan mencari penyelesaian sistem persamaan polinomial dengan ukuran dan derajat dari sistem persamaan polinomial yang lebih besar dengan setiap suku pada persamaan multivariat terdiri dari beberapa variabel. Diharapkan pula agar mahasiswa yang ingin mengembangkan skripsi ini agar dapat memperoleh cara penyelesaian sistem persamaan polinomial yang lebih sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

Dinesh Manocha, March 1994, *Solving Sistems of Polynomial Equations*, IEEE Computer Graphics and Applications.

Howard Anton, 1998, *Aljabar Linier Elementer, Edisi Kelima*, Erlangga, Jakarta.

Lancaster, Peter, Mirion Tismenetsky, 1985, *The Theory of Matrices Second Edition With Applications*, Academic Press.