SKRIPSI

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF DODECAHEDRAL YANG DIMODIFIKASI

Disusun dan diajukan oleh

NURLINDAH

H011171512

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2021

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF DODECAHEDRAL YANG DIMODIFIKASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

NURLINDAH

H011171512

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

AGUSTUS 2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Nurlindah
NIM	: H011171512
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 9 Agustus 2021

Yang menyatakan,

NURLINDAH

NIM. H011171512

LEMBAR PENGESAHAN

Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi

Disusun dan diajukan oleh

NURLINDAH

H011171512

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal, 9 Agustus 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan,

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19850529 200812 1 002**

Ketua Program Studi,

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Robbil Alamin. Dengan memanjatkan puja dan puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi**" sebagai salah satu persyaratan akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, dan nasehat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga dan teristimewa kepada orang tua penulis, Ayahanda **La Hudeng** dan Ibunda **Norma** yang telah membesarkan dan dengan sabar dalam mendidik dan memberikan motivasi serta selalu mendoakan setiap langkah dan proses penulis dalam mencari ilmu dengan segala pengorbanan yang telah diberikan. Terima kasih atas segala bentuk bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung kepada kakak **Idris dan Amriadi Hudeng**. Disamping itu, izinkan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. **Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Bapak Dr. Eng. Amiruddin, s**elaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si,** selaku Ketua Departemen Matematika sekaligus dosen pembimbing utama yang dengan sabar dan tulus meluangkan begitu banyak waktunya demi memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan. Serta para staf **Departemen Matematika** yang telah memudahkan dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. **Bapak Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si,** selaku dosen pembimbing pertama yang dengan sabar dan tulus meluangkan waktu di tengah berbagai kesibukan dan memberikan begitu banyak masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.

4. **Ibu Dra. Nur Erawati, M.Si,** selaku penasehat akademik sekaligus dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. **Bapak Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS,** selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritikan yang membangun demi perbaikan skripsi penulis.
6. **Bapak** dan **Ibu dosen Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, semoga Bapak dan Ibu dosen selalu dalam rahmat dan lindungan Allah SWT, sehingga ilmu yang telah diajarkan dapat bermanfaat bagi penulis di kemudian hari.
7. Terima kasih kepada **Nisa**, **Khandy, Wulan, Rista, Ifah, Fika, Esty, Luthfia, Kayis, Alfian, Faatir,** dan **Math 2017** yang telah memberikan warna perkuliahan selama 4 tahun terakhir serta memberi semangat kepada penulis selama mengerjakan skripsi.
8. Spesial untuk sahabat penulis **Hardiana, Kamisa, Nurmalasari, Reski Nurul Fajria,** dan **Yusliani Saharuddin** yang selalu mendukung dan membantu penulis dalam hal apapun.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dan memberikan doa serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis. Aamiin Ya Robbal Alamin.

Makassar, 9 Agustus 2021

Nurlindah

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Nurlindah
NIM	: H011 17 1 512
Program Studi	: Matematika
Departeman	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty- Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar Pada Tanggal, 9 Agustus 2021

Yang Menyatakan

Nurlindah

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$ disebut suatu pelabelan-k total tidak teratur titik pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda, x dan y pada V maka kedua titik tersebut memiliki bobot yang berbeda, yaitu $wt(x) \neq wt(y)$. Bobot titik x adalah label titik x ditambahkan dengan jumlah label semua sisi yang terkait dengan titik x, yaitu $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu)$. Nilai total ketidakteraturan titik dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik.

Skripsi ini membahas tentang penentuan nilai total ketidakteraturan titik graf dodecahedral yang dimodifikasi $\mathrm{G}\mathfrak{D}_\mathrm{n}$, untuk $n \geq 6$ dimana n adalah bilangan genap. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$$tvs(\mathrm{G}\mathfrak{D}_\mathrm{n}) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil.$$

Kata Kunci: Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi, Pelabelan Total Tidak Teratur Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Titik.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Total labeling $f: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ is called a vertex irregular total k-labeling of G if for every two different vertices, x and y in V their weights are distinct, that is $wt(x) \neq wt(y)$. The weight of vertex x is the sum of its label and labels of all edges incident with the given vertex x, that is $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu)$. The total vertex irregularity strength of G, which is notated by $tvs(G)$, is the smallest positive integer k such that G has a vertex irregular total k-labeling.

In this paper, we determined the total vertex irregularity strength of Modified Dodecahedral Graph $\mathrm{G}\mathfrak{D}_\mathrm{n}$, for $n \geq 6$ where n is even number. The result of this study, we obtained that :

$$tvs(\mathrm{G}\mathfrak{D}_\mathrm{n}) = \left\lceil \frac{2n+3}{6} \right\rceil.$$

Keywords: Modified Dodecahedral Graph, Total Vertex Irregular Labeling, Total Vertex Irregularity Strength.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$G\mathfrak{D}_n$	Graf Dodecahedral yang dimodifikasi	2
$G = (V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E	4
$V(G)$	Himpunan titik graf G	5
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	5
$p(G)$	Banyaknya titik pada graf G	5
$q(G)$	Banyaknya sisi pada graf G	5
$deg(v)$	Derajat titik v pada suatu graf	6
$\Delta(G)$	Derajat titik maksimum pada graf G	6
$\delta(G)$	Derajat titik minimum pada graf G	6
P_n	Graf lintasan	8
C_n	Graf *cycle* (lingkaran)	9
${P_n}^d$	Graf platonik	9
$GP(n,k)$	Graf petersen	10
$wt(v)$	Bobot titik v	11
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v	11
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv	11
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf G	12

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu cabang ilmu yang banyak memberikan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan yaitu teori graf (Hartina, 2018).

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang perkembangannya sangat pesat, ini disebabkan karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf akan membentuk sisi dan dapat direpresentasikan sebagai suatu gambar sehingga membentuk pola graf tertentu.

Beberapa pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemasangan nilai bilangan ke setiap titik, sisi, atau keduanya. Pelabelan graf terdiri dari berbagai macam, diantaranya pelabelan total tidak teratur, pelabelan ajaib, pelabelan harmoni dan pelabelan anti ajaib (Yuliarti, 2019).

(Wallis, 2001) mendefinisikan pelabelan pada graf sebagai suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf ke himpunan bilangan. Adapun pelabelan dengan domain berupa himpunan titik dari suatu graf disebut pelabelan titik, sedangkan pelabelan dengan domain berupa himpunan sisi dari suatu graf disebut pelabelan sisi. Apabila domain dari pemetaan tersebut adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total.

Banyak peneliti telah membahas pelabelan total, salah satunya pelabelan total tidak teratur, dimana pelabelan total tidak teratur dibagi dalam dua tipe, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi.

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total tidak teratur titik pada graf. Andi Kurniawan Prihartomo (2011), menentukan pelabelan total ketakteraturan simpul pada graf sirkulan $C_n(1,2,3)$, memperoleh hasil $tvs(C_n(1,2,3)) = \left\lceil \frac{n+6}{7} \right\rceil$. Andi Dahniah Pahrany (2017) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Unidentified Flying Object* untuk $3 \leq m \leq 3 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$, memperoleh hasil

$tvs(U_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$, serta untuk $m > 3 \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, n \geq 3$, memperoleh hasil $tvs(U_{m,n}) = \left\lceil \frac{3n+m}{3} \right\rceil$. Sitti Fatimah (2018), menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *splitting* untuk $n \geq 3$, memperoleh hasil $tvs(S) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$. Sitti Ardianti Badawi, dkk (2018), menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf grid untuk $n \geq 2$, dengan hasil $tvs(G_{n^2}) = \left\lceil \frac{n^2+2}{5} \right\rceil$. Laraza Yuliarti (2019) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf seri parallel $(m, 1{,}3)$ untuk $m \geq 4$, memperoleh hasil $tvs(sp(m, 1{,}3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Riskawati, dkk (2019) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf seri parallel $sp(m, r, 2)$ untuk $m, r \geq 3$, memperoleh hasil $tvs(sp(m, r, 3)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$. Pada tahun 2020, St Maryam Mahaseng telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir untuk $m \geq 2$, memperoleh hasil $tvs(Wd_{5,m}) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil$.

Pelabelan total tidak teratur pada graf dodecahedral atau graf petersen yang diperumum telah diteliti oleh (Haque, 2011) dengan hasil yang diperoleh adalah $tvs(P(n, k)) = \left\lceil \frac{2n+3}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Berdasarkan penelusuran hasil penelitian sebelumnya, diketahui bahwa nilai total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi belum didapatkan, karena itu penulis tertarik untuk mencari nilai total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi dan menunjukkan hasilnya dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul "**Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Dodecahedral yang Dimodifikasi**".

I.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi?

I.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis hanya membahas tentang pelabelan total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi dengan notasi $G\mathfrak{D}_n$, dimana $n \geq 4$, n adalah bilangan genap.

I.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksi pelabelan titik dari graf dodecahedral yang dimodifikasi serta menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf dodecahedral yang dimodifikasi.

I.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui tentang pelabelan total tidak teratur, dan nilai total ketidakteraturan titik.
2. Untuk menambah pemahaman dan penguasaan pembaca tentang nilai total ketidakteraturan titik.
3. Dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait nilai total ketidakteraturan titik pada suatu graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 *State of the Art*

Pada penelitian yang berjudul "*Irregular total labellings of generalized petersen graphs"* jenis graf yang diteliti adalah graf Petersen yang diperumum, dan hasil yang diperoleh yaitu

$$tvs(P(n,k)) = \left\lceil \frac{2n+3}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, \text{(Haque, 2011).}$$

Penelitian dengan jenis graf yang sama yaitu graf Petersen yang diperumum dengan judul "*On the total irregularity strength of generalized petersen graph"* memperoleh hasil yang sama yaitu

$$tvs(P(n,m)) \geq \left\lceil \frac{2n+3}{4} \right\rceil, \text{(Ali Ahmad, 2016).}$$

Penelitian dengan jenis graf yang beda yaitu graf kincir dengaan judul "Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kincir $Wd_{(5,m)}$" dengan hasil yang diperoleh yaitu

$$tvs(Wd_{5,m}) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil \text{ (Mahaseng, 2020).}$$

Dari penelitian yang sudah ada penulis mencoba memodifikasi graf petersen yang diperumum dengan menambahkan sisi pada titik bagian dalam. Persamaan dengan graf yang telah dikembangkan sebelumnya yaitu sama-sama dari graf petersen. Oleh sebab itu penulis mencoba mengembangkan graf yang dimodifikasi dengan menggabungkan sebuah siklus pada titik bagian dalam.

II.2 Pengertian Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Secara formal definisi graf adalah sebagai berikut.

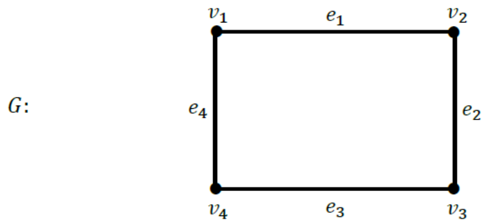
Beberapa definisi yang digunakan pada skripsi ini dikutip dari buku Matematika Diskrit oleh Rinaldi Munir.

Definisi 2.2.1 *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G = (V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari* *titik-titik (vertices atau node) dan E adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang titik* (Munir, 2010).

Himpunan titik dari graf biasanya dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya unsur dari $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur dari $E(G)$ disebut *size* (ukuran) dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis $e = (u, v)$.

Penulisan sisi $e = (u, v)$ akan ditulis uv.

Contoh 2.2.1:



Gambar 2.2-1 Graf G

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada Gambar 2.2-1 masing-masing adalah: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$ dan $e_4 = v_1v_4$ sehingga *order* dan *size* dari graf G adalah 4.

II.3 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada bab pembahasan tugas akhir ini.

Definisi 2.3.1 *Dua buah titik pada graf tak-berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika uv adalah sisi pada graf G.*

Definisi 2.3.2 *Untuk sembarang sisi $e = uv$, sisi e dikatakan bersisian (incident) dengan titik u dan titik v.*

Definisi 2.3.3 *Derajat suatu titik pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut.*

Definisi 2.3.4 *Jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda pada graf G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi bertetangga (adjacent edges).*

Definisi 2.3.5 *Misalkan v adalah suatu titik pada graf G. Derajat titik v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v, dan dinotasikan dengan $deg(v)$. $\Delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat maksimum titik dari graf G dan $\delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat minimum titik dari graf G.*

Definisi 2.3.6 *Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = v_0v_1, e_2 = v_1v_2, \dots, e_n = v_{n-1}v_n$ adalah sisi-sisi dari graf G.*

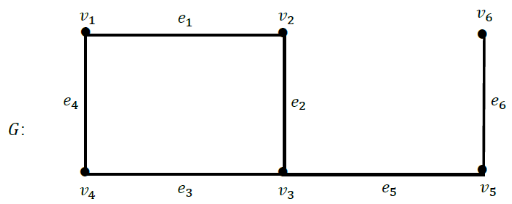
Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*).

Definisi 2.3.7 *Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut sirkuit atau siklus.*

Definisi 2.3.8 *Graf tak-berarah G disebut graf terhubung (connected graph) jika untuk setiap pasang titik u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (disconnected graph).*

Definisi 2.3.9 *Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).*

Contoh 2.3.1:



Gambar 2.3-1 Graf G

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada Gambar 2.3-1 masing-masing adalah:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Berdasarkan graf G pada Gambar 2.3-1 diperoleh:

i. Titik v_1 dan titik v_2 bertetangga, sedangkan titik v_1 dan titik v_3 tidak bertetangga.

ii. Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait dengan titik v_1 dan titik v_2, sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan titik v_4.

iii. Sisi e_1 dan e_2 merupakan sisi yang bertetangga pada graf G karena terkait dengan titik yang sama yaitu titik v_1.

iv. Derajat dari setiap titik graf G pada Gambar 2.3.1 adalah $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = 2$, $\deg(v_3) = 3$ dan $\deg(v_6) = 1$. Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 3$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 1$.

v. Lintasan tertutup pada graf G yaitu $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_1$, sedangkan lintasan terbuka pada graf G yaitu $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_6$.

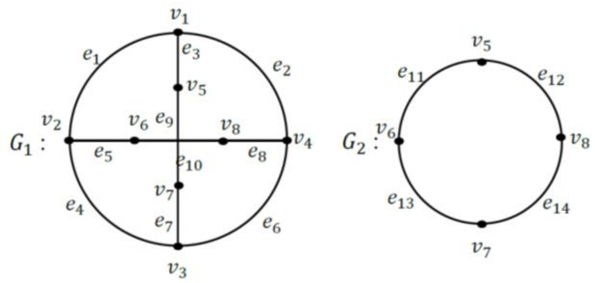
vi. Lintasan $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_1$ merupakan siklus pada graf G.

II.4 Operasi *Union* (Gabungan) pada Graf

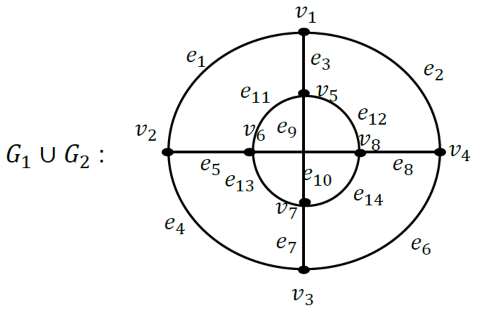
Pada subbab ini akan dipaparkan operasi *union* (gabungan) pada suatu graf.

Definisi 2.4.1 *Gabungan dari dua buah graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$, *dinotasikan dengan* $G = G_1 \cup G_2$ *yaitu graf dengan* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ (Gary Chartrand, 1993).

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4-1 Graf G_1 dan Graf G_2



Gambar 2.4-2 Graf $G_1 \cup G_2$

Gambar 2.4-1 merupakan graf G_1 dengan himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Gambar 2.4-1 merupakan graf G_2 dengan himpunan titik $V(G_2) = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi $E(G_2) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}\}$. Sedangkan Gambar 2.4-2 merupakan graf gabungan G_1 dan G_2 dengan himpunan titik $V(G_1 \cup G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi. $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}\}$

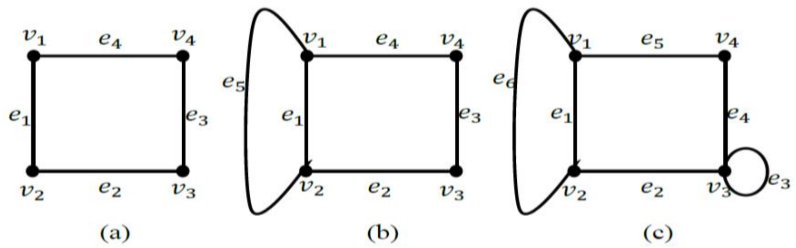
II.5 Jenis-Jenis Graf

Beberapa graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus dari setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan beberapa jenis graf yang digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.5.1 *Graf sederhana adalah suatu graf dimana setiap sisi* $e = uv \in E(G)$ *menghubungkan dua titik yang berbeda artinya* $u \neq v$ *dan tidak ada sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama artinya* $uv = vu$.

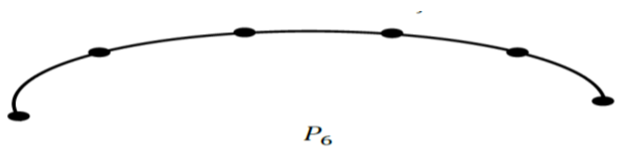
Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung *loop* (gelang) dan *multiple edges* (sisi ganda). *Loop* (gelang) adalah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, sedangkan *multiple edges* (sisi ganda) adalah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama.

Contoh 2.5.1



Gambar 2.5-1 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana

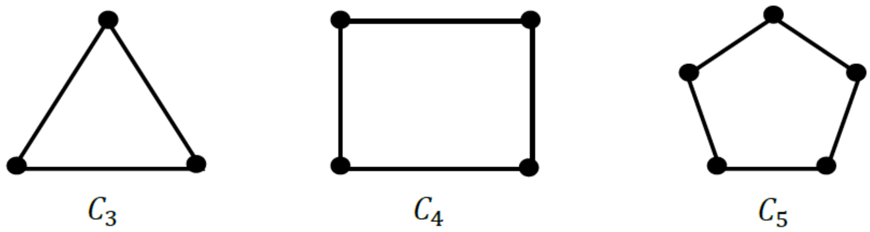
Definisi 2.5.2 *Graf lintasan (path) dengan* n *titik dan* $n - 1$ *sisi, dimana* $n \geq 2$, *dinotasikan dengan* P_n *adalah graf dengan barisan titik* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *dan* $v_i v_{i+1} \in E(P_n), i = 1,2, \dots, n - 1$ *dan* $v_i \neq v_j$ *untuk* $i \neq j$.



Gambar 2.5-2 Graf Lintasan

Definisi 2.5.3 *Suatu graf dikatakan graf terhubung jika untuk setiap dua titik* u *dan* v *terdapat suatu lintasan dari* u *ke* v.

Definisi 2.5.4 *Graf siklus (cycle) dengan* n *titik dan* n *sisi dimana* $n \geq 3$*, dinotasikan dengan* C_n *adalah graf terhubung yang dibentuk dari lintasan tertutup yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, dimana setiap titiknya berderajat* 2 *dan masing-masing titiknya dilalui tepat satu kali.*



Gambar 2.5-3 Graf Siklus

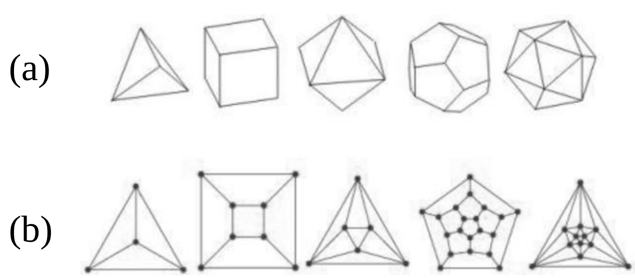
II.6 Graf Platonik

Section ini dikutip dari penelitian yang berjudul "Eksentrik Digraf dari Graf Archimedean" oleh Debby Indrian Nirandi (Nirandi, 2013).

Definisi 2.6.1 *Graf platonic adalah ruang tiga dimensi dimana semua permukaannya adalah polygon beraturan sedemikian sehingga semua permukaan bertemu di setiap titik yang sama* (David Clark, 2013).

Graf platonik adalah graf sederhana karena tidak memiliki loop dan juga sisi ganda yang dibentuk dari bangun polyhedron yang semua permukaannya merupakan bangun segi-n beraturan dan semua permukaan bertemu di setiap titik yang sama yang disebut *platonic solid*. Graf platonik dinotasikan dengan $P_n{}^d$ dengan n adalah jumlah sisi pada polyhedron dan d adalah derajat titik.

Terdapat 5 *platonic solid* diantaranya tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron, dan icosahedron.



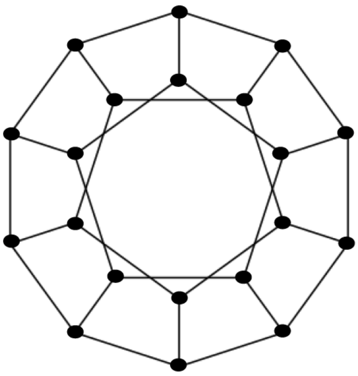
Gambar 2.6-1 (a) *Platonic solid,* (b) Graf Platonik

Bangun ruang tiga dimensi yang disebut bangun ruang platonic, dalam bahasa inggris disebut *platonic solid*.

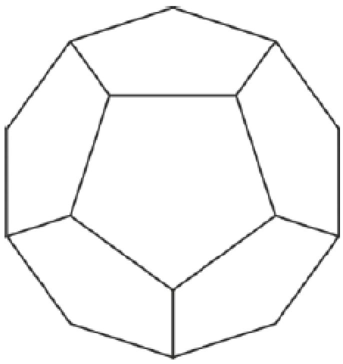
Definisi 2.6.2 *Graf dodecahedral merupakan platonic solid yang berhubungan dengan konektivitas dari titik dodecahedron.*

Dodecahedral dari kata sifat, memiliki 12 permukaan bidang. Dodecahedron adalah benda tiga dimensi yang memiliki 12 permukaan datar. Dodecahedron memiliki segi lima sebagai permukaan dan merupakan salah satu padatan platonic (*platonic solid*).

Graf dodecahedral juga merupakan graf petersen yang diperumum adalah $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, dimana m adalah jumlah sisi dan n adalah jumlah titik. Lebih khusus lagi, $GP(n, k)$ dimana GP adalah graf Petersen, n adalah banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam), dan k adalah loncatan sisi dalam, serta memiliki $2n$ *order* dan $3n$ *size.*



Gambar 2.6-2 Graf Dodecahedral atau graf Petersen yang diperumum $GP(10,2)$



Gambar 2.6-3 Dodecahedron

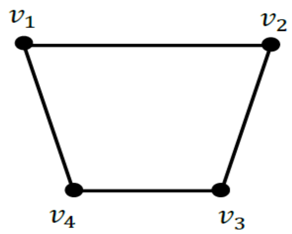
II.7 Pelabelan Graf

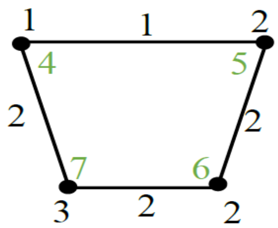
Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan graf. Dalam subbab ini, akan dibahas definisi pelabelan graf dan bobot titik dari graf.

Definisi 2.7.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif.*

Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan disebut himpunan label. Suatu pelabelan graf disebut pelabelan titik (*vertex labeling*) jika domain dari fungsinya adalah himpunan titik, dan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) jika domainnya adalah himpunan sisi dan jika domainnya adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut adalah pelabelan total (*total labeling*).

Contoh 2.7.1





Gambar 2.7-1 Pelabelan total pada graf siklus C_4

Gambar 2.7-1 merupakan graf dengan $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(C_4) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$ yang masing-masing titik dan sisinya diberi label bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total. Misalkan f adalah pelabelan total pada C_4, maka pelabelan titiknya adalah

$$f(v_1) = 1, \qquad f(v_2) = 2, \qquad f(v_3) = 2, \qquad f(v_4) = 3,$$

Sedangkan pelabelan sisinya adalah

$$f(v_1v_2) = 1, \qquad f(v_1v_4) = 2, \qquad f(v_2v_3) = 2, \qquad f(v_3v_4) = 2.$$

Definisi 2.7.2 B*obot titik v pada pelabelan total f adalah label titik v ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu $wt(v) = f(v) + \sum_{u\epsilon V} f(uv)$.*

Bobot titik dari Gambar 2.7-1 adalah

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_4) = 1 + 1 + 2 = 4,$$

$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 2 + 1 + 2 = 5,$$
$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 2 + 2 + 2 = 6,$$
$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_1v_4) + f(v_3v_4) = 3 + 2 + 2 = 7.$$

II.8 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Definisi yang digunakan pada subbab ini dikutip dari (Nurdin, 2010).

Definisi 2.8.1 *Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}$ disebut suatu pelabelan-k total tidak teratur titik (total vertex irregular k-labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V, berlaku*

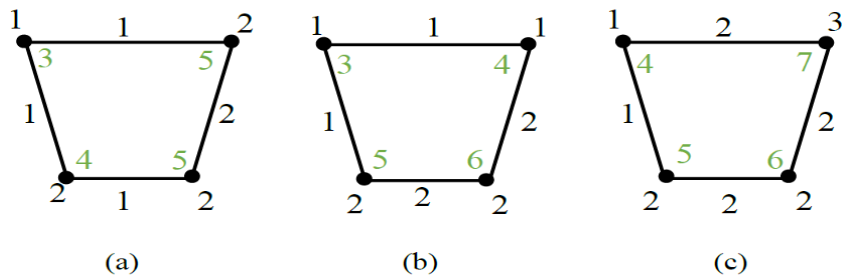
$$wt(x) \neq wt(y)$$

Dimana

$$wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu).$$

Definisi 2.8.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik.*

Contoh 2.8.1



Gambar 2.8-1 Beberapa pelabelan total pada graf siklus C_4

Gambar 2.8-1 (a) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik pada C_4 karena terdapat dua titik yang memiliki bobot 5. Sedangkan Gambar 2.8-1 (b) merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik pada C_4 dan Gambar 2.8-1 (c) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik pada C_4. Namun C_4 tidak mempunyai pelabelan-1 total ketidakteraturan titik sehingga diperoleh k yang terkecil adalah 2. Dengan demikian, nilai total ketidakteraturan titik pada C_4 adalah 2 $(tvs(C_4) = 2)$.

Bača dkk. (2007) memberikan batas bawah dan batas atas nilai total ketidakteraturan titik dari sebarang graf G sebagai berikut.

Teorema 2.8.1 (Martin Bača, 2007)

Misalkan G *sebuah graf* (p, q) *dimana* p *adalah banyaknya titik dengan derajat minimum* $\delta = \delta(G)$ *dan derajat maksimum* $\Delta = \Delta(G)$, *maka berlaku*

$$\left\lceil \frac{(p+\delta)}{(\Delta+1)} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1.$$