SKRIPSI

TEOREMA TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKTIF DI RUANG BERNORMA-2 STANDAR

Disusun dan diajukan oleh

SALSABILA AMMARI

H011171303

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

TEOREMA TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKTIF DI RUANG BERNORMA-2 STANDAR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

SALSABILA AMMARI
H011171303

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
JUNI 2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Salsabila Ammari
NIM	: H011171303
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Bernorma-2 Standar

Adalah benar tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 11 Juni 2021

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL 10000 0FC6AJX281267737

(Salsabila Ammari)

PERSETUJUAN PEMBIMBING

TEOREMA TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKTIF DI RUANG BERNORMA-2 STANDAR

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Muh. Nur, S. Si, M. Si.	Naimah Aris, S.Si., M.Math
NIP. 19850529 200812 1 002	NIP. 19711003 199702 2 001

Pada 11 Juni 2021

iii

HALAMAN PENGESAHAN

TEOREMA TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKTIF DI RUANG BERNORMA-2 STANDAR

Disusun dan diajukan oleh

SALSABILA AMMARI
H011171303

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin pada tanggal 11 Juni 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Dr. Muh. Nur, S. Si, M. Si.	Naimah Aris, S.Si., M.Math
NIP. 19850529 200812 1 002	NIP. 19711003 199702 2 001

Ketua Program Studi,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.

NIP. 19700807 200003 1 002

iv

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam. Salawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah SAW dan kepada para keluarga serta sahabat beliau. Berkat kuasa Allah SWT serta banyak doa dan bantuan yang diberikan, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "**Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Bernorma-2 Standar**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini dapat melewati segala hambatan dan masalah berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis haturkan rasa terima kasih serta penghargaan yang setinggi-tingginya untuk orang tua penulis, Ayahanda **Ir. M. Chalil Ammarie**, Ibunda **Mayana Hasyim** yang telah menjadi inspirasi, mendidik dan membesarkan penulis dengan bertabur cinta, kasih, sayang, serta dengan ikhlas telah mengiringi setiap langkah penulis dengan doa dan restunya. Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya dan **Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Prof. Dr. Nurdin, S. Si., M. Si.,** selaku Ketua Departemen Matematika yang telah seperti orang tua sendiri. **Segenap dosen pengajar dan staf Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. **Dr. Muh Nur, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing utama dan **Ibu Naimah Aris S.Si., M.Math** selaku dosen pembimbing pertama, yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas meluangkan begitu banyak waktu di tengah

berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.

4. **Prof. Dr. Jeffry Kusuma** selaku Tim Penguji sekaligus penasehat akademik selama menempuh pendidikan sarjana. Terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan nasihat dan dukungan telah membimbing penulis selama menjalani pendidikan di Departemen Matematika. Serta **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** selaku Tim Penguji, terima kasih banyak atas waktu yang telah diluangkan dan memberikan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Spesial untuk **Muh. Khaerul Azis** yang senantiasa mendampingi, mendukung, dan selalu meluangkan waktu setiap dibutuhkan. Terima kasih juga kepada **Syaifullah Hi. Nurdin** yang banyak membimbing saat penulis kesulitan dalam pengerjaan skripsi. Tak lupa sahabat penulis, **Ananda Dwi Nabila**, **Farah Ramadhana, Agustiani Wulandari,** dan **Khandy Dilsab** yang selalu membantu dan memberikan dukungan penuh kepada penulis.
6. **Teman seperjuangan di Matematika 2017,** terima kasih atas kebersamaan, suka dan duka dalam berjuang menjalani pendidikan di Departemen Matematika.
7. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis, semoga bernilai ibadah di sisi Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak terdapat kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan.

Makassar, 11 Juni 2021

Salsabila Ammari

PERNYATAAN PERETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR

UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Salsabila Ammari

NIM : H011171303

Program Studi : Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Skripsi

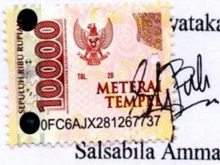
Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Bernorma-2 Standar"

Berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal tersebut, maka pihak Universitas Hasanuddin berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, megelolah dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 11 Juni 2021



yatakan,

Salsabila Ammari

ABSTRAK

Pada tulisan ini dibahas pembuktian teorema titik tetap pada ruang bernorma-2 standar dengan menggunakan kelengkapan. Kelengkapan dari ruang bernorma-2 standar ditunjukkan dengan mendefinisikan norma baru. Dua buah vektor bebas linier pada ruang bernorma-2 standar digunakan untuk mendefinisikan norma baru, yakni $\|\boldsymbol{x}\|^{*} = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ yang telah ditunjukkan ekuivalen dengan norma standar.

Kata kunci: ruang bernorma-2 standar, kelengkapan, teorema titik tetap

ABSTRACT

This paper discussed about the proof of the fixed point theorem on the standard 2-normed spaces by using completeness. The completeness of the standard 2-normed spaces is shown by defining a new norm. Two linear independent vectors on standard 2-normed spaces are used to define the new norm, namely $\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ which has been shown to be equivalent to standard norm.

Keywords: standard 2-normed spaces, completeness, fixed point theorem

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis merupakan salah satu cabang matematika yang terus menerus mengalami perkembangan, yaitu dari analisis klasik hingga berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik berbicara tentang sistem bilangan, kekonvergenan suatu barisan maupun deret, kekontinuan, pendiferensial serta pengintegralan. Sedangkan analisis modern berbicara tentang konsep yang bersifat abstrak yang bekerja pada konsep ruang. Salah satu yang dibahas dalam analisis modern adalah analisis fungsional yang merupakan suatu studi tentang ruang bernorma (Handayani, 2013).

Ruang bernorma berawal dari suatu ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{R}$. Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang didalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma. Secara geometri, norma dapat dipandang sebagai alat ukur panjang dari suatu vektor. Fungsi norma sendiri adalah fungsi pemetaan dari suatu himpunan vektor V ke suatu lapangan F yang berupa bilangan riil.

Salah satu kajian yang dibahas oleh beberapa peneliti adalah teorema titik tetap di ruang bernorma. Titik tetap (*fixed point*) mempunyai peranan yang penting dalam analisis fungsional, khususnya di ruang bernorma. Dalam teorema titik tetap, eksistensi dan ketunggalan titik tetap dapat dijamin kebenarannya untuk fungsi yang kontraktif dan terdefinisi pada ruang yang lengkap. Eksistensi titik tetap untuk suatu fungsi banyak dikaji oleh para ahli sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan problem matematika. Banyak masalah matematis yang dapat diselesaikan dengan teorema titik tetap. Beberapa diantaranya adalah masalah persamaan linier, persamaan diferensial parsial dan banyak lagi.

Ruang bernorma tidak terbatas pada ruang bernorma, terdapat pula ruang bernorma-2 hingga ruang bernorma-n untuk n ≥ 2. Konsep tentang ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun

1960-an. Sejak saat itu banyak peneliti yang mencoba mengkaji lebih jauh tentang ruang bernorma-2, seiring dengan dikemukakannya berbagai hasil tentang sifat-sifat norma itu sendiri (Handayani, 2013).

Salah satu topik yang banyak dikembangkan adalah pemetaan kontaktif di ruang Banach yang dilengkapi dengan norma-2. Beberapa penelitian yang telah membahas tentang topik tersebut diantaranya (Gunawan, 2001), (Nur, 2012) (Rumlawang, 2020) serta (Idris dkk, 2015). Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan membahas kembali mengenai teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah yang akan dibahas, yaitu:

a. Bagaimana hubungan norma-2 dengan norma?
b. Bagaimana membuktikan teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar?

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan masalah akan dibatasi oleh pengkajian teorema titik tetap yang hanya akan dilakukan pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yakni untuk:

a. Menentukan hubungan norma-2 dengan norma.
b. Membuktikan teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini, disusun sebagai berikut:

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi definisi-definisi dan teorema-teorema yang telah ditemukan pada penelitian-penelitan sebelumnya untuk digunakan dalam penelitian.

BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan prosedur penulisan, metode yang akan digunakan, waktu, dan tempat penelitian.

BAB 4 PEMBAHASAN

Bagian ini berisi definisi-definisi yang akan ditentukan dan teorema-teorema yang ingin ditemukan saat penelitian dengan pembahasan.

BAB 5 KESIMPULAN

Pada bab ini berisikan beberapa kesimpulan dari hasil pembahasan

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi dan teorema yang telah ditemukan pada penelitian-penelitian sebelumnya untuk digunakan dalam penelitian.

2.1 Ruang Vektor

Ruang vektor telah dipelajari pada aljabar linear. Ruang vektor terdiri dari vektor-vektor dengan dua operasi serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Untuk lebih jelasnya, berikut definisi ruang vektor.

Definisi 2.1 ***(Ruang Vektor)***

Ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ adalah himpunan tidak kosong X dengan dua operasi, yaitu penambahan dan perkalian dengan skalar atas vektor-vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dengan skalar $k, l \in \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in X$.
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ *(sifat komutatif).*
3. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ *(sifat asosiatif).*
4. *Terdapat sebuah vektor* $\boldsymbol{0} \in X$, *sehingga* $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$.
5. *Terdapat vektor balikan dari* $\boldsymbol{x}$ *atau* $-\boldsymbol{x}$ *sehingga* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = 0$.
6. *Jika k skalar dan $\boldsymbol{x}$ sebarang vektor di X maka* $k\boldsymbol{x} \in X$.
7. $k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$ *(sifat distributif).*
8. $(k + l)\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{x}$.
9. $k(l\boldsymbol{x}) = (kl)\boldsymbol{x}$.
10. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(Anton & Rorres, 2005).

Contoh 2.1

Misalkan himpunan $V = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar sebagai berikut:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$k(a, b) = (ka, kb).$$

Buktikan V madalah ruang vektor.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ dan $k, m \in \mathbb{R}$. Berdasarkan definisi himpunan V, dapat ditulis, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ untuk suatu $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$. Perhatikan bahwa,

   $$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

   Karena $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, maka $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$. Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$. Perhatikan bahwa,

   $$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

   Karena $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, dan $\mathbb{R}$ memenuhi sifat komutatif penjumlahan, maka diperoleh $u_1 + v_1 = v_1 + u_1$ dan $u_2 + v_2 = v_2 + u_2$. Akibatnya,

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\ &= (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \\ &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

   Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$. Perhatikan bahwa,

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= (u_1, u_2) + [(v_1, v_2) + (w_1, w_2)] \\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2]). \end{aligned}$$

   Karena $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ memenuhi sifat asosiatif penjumlahan, maka diperoleh $u_1 + (v_1 + w_1) = (u_1 + v_1) + w_1$ dan $u_2 + (v_2 + w_2) = (u_2 + v_2) + w_2$. Akibatnya,

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Terdapat $\mathbf{0} = (0,0) \in V$ sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0} &= (u_1, u_2) + (0,0)\\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0)\\ &= (u_1, u_2) = \boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

   Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

5. Terdapat $-\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2) \in V$ sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} &= (-u_1, -u_2) + (u_1, u_2)\\ &= (-u_1 + u_1, -u_2 + u_2)\\ &= (0,0) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

   Jadi, aksioma 5 terpenuhi.

6. Akan ditunjukkan $k\boldsymbol{u} \in V$. Perhatikan bahwa,

$$k\boldsymbol{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2).$$

   Karena $\mathbb{R}$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian, $ku_1, ku_2 \in \mathbb{R}$. Akibatnya, $k\boldsymbol{u} \in V$. Jadi, aksioma 6 terpenuhi.

7. Akan ditunjukkan $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= k[(u_1, u_2) + (v_1, v_2)]\\ &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2)\\ &= (k[u_1 + v_1], k[u_2 + v_2])\\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2)\\ &= (ku_1, ku_2) + (kv_1, kv_2)\\ &= k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

   Jadi, aksioma 7 terpenuhi.

8. Akan ditunjukkan $(k + m)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{u}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(k + m)\boldsymbol{u} &= [k + m](u_1, u_2)\\ &= ([k + m]u_1, [k + m]u_2)\\ &= (ku_1 + mu_1, ku_2 + mu_2)\\ &= (ku_1, ku_2) + (mu_1, mu_2)\\ &= k(u_1, u_2) + m(u_1, u_2)\\ &= k\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

   Jadi, aksioma 8 terpenuhi.

9. Akan ditunjukkan $k(m\boldsymbol{u}) = (km)\boldsymbol{u}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} k(m\boldsymbol{u}) &= k[m(u_1, u_2)] \\ &= k(mu_1, mu_2) \\ &= (k[mu_1], k[mu_2]) \\ &= ([km]u_1, [km]u_2) \\ &= [km](u_1, u_2) \\ &= (km)\boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 9 terpenuhi.

10. Akan ditunjukkan bahwa $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Perhatikan bahwa,

$$1\boldsymbol{u} = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 1u_2) = (u_1, u_2).$$

Jadi, aksioma 10 terpenuhi.

Karena V memenuhi kesepuluh aksioma, maka V merupakan ruang vektor. ■

2.2 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Bernorma

Ruang vektor dapat dispesifikasikan lebih lanjut menjadi ruang hasil kali dalam dan ruang bernorma, berikut uraian lebih jelas mengenai ruang hasil kali dalam dan ruang bernorma.

2.2.1. Ruang Hasil Kali Dalam

Sama halnya dengan ruang vektor, ruang hasil kali dalam juga dipelajari pada aljabar linier. Ruang hasil kali dalam didefinisikan sebagaimana pada Definisi 2.2.

Definisi 2.2 ***(Ruang Hasil Kali Dalam)***

Misalkan V adalah ruang vektor dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ maka notasi $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ dinamakan hasil kali dalam jika memenuhi keempat aksioma sebagai berikut:

1. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$. *(Simetris)*
2. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$. *(Aditivitas)*
3. *Untuk suatu $k \in \mathbb{R}$, $\langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. (Sifat Homogenitas)*
4. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ *dan* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{u} = 0$. *(Sifat Positivitas)*

Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

(Anton & Rorres, 2005).

Contoh 2.2

Misalkan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa fungsi $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ adalah hasil kali dalam pada $\mathbb{R}^2$.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ dan $k \in \mathbb{R}$**.**

1. Akan ditunjukkan bahwa $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]$. Perhatikan bahwa,
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 3u_1v_1 + 2u_2v_2.$$
Karena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ merupakan vektor-vektor pada $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$, maka berlaku sifat komutatif pada $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$**,** sehingga $u_1v_1 = v_1u_1$dan $u_2v_2 = v_2u_2$. Dengan demikian,
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}].$$
Jadi, aksioma 1 terpenuhi.
2. Akan ditunjukkan $[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$. Perhatikan bahwa,
$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= 3u_1w_1 + 3v_1w_1 + 2u_2w_2 + 2v_2w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}].\end{aligned}$$
Jadi, aksioma 2 terpenuhi.
3. Akan ditunjukkan $[k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = k[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$. Perhatikan bahwa,
$$\begin{aligned}[k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}].\end{aligned}$$
Jadi, aksioma 3 terpenuhi.
4. Akan ditunjukkan $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] \geq 0$, dan $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{v} = 0$.
Perhatikan bahwa,
$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2.$$

Berdasarkan sifat bilangan kuadrat, maka $v_1^2 \geq 0$ dan $v_2^2 \geq 0$, dengan demikian,

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0.$$

Selanjutnya, misalkan $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 0$, maka $3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$. Sehingga diperoleh $v_1 = v_2 = 0$. Sebaliknya, jika $\boldsymbol{v} = 0$, maka $v_1 = v_2 = 0$, sehingga

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 3.0 + 2.0 = 0.$$

Dengan demikian, $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] \geq 0$, dan $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{v} = 0$.

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

$\therefore$ $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ adalah hasil kali dalam pada $\mathbb{R}^2$ atau berdasarkan notasi hasil kali dalam dapat ditulis $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$. ■

2.2.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang didalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma, lebih jelasnya tercantum pada definisi berikut.

Definisi 2.3 ***(Ruang Vektor Bernorma)***

Misalkan X merupakan ruang vektor. Norma pada X adalah fungsi $\|\boldsymbol{x}\|: X \to \mathbb{R}$ sehingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = 0$
3. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.3 (Handayani, 2013)

Untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tunjukkan apakah fungsi $\|.\|$ yang didefinisikan memenuhi sifat-sifat norma.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. Perhatikan bahwa,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \geq 0.$$

   Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Misalkan $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, maka

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = 0.$$

   Kuadratkan kedua ruas, diperoleh

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

   Selanjutnya, misalkan $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, maka

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{0 + 0 + \cdots + 0} = 0.$$

   Dengan demikian, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$. Perhatikan bahwa,

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\alpha\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\alpha|^{\mathbf{2}}|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \left(|\alpha|^{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$
$$= (|\alpha|^{\mathbf{2}})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = |\alpha|\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|.$$

   Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. Perhatikan bahwa,

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(|\boldsymbol{x}_i|^2+2|\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{y}_i|+|\boldsymbol{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(|\boldsymbol{x}_i|^2+|\boldsymbol{y}_i|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

∴ Fungsi $\|.\|$ mendefinisikan sebuah norma di $\mathbb{R}^n$. ∎

2.2.3 Himpunan Ortogonal dan Ortonormal

Salah satu pembahasan pada ruang hasil kali dalam adalah himpunan ortogonal dan ortonormal. Berikut definisi himpunan ortogonal dan ortonormal.

Definisi 2.4 *(Himpunan Ortogonal dan Ortonormal)*

Suatu himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam disebut himpunan ortogonal jika semua pasang himpunan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah vektor $\boldsymbol{x}$ dikatakan ortogonal ke vektor $\boldsymbol{y}$ apabila

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0.$$

Suatu himpunan ortogonal yang semua vektornya bernorma (memiliki panjang) satu dinamakan ortonormal.

(Anton & Rorres, 2005).

Contoh 2.4

Misalkan $\boldsymbol{u} = (0,1,0), \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, dan $\boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tentukan apakah $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ merupakan himpunan ortonormal terhadap hasil kali dalam Euclides.

<u>Penyelesaian:</u>

Akan dicek apakah $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ merupakan himpunan ortogonal terhadap hasil kali dalam Euclides.

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \langle (0,1,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle = 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 1.0 + 0.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle = \langle (0,1,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle = 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 1.0 + 0.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = \langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Karena $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ saling ortogonal, maka $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ merupakan himpunan ortogonal terhadap hasil kali dalam Euclides. Selanjutnya, perhatikan bahwa,

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle} = \sqrt{\langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle} = \sqrt{0.0 + 1.1 + 0.0} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle} = \sqrt{\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Karena masing-masing vektor $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ memiliki panjang 1 dan $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ merupakan himpunan ortogonal terhadap hasil kali dalam Euclides, maka $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ merupakan himpunan ortonormal terhadap hasil kali dalam Euclides. ∎

Proses Gram-Schmidt merupakan salah satu cara untuk mengkonversikan suatu basis sebarang menjadi sebuah basis ortogonal. Suatu himpunan vektor S dikatakan basis sebarang ruang vektor V apabila S bebas linier serta S

membangun V. Secara umum, proses Gram-Schmidt untuk suatu himpunan $U = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ pada V sebagai berikut:

$$\boldsymbol{v_k} = \boldsymbol{u_k} - \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k-1}} \frac{\langle \boldsymbol{u_k}, \boldsymbol{v_j} \rangle}{\|\boldsymbol{v_j}\|^2} \boldsymbol{v_j}\,, \qquad k = 1,2, \dots, n,$$

dengan $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{u_1}$ dan $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ merupakan hasil Gram-Schmidt yang berupa himpunan ortogonal maupun ortonormal.

Contoh 2.5 (Resmawan, 2019)

Diberikan $V = \mathbb{R}^3$ dengan hasil kali dalam Euclid. Dengan menggunakan proses Gram-Scmidt, ortonormalkan basis $\{(1,-1,1), (1,0,1), (1,1,2)\}$.

Penyelesaian:

Misal $\boldsymbol{u}_1 = (1,-1,1), \boldsymbol{u}_2 = (1,0,1), \boldsymbol{u}_3 = (1,1,2)\}$. Dengan menggunakan Proses Gram-Schmidt diperoleh,

$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1,-1,1)$.

$$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{u_2} - \frac{\langle \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{v_1}\|^2} \boldsymbol{v_1} = (1{,}01) - \frac{1.1 + 0.(-1) + 1.1}{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2} (1,-1,1)$$

$$= (1,0,1) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{u_3} - \frac{\langle \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{v_1}\|^2} \boldsymbol{v_1} - \frac{\langle \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{v_2} \rangle}{\|\boldsymbol{v_2}\|^2} \boldsymbol{v_2}$$

$$= (1,1,2) - \frac{1.1 + 1.(-1) + 2.1}{3} (1,-1,1) - \frac{1.\frac{1}{3} + 1.\frac{2}{3} + 2.\frac{1}{3}}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)^2} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (1,1,2) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Dengan demikian, diperoleh basis ortogonal $\left\{(1,-1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$. Selanjutnya, akan dilakukan normalisasi untuk memperoleh basis ortonormal $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$.

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v_2}\|} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v_3}\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Jadi, diperoleh basis ortonormal $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

2.2.4 Ekuivalensi, Kekonvergenan dan Kelengkapan

Ekuivalensi, kekonvergenan serta kelengkapan yang akan dibahas yakni pada ruang bernorma. Untuk lebih jelasnya, penjelasannya diuraikan sebegai berikut.

Definisi 2.5 *(Ekuivalensi)*

Suatu norma $\|.\|$ pada sebuah ruang vektor X dikatakan ekuivalen dengan norma $\|.\|_0$ di X jika terdapat bilangan positif a, b sedemikian sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ berlaku,

$$a\|\boldsymbol{x}\|_0 \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq b\|\boldsymbol{x}\|_0.$$

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.6

Tunjukkan bahwa dua norma $\|.\|_1$ dan $\|.\|_2$ pada ruang bernorma linier $\mathbb{R}^2$ adalah ekuivalen, dengan $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

<u>Penyelesaian:</u>

Perhatikan bahwa, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$, $|x_1|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$ dan $|x_2|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$. Sehingga,

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\boldsymbol{x}\|_1.$$

Diperoleh, $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\|\boldsymbol{x}\|_1{}^2 = x_1^2 + x_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 2(\max\{|x_1|, |x_2|\})^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|_2{}^2.$$

Dengan demikian, diperoleh $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$. Jadi, terdapat dua bilangan positif $a = 1$ dan $b = \sqrt{2}$ sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{2}\|\boldsymbol{x}\|_2$. Berdasarkan Definisi 2.3, norma $\|.\|_1$ dan $\|.\|_2$ adalah ekuivalen. ■

Definisi 2.6 *(Barisan Konvergen)*

Barisan (x_n) *di ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *konvergen ke* $\boldsymbol{x} \in X$, *jika setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sedemikian sehingga untuk setiap* $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$ *atau* $\lim_{n\to\infty} x_n = \boldsymbol{x}$.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.7 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|.\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$ dan $X = [0,1]$. Tunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ dengan $n = 1,2, ...$ konvergen ke 0 pada X.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, hal ini berarti $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi, untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\|\frac{1}{n} - 0\right\| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Dengan demikian diperoleh $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Berdasarkan Definisi 2.6 barisan (x_n) konvergen ke $0 \in X$. ■

Definisi 2.7 ***(Barisan Cauchy)***

Barisan (x_n) *dalam ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat bilangan asli* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk semua* $m, n > n_0$ *berlaku*

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Jika setiap barisan Cauchy di $(X, \|.\|)$ *konvergen ke suatu* $x \in X$, *maka* $(X, \|.\|)$ *merupakan Ruang Banach.*

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.8 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|.\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$. Tunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ dengan $n = 1,2, \ldots$ merupakan barisan Cauchy pada X.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, hal ini berarti $\frac{2}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{2}{\varepsilon} < n_0$ atau $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Jadi, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_m - x_n\| = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan demikian, diperoleh $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Berdasarkan Definisi 2.7, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X. ■

Contoh 2.9 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ merupakan ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Tunjukkan bahwa $(X, \|.\|)$ adalah ruang Banach.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang barisan Cauchy (x_m) di $\mathbb{R}^n$. Karena (x_m) merupakan barisan Cauchy, maka berdasarkan Definisi 2.7 diperoleh, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $m, r \geq n_0$ sedemikian sehingga

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i{}^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Kuadratkan kedua ruas, diperoleh, untuk $m, r \geq n_0$ dan $i = 1,2, \dots, n$

$$\left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i{}^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

$$\left|\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i{}^{(r)}\right| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap i yang tetap $(1 \leq i \leq n)$, barisan $\left(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ merupakan ruang Banach, maka setiap barisan $\left(\alpha_i{}^{(r)}\right)$ di $\mathbb{R}$ konvergen ke $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, didefinisikan $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Misalkan $r \to \infty$, maka $\left(\alpha_i{}^{(r)}\right) \to \alpha_i$ untuk $1 \leq i \leq n$, diperoleh

$$\left|\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right| < \varepsilon,$$

sehingga untuk $1 \leq i \leq n$,

$$\left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right)^2 < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right) < \varepsilon.$$

Atau dapat ditulis,

$$\|x_m - \boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i{}^{(m)} - \alpha_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Berdasarkan Definisi 2.6, barisan Cauchy (x_m) di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan berdasarkan definisi kelengkapan, ruang bernorma $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ adalah lengkap. Dengan demikian, $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ adalah ruang Banach. ■

Teorema 2.1 ***(Ketaksamaan Hadamard)***

Misalkan $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ *merupakan vektor di* X *dan* $A = (\boldsymbol{a_1} \;\; \boldsymbol{a_2} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{a_n})$, *maka*

$$|det(A)| \leq \prod_{n=1}^{N} \|\boldsymbol{a}_n\|.$$

Bukti.

Berdasarkan dekomposisi QR, sebarang matriks A dapat ditulis $A = QR$, dengan Q matriks ortogonal dan R matriks segitiga atas. Misalkan $\boldsymbol{q}_j$ menyatakan kolom dari Q dan $\boldsymbol{a}_j$ menyatakan kolom dari A untuk $j = 1,2,\dots,n$ serta r_{ij} menyatakan entri dari R, maka diperoleh

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij}\boldsymbol{q}_i.$$

Perhatikan bahwa,

$$\|\boldsymbol{a}_j\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{j} r_{ij}\boldsymbol{q}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{j} |r_{ij}|^2 \|\boldsymbol{q}_j\|^2 \geq |r_{jj}|^2 \quad \Rightarrow \quad |r_{jj}|^2 \geq \|\boldsymbol{a}_j\|^2.$$

Karena matriks R merupakan matriks segitiga atas, maka determinannya $\prod_{j=1}^{n} r_{jj}$, dan matriks Q merupakan matriks ortogonal, maka $\det(Q) = 1$. Selanjutnya karena $A = QR$, maka berdasarkan sifat determinan matriks, yakni jika $C = AB$, maka $\det(C) = \det(A)\det(B)$, diperoleh,

$$|\det(A)| = |\det(Q)||\det(R)| = 1.\left|\prod_{j=1}^{n} r_{jj}\right| \leq \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|,$$

sehingga diperoleh $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\|$. ■

(Kreyszig, 1978).

Teorema 2.2 *(Ketaksamaan Bessel)*

Jika $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *himpunan ortonormal di ruang vektor* V *maka untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in V$ *berlaku*

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Bukti.

Misalkan $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ himpunan ortonormal di ruang vektor V. Misalkan $\boldsymbol{h} = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k$. Ambil $\boldsymbol{x} \in V$ sebarang. Dengan menggunakan sifat-sifat hasil kali dalam, diperoleh,

$$\|\boldsymbol{h}\|^2 = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k, \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \rangle.$$

Karena $\sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \in \mathbb{R}$, maka berdasarkan Definisi 2.2(3) diperoleh,

$$\|\boldsymbol{h}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2 \langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k \rangle.$$

Ingat bahwa $\boldsymbol{e}_k$ merupakan himpunan ortonormal, sehingga $\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k \rangle = 1$. Oleh karena itu, $\|\boldsymbol{h}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2$. Selanjutnya, perhatikan

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}\|^2 = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h} \rangle.$$

Berdasarkan Definisi 2.2(2), diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \rangle + \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \rangle + \|\boldsymbol{h}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2 \langle \boldsymbol{x}, \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2.
\end{aligned}$$

Sekarang perhatikan bahwa

$$\langle \boldsymbol{x}, \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle^2.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.3(1), $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}\|^2 \geq 0$. Dengan demikian,

$$0 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle|^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k \rangle|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 . \qquad \blacksquare$$

(Conway, 1997).

2.3 Ruang Bernorma-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2

Selain ruang bernorma dan ruang hasil kali dalam, terdapat pula ruang bernorma-2 dan ruang hasil kali dalam-2.

2.3.1 Ruang Bernorma-2

Definisi 2.8 (*Ruang Bernorma-2)*

Misalkan X *adalah ruang vektor riil berdimensi* d, *dengan* $d \geq 2$. *Suatu fungsi bernilai riil tak negatif yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan* $\|\boldsymbol{x}\|: X \times X \to \mathbb{R}$, *sehingga untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *memenuhi sifat-sifat dibawah ini:*

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika* x *dan* y *bergantung linier*
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$,

disebut sebagai norma-2 di X, *dan pasangan* $(X, \|.,.\|)$ *disebut suatu ruang bernorma-2.*

(Gähler, 1964).

Contoh 2.10 (Handayani, 2013)

Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dan didefinisikan

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left| det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right|,$$

dengan $\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}), i \in \{1,2\}$. Tunjukkan bahwa fungsi $\|.,.\|$ merupakan norma-2.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   (⇐) Misalkan $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = 0$, maka

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left| det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right| = |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}| = 0.$$

   Diperoleh,

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{11}x_{22} = x_{12}x_{21}.$$

   Sehingga, dapat ditulis

$$x_{11} = \frac{x_{12}x_{21}}{x_{22}};\ x_{12} = \frac{x_{12}x_{22}}{x_{22}}.$$

   Untuk x_{22} tak nol, misalkan $p = \frac{x_{12}}{x_{22}}$, maka

$$(x_{11}, x_{12}) = p(x_{21}, x_{22})$$
$$\boldsymbol{x_1} = p\boldsymbol{x_2}.$$

   Jadi, $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   Untuk $x_{22} = 0$, maka diperoleh,

$$x_{11}.0 = x_{12}x_{21}$$
$$0 = x_{12}x_{21}.$$

   Artinya, $x_{12} = 0$ atau $x_{21} = 0$. Jika $x_{12} = 0$, maka diperoleh $\boldsymbol{x_1} = (x_{11}, 0)$ dan $\boldsymbol{x_2} = (x_{21}, 0)$. Jika $x_{21} = 0$, maka $\boldsymbol{x_1} = (x_{11}, x_{12})$ dan $\boldsymbol{x_2} = (0,0)$. Karena $\boldsymbol{0}$ selalu bergantung linier dengan semua vektor, maka $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier.

   (⇒) Misalkan $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ bergantung linier. Dapat ditulis $\boldsymbol{x_1} = k\boldsymbol{x_2}$, sehingga diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left| det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right| = \left| det \begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right|.$$

   Dengan menggunakan sifat determinan, yakni jika semua unsur dalam suatu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan, determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu (Imrona, 2005), diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} kx_{21} & kx_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = \left|k\ det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$
$$= |k||x_{21}x_{22} - x_{22}x_{21}| = 0.$$

Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \|\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}\|$.

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|$$
$$= |-1(x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22})| = |x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22}|$$
$$= \left|det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ x_{22} & x_{12} \end{pmatrix}\right|.$$

Berdasarkan sifat determinan bahwa $det(A) = det\ (A)^T$ maka diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ x_{22} & x_{12} \end{pmatrix}^T\right| = \left|det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix}\right| = \|\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}\|.$$

Jadi, aksioma 2 terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\|$.

Dengan menggunakan sifat determinan diperoleh,

$$\|\alpha\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = \left|\alpha . det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$
$$= |\alpha|\left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| = |\alpha|\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\|.$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}\| \leq \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}\|$.

$$\|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_2}\| = \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} + x_{31} & x_{22} + x_{32} \end{pmatrix}\right|$$
$$= |x_{11}(x_{22} + x_{32}) - x_{12}(x_{21} + x_{31})|$$
$$= |(x_{11}x_{22} + x_{11}x_{32}) - (x_{12}x_{21} + x_{12}x_{31})|$$
$$= |x_{11}x_{22} + x_{11}x_{32} - x_{12}x_{21} - x_{12}x_{31}|$$
$$= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}|$$
$$\leq |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}| + |x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}|$$
$$= \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right| + \left|det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right|$$
$$= \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_3}\|.$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

$\therefore$ fungsi $\|.,.\|$ merupakan norma-2. ■

Proposisi 2.1

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ *adalah ruang bernorma-2, maka untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$ *berlaku:*

a. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$.
b. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$.

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$ menggunakan definisi norma-2.

Berdasarkan aksioma 4 diperoleh:

$$\|\boldsymbol{x}, 0\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\|$$

Perhatikan bahwa berdasarkan Definisi 2.8(3), diperoleh $\|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\| = |-1|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$. Selanjutnya, dengan menggunakan aksioma yang sama, diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}.\boldsymbol{y}\| = \boldsymbol{0}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$. Dengan demikian,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}\|$$
$$\boldsymbol{0}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$
$$0 \leq 2\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$
$$0 \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$$
$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$$
■

b. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$ menggunakan sifat norma-2.

Berdasarkan Definisi 2.8(4) diperoleh:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}\|$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.8(3), maka

$$\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\|$$
$$\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + |\boldsymbol{\alpha}|.\,0$$
$$\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|.$$

Sehingga, diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$.

Perhatikan bahwa, dengan menggunakan Definisi 2.8(4) dapat ditulis,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}, -\alpha\boldsymbol{x}\|$$

Berdasarkan Definisi 2.8(3) maka $\|\boldsymbol{x}, -\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\|$. Dengan Definisi 2.8(1) diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\| = 0$, sehingga$\|\boldsymbol{x}, -\alpha\boldsymbol{x}\| = 0$. Dengan demikian,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\|.$$

Karena $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\|$, maka terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$. ■

(Nur, 2012).

2.3.2 Ruang Hasil Kali Dalam-2

Definisi 2.9 ***(Ruang Hasil Kali Dalam-2)***

Misalkan X ruang vektor, maka pemetaan $\langle .,.|.\rangle : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ yang bersifat:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle \geq 0$ *serta* $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ *bergantung linier untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in X$.
2. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}\rangle$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in X$.
3. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$.
4. $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{x}'. \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$.

Merupakan hasil kali dalam-2 pada X, dan pasangan $(X, \langle .,.|.\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2.

(Manuhutu dkk, 2014).

Contoh 2.11 (Manuhutu dkk, 2014)

Didefinisikan sebuah fungsi pada $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}.$$

Periksa apakah $(\mathbb{R}^n, \langle .,.|.\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2.

<u>Penyelesaian:</u>

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle .,.|.\rangle$ memenuhi sifat-sifat norma-2.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{z}$ bergantung linier.

(⇨)Misalkan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = 0$. Andaikan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ bebas linier, dengan menggunakan metode Gram-Schmidt diperoleh $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'$ yang saling ortogonal dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ ekuivalen dengan $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'$. Dengan demikian,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'\rangle & \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{x}'\rangle & \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'\rangle \end{vmatrix}.$$

Karena $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'$ saling ortogonal, maka berdasarkan Definisi 2.4 $\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'\rangle = \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{x}'\rangle = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'\rangle & \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}'\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{x}'\rangle & \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'\rangle & 0 \\ 0 & \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'\rangle \end{vmatrix} = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'\rangle\langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'\rangle.$$

Berdasarkan Definisi 2.2(4), $\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'\rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}' = 0$, serta $\langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}'\rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{z}' = 0$. Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ bebas linier, maka $\boldsymbol{x}' \neq 0$ dan $\boldsymbol{z}' \neq 0$. Dengan demikian,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Hal ini bertentangan dengan pemisalan di awal, yakni $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = 0$ sehingga pengandaian salah. Dengan demikian, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ bergantung linier.

(⇨)Misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ bergantung linier. Artinya, dapat ditulis $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{z}$ dengan $k \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan sifat-sifat hasil kali dalam, diperoleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle k\boldsymbol{z}, k\boldsymbol{z}\rangle & \langle k\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, k\boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k^2\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & k\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \\ k\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya menggunakan sifat determinan, diperoleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = k\begin{vmatrix} k\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \\ k\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= k^2(\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle^2 - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}\rangle^2) = k^2.0 = 0.$$

$\langle .,.|.\rangle$ memenuhi aksioma 1.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}\rangle$.

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$
$$= \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}\rangle.$$

$\langle .,.|.\rangle$ memenuhi aksioma 2.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle$.

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}^T$$
$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$
$$= \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle.$$

$\langle .,.|.\rangle$ memenuhi aksioma 3.

4. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle$.

$$\langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$
$$= \alpha \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} = \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle.$$

$\langle .,.|.\rangle$ memenuhi aksioma 4.

5. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{x}'.\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle$.

$$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \left| det\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{pmatrix} \right|$$

$$\le \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}\rangle \\ \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{x}'.\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle.$$

$\langle .,.|.\rangle$ memenuhi aksioma 5.

Jadi, $(\mathbb{R}^n, \langle .,.|.\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2. ■

Teorema 2.3 ***(Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)***

Misalkan $(X, \langle .,. | . \rangle)$ *adalah ruang hasil kali dalam-2, maka untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ *berlaku Ketaksamaan Cauchy Schwarz, yakni:*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle| \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Bukti.

Perhatikan bahwa untuk $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\langle \alpha \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \alpha \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle \geq 0.$$

Dengan menggunakan sifat-sifat hasil kali dalam-2 dapat ditulis,

$$\langle \alpha \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \alpha \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle + \langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle \geq 0.$$

Diperoleh,

$$\alpha^2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle + 2\alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle \geq 0.$$

Persamaan di atas merupakan suatu persamaan kuadrat yang tak negatif, sehingga menghasilkan

$$4 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle^2 - 4 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle \leq 0.$$

Kedua ruas dibagi dengan 4, sehingga,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{z} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{z} \rangle^{\frac{1}{2}}. \qquad \blacksquare$$

(Manuhutu dkk, 2014).

Teorema 2.4

Misalkan $(X, \langle .,. | . \rangle)$ *ruang hasil kali dalam-2, maka*

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

merupakan norma-2 pada X.

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

   ($\Rightarrow$) Misalkan $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = 0$, diperoleh,
$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}} = 0.$$
   Sehingga, $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = 0.$ Berdasarkan Definisi 2.9(1), $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

   ($\Leftarrow$) Misalkan $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ bergantung linier, maka berdasarkan Definisi 2.9(1) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = 0$. Sehingga,
$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}} = 0^{\frac{1}{2}} = 0.$$
   Jadi, aksioma 1 norma-2 terpenuhi.
2. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|$.
$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$
   Berdasarkan Definisi 2.9(2) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle$. Sehingga,
$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\|.$$
   Jadi, aksioma 2 norma-2 terpenuhi.
3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|$.
$$\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = \langle \alpha\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$
   Berdasarkan Definisi 2.9(4), diperoleh,
$$\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\| = (\alpha^2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\|.$$
   Jadi, aksioma 3 norma-2 terpenuhi.
4. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| \le \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|$.
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle.$$
   Berdasarkan Definisi 2.9(5), diperoleh,
$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle\\ &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle\\ &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle.\end{aligned}$$
   Dengan menggunakan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, maka
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|^2 \le \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle$$

$$= \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|^2$$
$$= (\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|).$$

Jadi, aksioma 4 norma-2 terpenuhi.

Dengan demikian, Teorema 2.4 terbukti. ■

(Manuhutu dkk, 2014).

Akibat 2.1

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz pada Teorema 2.3 dapat ditulis sebagai

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle \leq \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\|.$$

2.4 Titik Tetap

Suatu titik tetap diperoleh melalui sebuah pemetaan. Untuk itu, pada sub-bagian ini sebelum masuk dalam penjelasan tentang titik tetap, dijelaskan terlebih dahulu mengenai pemetaan.

Definisi 2.10 ***(Pemetaan)***

Misalkan $(X, \|.\|)$ *dan* $(Y, \|.\|)$ *adalah ruang bernorma. Pemetaan* f *dari himpunan* X *ke himpunan* Y *dinotasikan* $T: X \to Y$ *adalah suatu pengawanan setiap* $\boldsymbol{x} \in X$ *dengan* $\boldsymbol{y} \in Y$ *secara tunggal dan ditulis* $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. *Selanjutnya notasi* $T(\boldsymbol{x})$ *yang menyatakan pemetaan* T *untuk suatu* $\boldsymbol{x} \in X$ *dapat dituliskan menjadi* $T_{\boldsymbol{x}}$.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.12

Misalkan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ adalah ruang bernorma. Salah satu contoh pemetaan $T: X \to Y$ adalah $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$, artinya setiap $\boldsymbol{x} \in X$ dipetakan secara tunggal pada $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x} \in Y$.

Definisi 2.11 ***(Pemetaan Kontraktif)***

Misalkan $(X, \|.\|)$ *adalah ruang bernorma. Pemetaan* $T: X \to X$ *dikatakan pemetaan kontraktif pada* X *jika ada konstanta* $k \in \mathbb{R}$ *dengan* $0 < k < 1$, *berlaku* $\|Tx - Ty\| \leq k\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.13

Misalkan $(X, \|.\|)$ adalah ruang bernorma dengan $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$ dan $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan suatu pemetaan $T: X \to X$, $T_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ untuk $\boldsymbol{x} \in X$. Periksa apakah $T_{\boldsymbol{x}}$ merupakan pemetaan kontraktif.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$. Berdasarkan definisi $T_{\boldsymbol{x}}$ diperoleh $T_{\boldsymbol{x}} = T_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$. Dengan demikian,

$$\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}\| = |T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}| = 0 \leq k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \text{untuk } 0 < k < 1.$$

Jadi, diperoleh $\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}\| \leq k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Berdasarkan Definisi 2.8, $T_{\boldsymbol{x}}$ merupakan pemetaan kontraktif. ■

Definisi 2.12 *(Titik Tetap)*

Diberikan X himpunan tak kosong dan pemetaan $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \in X$ dikatakan titik tetap dari T jika dan hanya jika $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

(Kreyzig, 1978)

Contoh 2.14

Didefinisikan sebuah pemetaan $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $T_{\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{x} - (2,0)$ dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Tentukan titik tetap dari T.

Penyelesaian:

Berdasarkan Definisi 2.9, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ dikatakan titik tetap dari T jika dan hanya jika $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Dengan demikian,

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} - (2,0)$$

$$-\boldsymbol{x} = -(2,0)$$

$$\boldsymbol{x} = (2,0).$$

Jadi, diperoleh titik tetap dari T adalah $(2,0)$.

Teorema 2.5 ***(Teorema Titik Tetap)***

Misalkan $(X, \|.\|)$ *adalah ruang bernorma. Jika* $T: X \to X$ *adalah pemetaan kontraktif pada* X *dan* X *lengkap, maka* T *mempunyai suatu titik tetap yang tunggal (yakni, terdapat* $\boldsymbol{x} \in X$ *sehingga* $T_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$*).*

Bukti.

Misalkan $x_0 \in X$ dan untuk setiap $n \geq 1$ didefinisikan $x_{n+1} = T_{x_{n-1}}$. Ini berarti $x_1 = T_{\boldsymbol{x}_0}$, $x_2 = T_{\boldsymbol{x}_1} = T^2{}_{x_0}$ dan jika dilanjutkan diperoleh $x_{n+1} = T^{n+1}{}_{x_0}$. Akibatnya,

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \left\|T_{x_m} - T_{x_{m-1}}\right\|. \tag{2.1}$$

Karena T kontraktif, maka diperoleh $k \in (0,1)$ sehingga $\left\| T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}\right\| \leq k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Jadi dari Persamaan (2.1) diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1} - x_m\| &= \left\|T_{x_m} - T_{x_{m-1}}\right\| \\
&\leq k\|x_m - x_{m-1}\| \\
&= k\left\|T_{x_{m-1}} - T_{x_{m-2}}\right\| \\
&\leq k^2\|x_{m-1} - x_{m-2}\| \\
&\;\vdots \\
&\leq k^m\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Akibatnya untuk $n > m$,

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - x_{m+2}\| + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\| \\
&\leq k^m\|x_1 - x_0\| + k^{m+1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + k^{n-1}\|x_1 - x_0\| \\
&= (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})\|x_1 - x_0\| \\
&= k^m\left(\frac{1 - k^{n-m}}{1 - k}\right)\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Karena $0 < k < 1$, diperoleh $(1 - k^{n-m}) < 1$. Akibatnya,

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{k^m}{1 - k}\|x_1 - x_0\|.$$

Misalkan $\varepsilon = \frac{k^m}{1-k}\|x_1 - x_0\|$, akibatnya terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ dengan $n > m \geq N$. Ini menunjukkan (x_n) Cauchy. Karena X lengkap, maka (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x} \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $T_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\|T_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| &\leq \|T_{\boldsymbol{x}} - x_n\| + \|x_n - \boldsymbol{x}\| \\ &= \left\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{x_{n-1}}\right\| + \|x_n - \boldsymbol{x}\| \\ &\leq k\|\boldsymbol{x} - x_{n-1}\| + \|x_n - \boldsymbol{x}\|.\end{aligned}$$

Karena $\|x_n - \boldsymbol{x}\| \to 0$ maka $\|T_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| \to 0$. Akibatnya $T_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$, ini menunjukkan $\boldsymbol{x}$ adalah titik tetap dari T. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa titik tetap dari T adalah tunggal. Misalkan $T_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ dan $T_{\overline{\boldsymbol{x}}} = \overline{\boldsymbol{x}}$, sehingga

$$\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\| = \|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\overline{\boldsymbol{x}}}\| \leq k\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\|.$$

Diketahui $0 < k < 1$, maka $\|\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\| = 0$. Akibatnya $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}$. Jadi titik tetap dari T adalah tunggal. ∎

(Kreyszig, 1978).