SKRIPSI

Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)

Disusun dan diajukan oleh

NURUL RASYIDAH RIPUJI MATTENGNGA

H111 16 512

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

April 2021

S K R I P S I

Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar

NURUL RASYIDAH RIPUJI MATTENGNGA

H111 16 512

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

APRIL 2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Nurul Rasyidah Ripuji Mattengnga
NIM	: H11116512
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 23 April 2021

10000
METERAI TEMPEL
B3BCAJX156414746

<u>NURUL RASYIDAH RIPUJI MATTENGNGA</u>

NIM. H 111 16 512

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)

Disusun dan diajukan oleh

NURUL RASYIDAH RIPUJI MATTENGNGA
H111 16 512

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 23 April 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Dr. Khaeruddin, M.Sc.	**Dr. Hendra, S.Si, M.Kom.**
NIP. 19650914 199103 1 001	**NIP. 19760102 200212 1 001**

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Ketua Program Studi

Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP: 19700807 200003 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini telah diajukan oleh:

Nama	:	Nurul Rasyidah Ripuji Mattengnga
NIM	:	H111 16 512
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dewan Penguji

1. Ketua : **Dr. Khaeruddin, M.Sc.** (..........................)
2. Sekretaris : **Dr. Hendra, S.Si., M.Kom.** (..........................)
3. Anggota : **Dr. Firman, M.Si.** (..........................)
4. Anggota : **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** (..........................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 23 April 2021

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Ucapan puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala karunia serta berkat-Nya yang senantiasa memberikan segala nikmat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation* (Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)"** untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tiada tara sebagai wujud penghargaan kepada kedua orang tua tersayang **Akib Simung** dan **Herlina Tahir** yang telah menjadi orang tua terhebat sejagad raya, yang selalu memberikan motivasi, nasehat, cinta, perhatian, dan kasih sayang serta doa yang tentu takkan bisa penulis balas, semoga Allah SWT memberikan kesehatan dan umur panjang yang berkah Aamiin. Dan juga kepada saudara-saudara penulis, **Muh. Insanul Khair** dan **Muh. Akhlaqul Karim,** terima kasih atas kebersamaan dan dukungan yang tiada henti semoga kita selalu dalam lindungan Allah SWT agar selalu menjadi keluarga yang harmonis.

Ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA** selaku Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Bapak **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si** selaku Ketua Departemen Matematika.
2. **Dosen** dan **Staf Departemen Matematika** yang telah memberikan ilmunya kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
3. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.,** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Hendra, S.Si., M.Kom.,** selaku pembimbing pertama, atas kesediaannya untuk membimbing dan memberikan arahan kepada penulis serta meluangkan begitu banyak waktu di tengah berbagai kesibukan dalam pekerjaan hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak **Dr. Firman, M.Si.,** selaku penguji I sekaligus penasehat akademik yang selalu setia membimbing penulis mulai dari awal kuliah sampai tahap akhir dan **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.,** selaku penguji II atas waktu yang telah diluangkan dan kritik serta sarannya yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini.
5. Seseorang yang tidak pernah jenuh terhadap keluh kesah penulis selama penelitian skripsi, **Rinaldi Alfian**, terima kasih atas segala semangat, motivasi, dan kesabarannya sampai saat ini.
6. Sahabat penulis sedari masih duduk di bangku sekolah sembari mengenakan pakaian putih abu abu, **Dirga, Tia, Alim, dan Dandi** serta yang terspesial kepada **Yada**, tempat penulis berbagi cerita suka duka bersama.
7. Sahabat seperjuangan penulis yang telah banyak mengukir hari-hari indah bersama di perkuliahan **Diva, Wiwi, Sisi, Murni, Vira,** dan yang terspesial kepada penghuni BTP Palace, **Nurma dan Hase',** yang telah seperti saudari bagi penulis.
8. Teman-teman penulis yang dengan sangat senang hati ingin direpotkan dalam segala hal, **Ilyas dan Afdal**, serta terkhusus kepada **Zaitun** atas dedikasinya yang dengan tulus dan ikhlas membantu penulis melengkapi skripsi ini.
9. Teman-teman **Matematika 2016** atas segala bentuk dukungan dan bantuan selama proses perkuliahan.
10. Saudara(i) **A16oritma** dan Saudara(i) **MIPA 2016** yang telah memberikan penulis pengalaman yang sangat berharga dan tak bisa dilupakan mulai sejak awal kuliah sampai tahap akhir.
11. Keluarga besar **Himatika FMIPA Unhas** atas pembelajaran yang sangat berharga yang tidak bisa penulis dapatkan di tempat lain serta atas kekeluargaan yang terjalin di dalamnya. Salam ***Queen of Science*** **BRAVO Himatika!!!**
12. Teman-teman **KKN Desa Lattekko Kabupaten Bone** atas pengalaman luar biasa selama 1 bulan di Posko.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu per satu, atas segala bentuk kontribusi, partisipasi, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna karena terbatasnya pengetahuan dan pengalaman yang dimiliki penulis. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membacanya khusunya bagi penulis. Aamiin.

Makassar, 23 April 2021

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nurul Rasyidah Ripuji Mattengnga
NIM	:	H111 16 512
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusif Royalti-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation*

(Studi Kasus: Jadwal Perkuliahan di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin)"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak Universitas Hasanuddin, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama telah mencantumkan nama saya sebagai penulis atau pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Makassar

Pada tanggal : 23 April 2021

Yang menyatakan

(Nurul Rasyidah Ripuji Mattengnga)

ABSTRAK

Penjadwalan perkuliahan merupakan suatu hal yang sangat penting dalam pengelolaan perguruan tinggi. Namun, untuk menyusun sebuah penjadwalan mata kuliah terdapat banyak kendala-kendala yang dapat menyulitkan proses pembuatan jadwal, diantaranya jumlah mahasiswa dan terbatasnya dosen, waktu dan ruangan yang ada. Dalam penelitian ini, masalah penjadwalan mata kuliah dimodelkan ke dalam masalah *Integer Programming*. Selanjutnya, model *Integer Programming* diselesaikan dengan metode pendekatan *Column Generation* karena banyaknya kolom/variabel yang tebentuk. Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu mengimplementasikan dan mengetahui efektivitas pendekatan column generation, dengan menggunakan penjadwalan mata kuliah pada tiga program studi di Departemen Matematika sebagai contoh kasus.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa Meode *Integer Programming* bersama metode pendekatan *Column Generation* dapat menyelesaikan masalah penjadwalan mata kuliah dengan baik dengan inidikasi bahwa tidak ada jadwal yang saling bentrok, begitupula dengan jadwal dosen.

Kata Kunci: Penjadwalan*, Integer Programming, Column Generation*

ABSTRACT

Lecture scheduling is very important in the management of higher education. However, to arrange a course scheduling, there are many constraints that can complicate the schedule making process, including the number of students and the limited number of lecturers, time and space available. In this study, the course scheduling problem is modeled into the Integer Programming problem. Furthermore, the Integer Programming model is solved using the Column Generation approach because of the large number of columns / variables that are formed. The objective of this research is to implement and determine the effectiveness of the column generation approach, using the scheduling of courses in three study programs in the Department of Mathematics as a case example.

The results showed that the Integer Programming Method together with the Column Generation approach method could solve the course scheduling problem well with the indication that there were no conflicting schedules, neither did the lecturers' schedules.

Keywords: Scheduling, Integer Programming, Column Generation

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengaturan waktu terhadap suatu kegiatan merupakan hal yang penting dilakukan agar kegiatan tersebut berlangsung secara lancar. Pengaturan waktu tersebut biasa disebut penjadwalan (Suhartono, 2015). Penjadwalan merupakan proses pengorganisasian, pemilihan, dan penentuan waktu penggunaan sumberdaya yang ada untuk menghasilkan output seperti yang diharapkan dalam waktu yang diharapkan juga (Lesmana, 2016). Penyusunan jadwal kegiatan berkaitan dengan berbagai batasan/kendala yang harus dipenuhi sehingga memerlukan banyak pertimbangan untuk mendukung kegiatan tersebut. Ada berbagai masalah penjadwalan di dunia nyata seperti alokasi kejadian, kegiatan, orang, kendaraan, dll. Sebagian besar kasus penjadwalan yang bisa diterapkan sangat sulit dicapai karena sumber daya (waktu, tempat, orang, dll) yang terbatas (Suhartono, 2015). Jadi penentuan sebuah jadwal yang efisien menjadi masalah penting.

Di dalam perkuliahan disuatu perguruan tinggi penjadwalan merupakan suatu hal yang sangat penting, karena pelaksanaan kegiatan perkuliahan melibatkan banyak aspek yang saling berkaitan satu sama lain dan masing-masing memiliki prioritas yang berbeda-beda. Aspek-aspek yang menjadi bahan pertimbangan dalam penjadwalan antara lain adalah jumlah mahasiswa, dosen, waktu, ruangan serta persyaratan-persyaratan lainnya (Rahman dkk, 2014).

Pada suatu perguruan tinggi, semakin bagus sistem penjadwalan perkuliahan, maka akan semakin teratur dan optimal pula proses belajar mengajar pada perguruan tinggi tersebut. Namun pada kenyataannya untuk menyusun sebuah penjadwalan perkuliahan, terdapat banyak kendala-kendala yang dapat menyulitkan proses pembuatan jadwal. Maka dari itu, diperlukan metode-metode yang efisien untuk menyelesaikan masalah penjadwalan dalam suatu perguruan tinggi. Adapun salah satu metode yang telah sering digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan adalah metode *integer programming*.

Integer Programming (Program Bilangan Bulat) merupakan bagian dari program linear dengan tambahan kendala, dimana beberapa atau semua variabel keputusannya memiliki nilai-nilai bilangan bulat (Widiasih, 2007). Pada dasarnya, masalah optimasi dapat dipecahkan atau dicari solusinya yaitu salah satunya dengan menggunakan teknik-teknik penyelesaian dalam program linier. Namun, di dalam suatu penjadwalan tidak ada variabel yang bernilai pecahan. Sehingga, teknik yang lebih efisien untuk menyelesaikan masalah penjadwalan adalah pemrograman bilangan bulat. Pemograman bilangan bulat (*integer programming*) adalah sebuah model penyelesaian matematis yang memungkinkan hasil penyelesaian kasus program linier yang berupa bilangan pecahan diubah menjadi bilangan bulat tanpa meninggalkan optimalisasi penyelesaian (Kamila dkk, 2018).

Pada beberapa kasus penjadwalan sulit diselesaikan menggunakan pemrograman bilangan bulat karena banyaknya variabel yang digunakan. Sehingga, salah satu cara menyelesaikan pemograman linier bilangan bulat adalah dengan menggunakan metode pembangkit kolom (*Column Generation*). Metode *Column Generation* telah sukses digunakan untuk penyelesaian beberapa optimasi kombinatorik dan masalah penjadwalan (Kamila dkk, 2018).

Oleh karena itu, berdasarkan hal tersebut, peneliti akan membahas mengenai **"Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah dengan Pendekatan *Column Generation*"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah:

a. Bagaimana cara mengimplementasikan metode pendekatan *Column Generation* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan mata kuliah?
b. Bagaimana efektivitas pendekatan *Column Generation* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan mata kuliah?

1.3 Batasan Masalah

Adapun masalah yang dibahas dalam penelitian ini mengambil kasus pada Departemen Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin untuk semester genap tahun ajaran 2019/2020 yang dibatasi dengan:

a. Pada hari jumat dan selasa siang tidak boleh ada mata kuliah yang dijadwalkan.
b. Mata kuliah yang dijadwalkan tidak termasuk mata kuliah yang disediakan MKU. Tetapi tetap memperhatikan penjadwalan mata kuliah dari MKU.
c. Daya tampung ruangan atau jumlah mahasiswa dalam suatu kelas tidak mempengaruhi penelitian.
d. Pemilihan waktu oleh dosen untuk mengajar diwaktu-waktu tertentu diabaikan.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah:

a. Mengimplementasikan pendekatan *Column Generation* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan mata kuliah.
b. Mengetahui efektivitas pendekatan *Column Generation* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan mata kuliah.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan akan memberikan dan meningkatkan pemahaman tentang penggunaan *Column Generation* dalam proses optimasi masalah penjadwalan serta dapat dimanfaatkan oleh institusi pendidikan, khususnya pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin, dalam penentuan jadwal perkuliahan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Linier Programming

Program Linier (*Linier Programming)* merupakan teknik aplikasi dari matematika yang dikembangkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947. Kata "linier" berarti bahwa seluruh fungsi persamaan atau pertidaksamaan matematis yang disajikan dari permasalahan ini haruslah bersifat linier, sedangkan kata "program" merupakan sinonim untuk model perencanaan. Jadi, program linier merupakan perencanaan kegiatan-kegiatan untuk mencapai hasil yang optimal, yaitu suatu hasil yang mencerminkan tercapainya sasaran atau tujuan tertentu yang paling baik. Dengan demikian, pemrograman linier merupakan proses penyusunan program linier yang solusinya menjadi dasar bagi pengambilan keputusan terhadap masalah riil yang dimodelkan atau diprogramlinierkan. Program linier berkaitan dengan penjelasan suatu dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri atas sebuah fungsi tujuan.

Definisi sederhana dari program linier adalah suatu cara/teknik aplikasi matematika untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber terbatas di antara beberapa aktivitas yang bertujuan untuk memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya yang dibatasi oleh batasan-batasan tertentu, atau dikenal juga dengan teknik optimalisasi, dan sistem kendala linier (Rafflesia & Widodo, 2014).

Bentuk umum masalah program linier sebagai berikut:

Maksimumkan atau Minimumkan :

$$Z = \sum_{j \in J}^{n} c_j x_j$$

dengan kendala:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \leq b_i \qquad \text{dengan } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \geq b_i \qquad \text{dengan } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} = b_i \qquad \text{dengan } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\text{dan } x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Keterangan :

Z = fungsi tujuan yang merupakan nilai optimal

x_j = tingkat kegiatan ke-j

c_j = kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan unit setiap satu satuan keluaran kegiatan j terhadap Z.

a_{ij} = banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan j.

b_i = kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan

n = macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia

m = macam batasan atau fasilitas yang tersedia

Setiap masalah program linier dapat diubah kedalam bentuk baku. Suatu program linier dikatakan dalam bentuk baku jika semua kendalanya berupa persamaan dan semua variabel bernilai nonnegatif. Langkah-langkah dalam mengubah suatu bentuk umum masalah program linier ke dalam bentuk baku adalah sebagai berikut:

1) Jika kendala ke-i berupa pertidaksamaan $\leq$, maka kendala tersebut diubah kedalam bentuk persamaan dengan menambah *slack variable* (s_i) pada ruas kiri kendala ke-i, dengan $s_i \geq 0$. Sedangkan, pada fungsi tujuan ditambahkan dengan $0s_i$.
2) Jika kendala ke-i berupa pertidaksamaan $\geq$, maka kendala tersebut diubah kedalam bentuk persamaan dengan menambah *surplus variable* $(-e_i)$ pada ruas kiri kendala ke-i, dengan $e_i \geq 0$. Sedangkan, pada fungsi tujuan ditambahkan dengan $0e_i$.

Secara matematis, bentuk baku dari program linier dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Z = c^T x \tag{2.1}$$

dengan kendala:

$$Ax = b_i \tag{2.2}$$

$$x \geq 0 \tag{2.3}$$

dengan,

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{dan } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dimana c^T adalah matriks transpose dari *c*.

2.1.1 Metode Simpleks

Metode simpleks pertama kali diperkenalkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947 dan telah diperbaiki oleh beberapa ahli lain. Metode ini menyelesaikan masalah program linier melalui perhitungan ulang (iterasi) dimana langkah-langkah perhitungan yang sama diulang berkali-kali sebelum solusi optimum dicapai. (Mulyono, 2017)

Secara umum, langkah-langkah penyelesaian masalah program linier dengan metode simpleks adalah sebagai berikut:

1) Konversikan masalah program linier ke dalam bentuk baku.
2) Menyusun persamaan-persamaan di dalam tabel simpleks
3) Menentukan kolom kunci adalah dengan memilih kolom yang mempunyai nilai negatif dengan angka terbesar pada baris fungsi tujuan
4) Menentukan baris pivot (baris kunci). Pilihlah baris dengan hasil bagi antara nilai RHS positif dengan angka pada kolom kuncinya yang terkecil. Angka yang berada pada baris kunci dan kolom kunci disebut angka kunci.

Adapun tabel dari metode simpleks dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Metode Simpleks

Basis variabel	x_1	...	x_n	s_1	...	s_n	e_1	...	e_n	RHS	Ratio
s_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	0	...	0	b_1	
$\vdots$	a_{21}	...	a_{2n}	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0	...	0	b_2	
s_n	a_{31}	...	a_{3n}	0	...	1	0	...	0	b_3	
e_1				0	...	0	-1	...	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0	...	0	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	

Basis variabel	x_1	...	x_n	s_1	...	s_n	e_1	...	e_n	RHS	Ratio
e_n	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	0	0	...	-1	b_m	
Z	c_1	...	c_n	0	0	0	0	...	0		

Kolom *Ratio* merupakan kolom yang digunakan untuk mempermudah menentukan angka kunci.

2.2 Integer Programming

Integer Programming (Program Bilangan Bulat) muncul karena tidak semua variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan, melainkan bilangan bulat. Misalnya, jika variabel keputusan yang dihadapi berkaitan dengan banyaknya mesin, orang, dan sebagainya. Program bilangan bulat adalah suatu model program linier dengan variabel yang digunakan berupa bilangan bulat (integer). Ada tiga jenis program bilangan bulat, yaitu integer murni (semua variabel keputusan bernilai bilangan cacah atau bulat), integer 0-1 (variabel keputusan bernilai 0 atau 1) dan integer campuran (variabel keputusan bilangan bulat dan pecahan).

Secara matematis, program bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai berikut:

Maksimumkan:

$$Z = \sum_{j \in J}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

dengan kendala:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{dengan } i = 1, 2, 3, \dots, m \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J \tag{2.6}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in J \tag{2.7}$$

Dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

2.3 Branch and Bound

Teknik Branch and Bound merupakan teknik solusi untuk persoalan *integer programming*. Prinsip yang mendasari teknik ini adalah bahwa total himpunan solusi yang fisibel dapat dibagi menjadi subset-subset solusi yang lebih kecil. Subset-subset ini selanjutnya dapat dievaluasi secara sistematis sampai solusi yang terbaik ditemukan. Teknik Branch and Bound pada persoalan *integer programming* digunakan bersama-sama dengan metode simpleks. Teknik ini menggunakan suatu diagram yang terdiri dari node dan cabang (branch) sebagai suatu kerangka dalam proses pemerolehan solusi optimal. Masing-masing node memuat solusi program linier relaksasi sesuai dengan fungsi tujuan dan batasannya. Node pertama akan memuat solusi program linier relaksasi dari persoalan yang diberikan. Node kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya memuat solusi program linier relaksasi dari persoalan yang diberikan ditambah dengan batasan yang terdapat pada masing-masing cabangnya.

Langkah-langkah penggunaan teknik Branch and Bound adalah sebagai berikut:

1. Dapatkan solusi simpleks optimal dari program linier relaksasi yang bersangkutan.
2. Solusi yang dihasilkan pada langkah 1 dinyatakan sebagai batas atas (upper bound) dan pembulatan ke bawah sebagai batas bawah (lower bound) pada node 1.
3. Pilihlah variabel dengan pecahan yang terbesar untuk pencabangan (branch). Ciptakan dua batasan baru untuk variabel ini. Hasilnya adalah sebuah batasan $\leq$ dan sebuah batasan $\geq$.
4. Ciptakan dua node baru, satu dengan batasan $\leq$ dan satu dengan batasan $\geq$.
5. Selesaikan model program linier relaksasi dengan batasan baru yang ditambahkan pada tiap node.
6. Solusi simpleks relaksasi adalah merupakan batas atas pada tiap node, dan solusi bilangan bulat maksimum yang ada (pada node mana saja) adalah merupakan batas bawah.
7. Jika proses ini menghasilkan solusi bilangan bulat fisibel dengan nilai batas atas pada akhir node mana saja, maka solusi bilangan bulat optimal telah tercapai. Jika tidak muncul solusi bilangan bulat fisibel, lakukan pencabangan dari node dengan batas atas terbesar. (Nufus & Nurdin, 2016)

2.4 Column Generation

Beberapa masalah program linier yang berkembang dari masalah kombinatorial menjadi sulit ditangani karena banyaknya variabel/kolom yang terlibat. Variabel ini biasanya merepresentasikan pola kemungkinan solusi.

Kesulitan yang dihadapi adalah terlalu banyak kemungkinan pola yang memenuhi syarat kendala dari masalah program linier tersebut. Metode *column generation* merupakan salah satu metode yang cukup efisien untuk menyelesaikan masalah program linier, khususnya masalah pemrograman linier bilangan bulat, yang melibatkan banyak kolom yang sangat besar.

Metode *column generation* pertama kali digunakan oleh Gilmore dan Gomory dalam penyelesaian *cutting stock problem* satu dimensi (Lubbecke, M.E dan J. Desrosiers, 2002). Ide *column generation* adalah cukup dengan menggunakan subhimpunan dari himpunan kolom yang besar dalam menyelesaikan masalah, kemudian kolom baru ditambahkan ke dalam subhimpunan tersebut hanya saat diperlukan, yaitu ketika variabel yang bersesuaian dengan kolom tersebut berpotensi mengoptimalkan fungsi tujuan. Dalam *column generation* masalah didekomposisi menjadi 2 bagian, yaitu *master problem* dan subproblem.

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan program linier dengan metode Column Generation yaitu:

2.4.1 *Master Problem* (MP)

Dalam menyelesaikan *integer programming* dengan metode column generation terlebih dahulu membuat model matematika dari permasalahan yang ada (fungsi objektif dan fungsi kendala). Model matematika inilah yang disebut sebagai *Master Problem* (MP).

Perhatikan masalah *integer programming* pada persamaan (2.4) – (2.7), dengan selanjutnya disebut sebagai *master problem* (MP) dan misalkan J adalah himpunan kolom dari MP, dengan

Maksimumkan:

$$Z = \sum_{j \in J}^{n} c_j x_j \tag{2.8}$$

dengan kendala:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{dengan} \quad i \in I \tag{2.9}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j \in J \tag{2.10}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \qquad j \in J \tag{2.11}$$

2.4.2 *Restricted Master Problem* (RMP)

Langkah pertama dalam menyelesaikan MP atau inisialisasi metode *column generation* adalah dengan membentuk *restricted master problem* (RMP) yaitu MP yang hanya menggunakan subhimpunan J', dengan $J' \subset J$, dengan J adalah himpunan semua pola yang *feasible* untuk mengoptimalkan fungsi tujuan. Salah satu cara dalam membentuk RMP adalah dengan memilih secara acak kolom yang mungkin mengoptimalkan fungsi objektif dan mengubah masalah program bilangan bulat ke dalam bentuk program linier relaksasi. Sehingga didapat RMP untuk masalah ini adalah:

Maksimumkan:

$$Z = \sum_{j \in J} c_j x_j \tag{2.12}$$

dengan kendala:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{dengan} \quad i \in I \tag{2.13}$$

$$x_j \geq 0, \qquad J \in J' \tag{2.14}$$

Setelah membentuk RMP seperti diatas yang disebut sebagai masalah primal program linier, selanjutnya menyelesaikan RMP dengan metode simpleks.

2.4.3 Dualitas

Setiap masalah program linier (disebuat masalah primal) dalam bentuk baku berasosiasi dengan masalah program linier lain, yang disebut sebagai masalah dual. Masalah primal dan masalah dual saling berhubungan, yaitu setiap solusi feasible dari masalah yang satu menghasilkan suatu batas dari nilai optimal masalah yang lainnya.

Setelah menyelesaikan masalah primal dari RMP selanjutnya yaitu membentuk dual dari primal RMP. Hal ini dilakukan untuk mengetahui keadaan optimal RMP.

Misalkan bentuk primal dari RMP dalam masalah memaksimumkan adalah persamaan (2.12) - (2.14):

Maksimumkan:

$$Z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

dengan kendala:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{dengan} \quad i \in I$$

$$x_j \geq 0, \qquad J \in J'$$

Maka dual dari persamaan (2.12) – (2.14) dapat didefinisikan sebagai berikut:

Minimumkan:

$$G = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \tag{2.15}$$

dengan kendala:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad \text{dengan} \quad j \in J \tag{2.16}$$

$$y_i \geq 0 \qquad \text{dengan} \quad i \in I \tag{2.17}$$

Berdasarkan model di atas didapat hubungan antara masalah primal dan dual dari suatu program linier (Wu, N., dan Coppins, R., 1981), sebagai berikut :

1) Sifat dualitas lemah : Jika $\bar{x}$ adalah solusi feasible untuk masalah primal dan $\bar{y}$ adalah solusi feasible dari masalah dual, maka $Z \leq G$
2) Sifat dualitas kuat : Jika $\bar{x}$ adalah solusi feasible untuk masalah primal dan $\bar{y}$ adalah solusi feasible dari masalah dual, maka $Z = G$, maka $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ masing-masing merupakan solusi optimal untuk masalah dual dan primal.

2.4.4 Optimasi Subproblem

Optimasi subproblem adalah suatu metode yang digunakan untuk mengetahui apakah solusi optimal dari RMP juga merupakan solusi optimal untuk MP. Untuk mengetahui hal tersebut, maka setiap kolom $p \in P$ memiliki *reduce cost* ≥ 0. Oleh karena itu, jika masih terdapat kolom $p \in P$ dengan *reduced cost* negatif atau $\mathbf{r_N} = c_j - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{a_j} < 0$ maka solusi optimal RMP bukan solusi optimal MP, sehingga dibangkitkan kolom/variabel lainnya dengan membentuk kembali RMP yang dianggap dapat mengoptimalkan MP.

Untuk membuktikan $\mathbf{r_N} = c_j - \mathbf{y^T a_j} < 0$, maka ambil persamaan (2.16), yaitu:

$$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \text{dengan } j \in J$$

$$\left(\sum_{i\in I} a_{ij} y_i\right) - c_j \geq 0 \quad \text{dengan } j \in J \tag{2.17}$$

Untuk meminimumkan persamaan (2.17) terhadap *J*, maka bentuk subproblem sebagai berikut:

$$\min_{i\epsilon I}[y_i] - c_j \geq 0 \tag{2.18}$$

Dari persamaan (2.18) untuk menentukan apakah solusi optimal RMP juga optimal untuk MP, maka akan ditentukan sesuai dengan kriteria pemberhentian. Adapun kriteria pemberhentian dari masalah diatas yaitu:

1. Jika $\min_{i\epsilon I}[y_i] - c_j \geq 0$, maka proses berhenti dan solusi optimal RMP juga merupakan solusi optimal MP.
2. Jika $\min_{i\epsilon I}[y_i] - c_j \leq 0$, maka solusi optimal RMP bukan merupakan solusi optimal MP, sehingga dibangkitkan kolom/ variabel lainnya yang dianggap dapat mengoptimalkan MP dengan membentuk kembali RMP dan diselesaikan kembali hingga diperoleh *reduce cost* ≥ 0 atau sesuai kriteria 1.