SKRIPSI

PENENTUAN DIMENSI METRIK GRAF KINCIR

Disusun dan diajukan oleh

FADELYAH EKA ANJANI SUKMANA

H 111 16 503

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

PENENTUAN DIMENSI METRIK GRAF KINCIR

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

FADELYAH EKA ANJANI SUKMANA
H 111 16 503

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Fadelyah Eka Anjani Sukmana
NIM	: H 111 16 503
Program Studi	: Matematika
Jenjang	: S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Penentuan Dimensi Metrik Graf Kincir

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 26 Februari 2021

METERAI TEMPEL TGL. 20 24056AHF616965649 6000 ENAM RIBU RUPIAH

METERAI TEMPEL TGL. 20 AHF616965648 6000 ENAM RIBU RUPIAH

<u>FADELYAH EKA ANJANI SUKMANA</u>
NIM. H 111 16 503

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENENTUAN DIMENSI METRIK GRAF KINCIR

Disusun dan diajukan oleh

FADELYAH EKA ANJANI SUKMANA
H 111 16 503

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 26 Februari 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**
NIP. 19700807 200003 1 002	**NIP. 19680803 199202 1 001**

Ketua Program Studi

Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Ucapan puji dan syukur kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala hidayah, karunia, serta nikmat-Nya lah sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam dan para sahabat yang menjadi suri tauladan kita.

Alhamdulillah, skripsi dengan judul **"Penentuan Dimensi Metrik Graf Kincir"** ini yang disusun untuk memenuhi syarat dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin dapat dirampungkan.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada orang tua penulis, Ayahanda **Cecep Nur Sukmana** dan Ibunda **Nurmi Rachman**, yang dengan penuh kesabaran memberikan banyak kasih sayang dan dukungan serta selalu mendoakan kebaikan kepada penulis. Tak lupa juga kepada saudara/i penulis, **Azizah** dan **Mughny** yang selalu membantu dan menghibur serta menemani penulis selama ini.

Ucapan terima kasih dan penghargaan juga diberikan kepada:

1. **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, M.A.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta staf dekanat.
3. **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika dan pembimbing utama dan **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku pembimbing pertama, yang telah banyak memberikan waktunya dalam membimbing dan membantu penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. **Dr. Budi Nurwahyu, MS** selaku penasihat akademik sekaligus dosen tim penguji, yang telah banyak membantu dan memberi nasihat serta dukungan kepada penulis selama masa perkuliahan.

5. **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku dosen tim penguji, yang banyak memberikan masukan dalam penyusunan skripsi ini.
6. **Dosen dan staf** departemen yang telah membantu banyak dan memberikan ilmunya selama masa perkuliahan.
7. Special thanks to **Adelia Alfira** yang selalu menghibur, memotivasi, memberi dukungan dan nasihat kepada penulis serta menjadi tempat berkeluh-kesah selama ini.
8. Untuk **Hadjrah, Indah, Suju** yang selalu membantu, mendukung, mendengarkan cerita penulis. Terima kasih atas waktu dan dukungannya.
9. Untuk **Mutmainna, Ilyas, Aldi** yang turut membantu menyalurkan tenaganya dalam penyusunan skripsi ini.
10. Teman seperjuangan **Matematika 2016**, terima kasih atas kebersamaan dalam suka dan duka selama menjalani masa perkuliahan.
11. Teman-teman KKN Unhas Gel.102 khususnya **Posko Desa Sumpang Minangae** yang menemani dan memberi warna hari-hari selama KKN.
12. **Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu**, terima kasih atas segala dukungan dan partisipasi dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga segala saran dan kritik yang membangun akan diterima dengan baik. Akhir kata, penulis berharap agar tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca. Aamiin.

Makassar, 26 Februari 2021

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN PUBLIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Fadelyah Eka Anjani Sukmana
NIM	: H 111 16 503
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Penentuan Dimensi Metrik Graf Kincir"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal tersebut, maka pihak Universitas Hasanuddin berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Makassar

Pada tanggal : 26 Februari 2021

Yang menyatakan,

Fadelyah Eka Anjani Sukmana

ABSTRAK

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan S adalah suatu sub himpunan dari himpunan titik V pada G. Himpunan S disebut himpunan pemisah pada G jika untuk setiap titik pada G memiliki representasi titik yang berbeda terhadap S. Himpunan pemisah dengan banyak anggota minimum disebut himpunan pemisah minimum atau basis dari G dan kardinalitas himpunan pemisah minimum menyatakan dimensi metrik pada graf G, disimbolkan dengan $dim(G)$.

Pada skripsi ini dibahas mengenai dimensi metrik graf kincir yang dikonstruksi dari graf komplit K_1 dan graf roda W_n. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa $dim(K_1 + mW_n)$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah:

i. $dim(K_1 + mW_n) = 3m$, untuk $n = 3{,}6$,
ii. $dim(K_1 + mW_n) = 2m$, untuk $n = 4$,
iii. $dim(K_1 + mW_n) = 3m - 1$, untuk $n = 5$,
iv. $dim(K_1 + mW_n) = m(3 + 2k)$, untuk $n = 7 + 5k$,
v. $dim(K_1 + mW_n) = m(3 + 2k) + (m - 1)$, untuk $n = 8 + 5k$,
vi. $dim(K_1 + mW_n) = m(4 + 2k)$, untuk $n = 9 + 5k, 10 + 5k$,
vii. $dim(K_1 + mW_n) = m(4 + 2k) + (m - 1)$, untuk $n = 11 + 5k$.

Kata kunci: *Dimensi Metrik, Himpunan Pemisah, Graf Komplit, Graf Roda*.

ABSTRACT

Suppose G is a connected graph and S is a sub set of a vertex set V on G. Set S is called a separated set on G if for each vertex of G has a different representation to S. The separated set with minimum cardinality is called the minimum separated set or basis of G and the cardinality of minimum separated set represents metric dimension of graph G, denoted by $dim(G)$.

This thesis discusses the metric dimension of a pinwheel graph that constructed from a complete graph K_1 and wheel graph W_n. Based on the results of the discussion, obtained that $dim(K_1 + mW_n)$ with $m \geq 2$ and $n \geq 3$ are:

i. $dim(K_1 + mW_n) = 3m$, for $n = 3{,}6$,
ii. $dim(K_1 + mW_n) = 2m$, for $n = 4$,
iii. $dim(K_1 + mW_n) = 3m - 1$, for $n = 5$,
iv. $dim(K_1 + mW_n) = m(3 + 2k)$, for $n = 7 + 5k$,
v. $dim(K_1 + mW_n) = m(3 + 2k) + (m - 1)$, for $n = 8 + 5k$,
vi. $dim(K_1 + mW_n) = m(4 + 2k)$, for $n = 9 + 5k, 10 + 5k$,
vii. $dim(K_1 + mW_n) = m(4 + 2k) + (m - 1)$, for $n = 11 + 5k$.

Keywords: *Metric Dimension, Separated Set, Complete Graph, Wheel Graph.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Individu tidak pernah lepas dari suatu masalah. Karenanya, permasalahan dalam kehidupan sehari-hari merupakan bagian dari diri manusia. Secara tidak sadar, manusia didorong untuk menemukan solusi dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Secara tidak langsung, permasalahan tersebut mendorong perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Ilmu matematika merupakan salah satu alat bantu untuk menemukan solusi serta menyederhanakan dalam penyajian dan pemahaman masalah. Salah satu konsep dari disiplin ilmu matematika yang dapat dijadikan alternatif adalah teori graf. Dengan merepresentasikan ke dalam bentuk graf, suatu masalah yang rumit dapat disajikan lebih sederhana, sehingga mudah untuk dipahami serta dianalisis dengan mudah didapatkan penyelesaiannya.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 dalam tulisannya yang berisi tentang permasalahan jembatan Konigsberg, yaitu bagaimana cara agar melewati ke semua jembatan tanpa harus melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali. Publikasi dari masalah ini dikenal sebagai masalah dari teori graf. Teori graf dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai jenis permasalahan. Sebagai contoh, menghitung angka dari kombinasi berbeda dari penerbangan diantara dua kota pada suatu jaringan maskapai penerbangan, memeriksa kemungkinan untuk melewati semua jalan yang ada di suatu kota tanpa melewati suatu jalan dua kali atau lebih, menemukan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai sejumlah daerah pada suatu peta, membedakan dua senyawa kimia dengan formula molekul yang sama namun memiliki struktur yang berbeda.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua dengan banyak topik pembahasan, salah satunya adalah dimensi metrik pada graf. Dalam menentukan dimensi metrik graf, ada beberapa konsep yang digunakan. Pertama adalah konsep jarak antara dua titik pada suatu graf. Misalkan u dan v adalah setiap titik pada graf terhubung G, maka jarak antara titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G, yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Konsep lainnya adalah himpunan pemisah (*separated set*). Suatu himpunan bagian S dari himpunan titik pada G disebut himpunan pemisah pada G jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap S. Himpunan pemisah yang memiliki anggota (*kardinalitas*) yang minimum disebut himpunan pemisah minimum (*minimum separated set*) dan anggota pada himpunan pemisah minimum disebut basis, sedangkan jumlah anggota dari basis tersebut disebut *dimensi metrik* dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$.

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, akhir-akhir ini banyak sekali penelitian mengenai dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh F. Harary dan R. A. Melter dalam jurnalnya yang berjudul *On the Metric Dimension of a Graph* (1976). Beberapa hasil penelitian mengenai dimensi metrik diantaranya pada tahun 2015, dalam jurnal yang berjudul *Dimensi Metrik dari Graf Barbel* $B_{2n}, n \geq 3$, graf barbel didefinisikan sebagai graf yang berasal dari dua graf C_{n1} dan C_{n2}, dengan cara menambahkan satu sisi $x_n y_n$ ke graf $C_{n1} \cup C_{n2}$. Sehingga ditentukan bahwa dimensi metrik dari graf barbel B_{2n}, dengan $B_{2n} \simeq 2C_n + x_n y_n$ adalah 2.

Deddy Rahmadi pada tahun 2017 dengan penelitiannya yang berjudul *Dimensi Metrik Kuat pada Graf Payung dan Buku Bertumpuk*. Brandstat, dkk. mendefinisikan graf payung yang dinotasikan $U_{m,n}$ sebagai himpunan titik $V(U_{m,n}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ dan himpunan sisi $E(U_{m,n}) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{2m+n-2}\}$ dengan sisi $e_i = x_i x_{i+1}, i \in [1, m-1]$, sisi $e_{i+m-1} = y_i y_{i+1}, i \in [1, n-1]$, dan sisi $e_{i+m+n-2} = x_i y_i, i \in [1, m]$ dengan $m > 2$ dan $n > 1$. Gallian mendefinisikan graf buku bertumpuk $B_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dari hasil *cartesian product* pada graf bintang S_m dan lintasan P_n. Dalam penelitian tersebut memeroleh hasil $sdim(U_{m,n}) = m - 1$ dan $sdim(B_{m,n}) = m$, dengan $m > 2$ dan $n > 1$.

Pada tahun yang sama, Mobeen Munir, Abdul Rauf Nizami, Zaffar Iqbal, and Huma Saeed menulis jurnal dengan judul *Metric Dimension of the Mobius Ladder*. Pada jurnal tersebut, didefinisikan bahwa graf mobius ladder M_n adalah graf sirkulan kubik dengan jumlah titik dan terbentuk dari n-sikel dengan menambahkan sisi yang menghubungkan pasangan titik yang berlawanan dalam sikel, kecuali dua pasangan yang terhubung dengan putaran sikel. Hasil dari penelitian tersebut menentukan bahwa $dim(M_n) = 3$ ketika $n \equiv 0{,}4 \ (mod\ 8)$ dan $dim(M_n) = 4$ ketika $n \equiv 2{,}6 \ (mod\ 8)$.

Tri Utomo dan Novian Riskiana Dewi pada tahun 2018 dengan penelitiannya *Dimensi Metrik Graf* $Amal(nK_m)$ mendefinisikan bahwa graf amal(nK_m) adalah n buah graf lengkap K_m yang dioperasikan amalgamasi dengan graf lengkap K_n, dengan cara menyatukan simpul server pada setiap K_m tepat satu dengan tiap simpul pada K_n. Hasil dari penelitian tersebut adalah dimensi metrik Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, dinotasikan sebagai $dim\big(Amal(nK_m)\big)$ adalah $(m-2)n$.

Kemudian pada tahun 2019, Fifi Febrianti, Lyra Yulianti, dan Narwen dengan penelitiannya yang berjudul *Dimensi Metrik pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen* mendefinisikan graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi m buah graf tangga segitiga diperumum yang homogen, lebih sederhana dinotasikan dengan $Amal\{Tr_n\}_m$. Penelitian tersebut terbatas pada $n = 3,\ n = 4$, dan $m = 2$. Sehingga diperoleh hasil $dim(Amal\{Tr_n, v\}_2) = 3$ jika $n = 3$, dan $dim(Amal\{Tr_n, v\}_2) = 4$ jika $n = 4$.

Dengan berbagai kajian tentang dimensi metrik seperti yang disebutkan sebelumnya, beberapa graf yang dikonstruksi dari graf lengkap dan graf roda belum ditemukan dimensi metriknya, misalnya graf kincir. Graf kincir $K_1 + mW_n$ adalah graf yang dikonstruksi dari graf lengkap dan graf roda dengan menghubungkan setiap titik yang ada pada graf roda ke satu titik pada graf lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan skripsi ini dibatasi pada penentuan dimensi metrik graf kincir dengan pola $K_1 + mW_n; m \geq 2, n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan dimensi metrik graf kincir.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dalam penulisan skripsi ini adalah untuk menambah pemahaman tentang konsep teori graf khususnya dimensi metrik suatu graf.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran yang jelas tentang permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini, maka penyusunannya didasarkan atas sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mengulas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan tentang kajian teori yang berhubungan dengan permasalahan dalam penelitian, kemudian digunakan untuk proses analisis.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini membahas tentang metode atau cara dalam penelitian yang akan dilakukan, meliputi: jenis penelitian, prosedur penelitian, dan alur kerja.

BAB IV PEMBAHASAN

Membahas tentang hasil penelitian yang diperoleh menggunakan teori dari tinjauan pustaka dan berisi ulasan jawaban dari rumusan masalah.

BAB V PENUTUP

Dalam bab ini akan diuraikan kesimpulan dan saran-saran yang berhubungan dengan topik pembahasan yang ada.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas beberapa materi yang dijadikan landasan teori untuk menjelaskan dimensi metrik pada graf kincir. Materinya meliputi beberapa definisi, istilah-istilah dalam teori graf termasuk dimensi metrik.

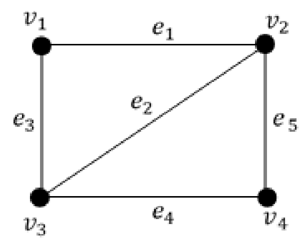
2.1 Konsep Dasar Graf

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa definisi dan istilah dalam teori graf beserta contoh yang digunakan dalam penulisan skripsi ini.

Definisi 2.1 *Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tidak terurut dari titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut orde dari G dan dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dinotasikan dengan $|E|$.

Contoh 2.1

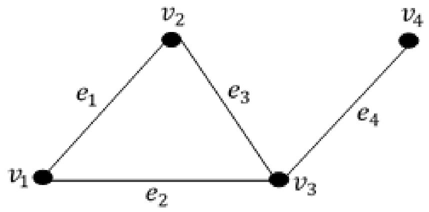


Gambar 2.1 Graf G dengan 4 titik

Graf pada Gambar 2.1 memiliki himpunan titik dan himpunan sisi, yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Jadi, $|V| = 4$ dan $|E| = 5$.

Definisi 2.2 *Misal G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Jika $e = uv$ adalah sisi pada G maka u dan v disebut bertetangga (adjacent), sedangkan u disebut terkait (incident) dengan e, dan e disebut terkait dengan v.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Contoh 2.2



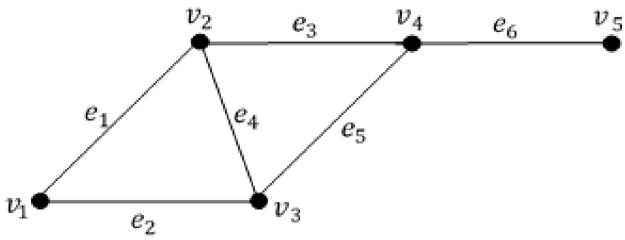
Gambar 2.2 Graf G dengan 4 titik

Pada Gambar 2.2 diketahui bahwa pasangan titik yang bertetangga yaitu $(v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_2, v_3)$, dan (v_3, v_4). Titik v_4 terkait dengan sisi e_4 dan sisi e_4 terkait dengan titik v_3 tetapi titik v_2 tidak terkait dengan sisi e_4, demikian juga sebaliknya, yaitu sisi e_4 tidak terkait dengan titik v_2.

Definisi 2.3 *Derajat (degree) dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v dan dinotasikan dengan $deg(v)$.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terisolasi dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung. Derajat minimum titik di G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimum titik di G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Contoh 2.3

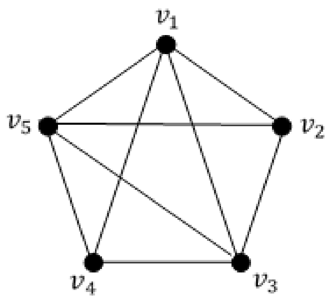


Gambar 2.3 Graf G dengan 5 titik

Derajat setiap titik graf pada Gambar 2.3 adalah $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 3$, $deg(v_4) = 3$, $deg(v_5) = 1$. Dengan demikian, diperoleh $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Definisi 2.4 *Misal G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Lintasan dari titik u ke titik v pada G, dinotasikan dengan lintasan $u - v$, adalah barisan selang-seling antar* *titik dan sisi,* $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$*, dimulai dengan titik* u *dan diakhiri dengan titik* v*, dimana* $e_i = u_{i-1}u_i$*, untuk* $i = 1,2, \dots, n$*, dan tidak terdapat pengulangan titik dan sisi.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Contoh 2.4

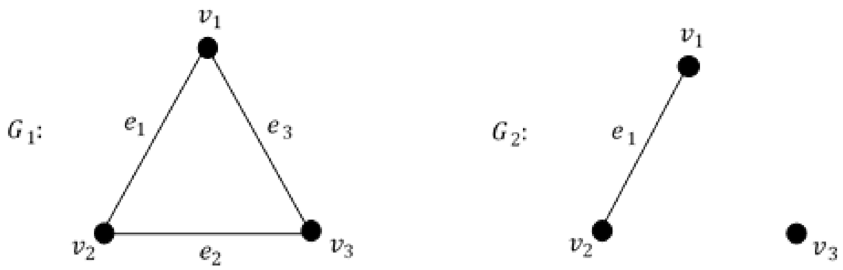


Gambar 2.4 Graf G dengan 5 titik

Pada Gambar 2.4, graf G memiliki lintasan $v_1 - v_4 : v_1v_2v_3v_4$ dengan panjang 3 dan lintasan $v_1 - v_4 : v_1v_2v_5v_3v_1v_4$ dengan panjang 5.

Definisi 2.5 *Misal* G *adalah graf dengan* $u, v \in V(G)$*. Graf* G *disebut graf terhubung (connected) jika setiap dua titik yang berbeda di* G *terdapat suatu lintasan dari* u *ke* v*.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

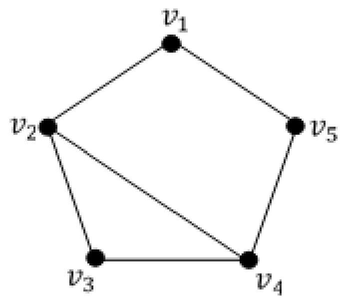
Contoh 2.5



Gambar 2.5 (G_1) graf terhubung; (G_2) graf tidak terhubung

Definisi 2.6 *Jarak (distance) antara titik* u *dan* v *pada graf* G *dinotasikan dengan* $d(u, v)$ *adalah panjang lintasan terpendek antara* u *dan* v *pada* G*.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Contoh 2.6

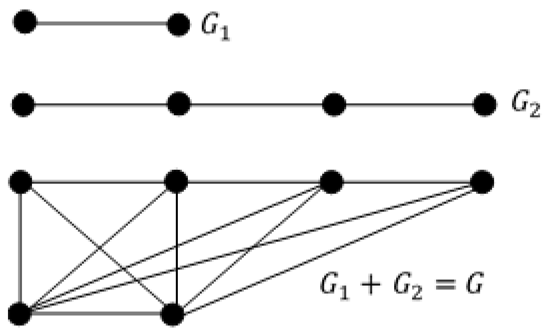


Gambar 2.6 Graf G dengan 5 titik

Pada Gambar 2.6 diperoleh: $d(v_1, v_1) = 0, d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 2, d(v_1, v_5) = 1, d(v_2, v_2) = 0, d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_4) = 1,$ $d(v_2, v_5) = 2, d(v_3, v_3) = 0, d(v_3, v_4) = 1, d(v_3, v_5) = 2, d(v_4, v_4) = 0,$ $d(v_4, v_5) = 1, d(v_5, v_5) = 0.$

Definisi 2.7 *Operasi penjumlahan dari graf* G_1 *dan* G_2 *adalah graf* $G = G_1 + G_2$, *dengan himpunan titik* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan himpunan sisi* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x, y) | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. (Abdussakir, dkk. 2009).

Contoh 2.7



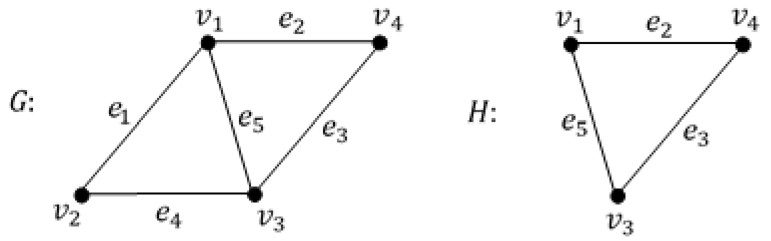
Gambar 2.7 Graf $G = G_1 + G_2$

2.2 Subgraf

Konsep subgraf sama dengan konsep himpunan bagian. Dalam teori himpunan, himpunan A dikatakan subset himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B.

Definisi 2.8 *Misalkan G dan H merupakan suatu graf. H dikatakan subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, dan dinotasikan dengan $H \subseteq G$.* (Chartrand, 1986)

Contoh 2.8



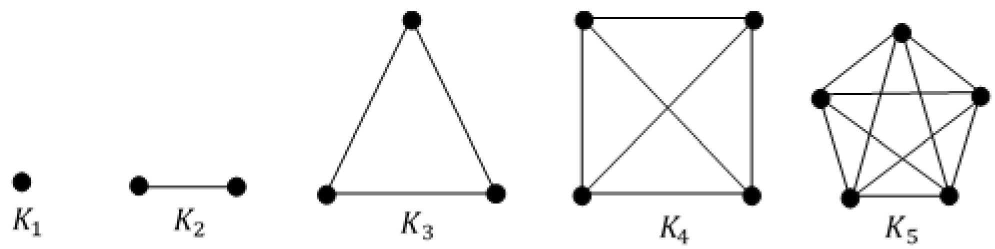
Gambar 2.8 Graf H adalah subgraf dari graf G

2.3 Beberapa Jenis Graf

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini, diantaranya graf lengkap, graf roda, dan graf kincir.

Definisi 2.9 *Graf G dikatakan graf lengkap jika setiap dua titik yang berbeda saling bertetangga. Graf lengkap dengan orde n dinyatakan dengan K_n. Graf K_n merupakan graf beraturan $n-1$ dengan orde n dan ukuran $\frac{n(n-1)}{2}$.* (Abdussakir, dkk. 2009)

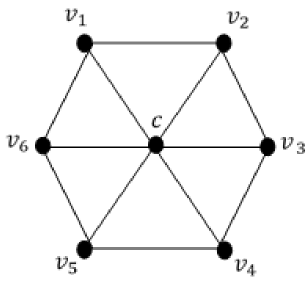
Contoh 2.9



Gambar 2.9 Graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4, dan K_5

Definisi 2.10 *Graf roda (W_n) adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel bertetangga dengan satu titik pusat. Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1. Jadi, $W_n = C_n + K_1, n > 2$.* (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Contoh 2.10



Gambar 2.10 Graf Roda W_6

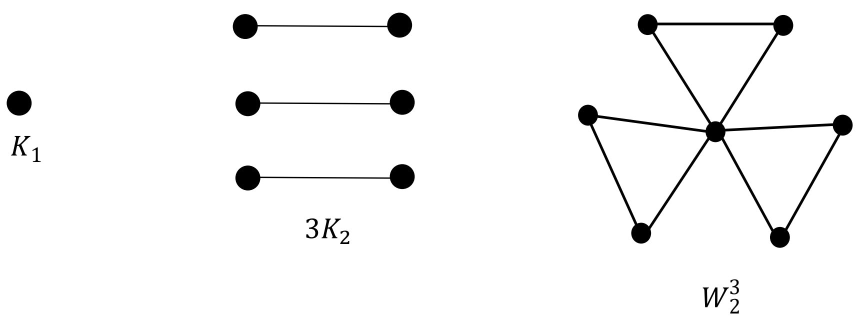
Berdasarkan hasil penelitian Buczkowski, dkk. pada tahun 2003, diperoleh dimensi metrik dari graf roda W_n. Dimensi metrik dari graf roda W_n untuk $n > 3$ dan $n \neq 6$ adalah $\left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$. Dan untuk $n = 3$ dan 6 diperoleh dimensi metriknya 3.

Definisi 2.11 *Graf kincir adalah graf yang dibentuk dari hasil penjumlahan graf lengkap K_1 dan mK_n. Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m dimana W adalah simbol dari graf kincir, sedangkan* 2 *menunjukkan graf lengkap K_2, dan m adalah banyaknya K_2.* (Miller, dkk., 2005)

Graf kincir dibentuk dengan menghubungkan setiap titik mK_2 dengan suatu titik yang disebut titik pusat c. Operasi penjumlahan graf lengkap K_1 dan mK_n, dimana $n = 2, m \geq 1, m, n \in N$, secara matematis dinotasikan dengan $K_1 + mK_2 = W_2^m$.

Contoh 2.11

Berikut operasi penjumlahan graf lengkap K_1 dan $3K_2$.



Gambar 2.11 Graf K_1, $3K_2$, dan W_2^3

2.4 Dimensi Metrik

Pada sub bab ini dibahas tentang istilah-istilah yang berkaitan dengan dimensi metrik suatu graf.

Definisi 2.12 *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah suatu graf terhubung sederhana, dan* $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\} \subseteq V$. *Representasi dari* $v \in V$ *terhadap* S *adalah pasangan terurut* n*-tuple yaitu* $r(v|S) = (d(v, s_1), d(v, s_2), \dots, d(v, s_n))$. (Harary dan Melter, 1976)

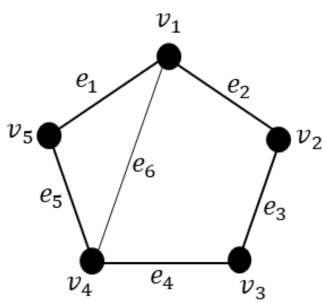
Definisi 2.13 *Himpunan* S *disebut himpunan pemisah pada graf* G *jika setiap dua titik yang berbeda pada* G *mempunyai representasi yang berbeda terhadap* S. (Harary dan Melter, 1976)

Definisi 2.14 *Himpunan pemisah yang memiliki anggota (kardinalitas) yang minimum disebut himpunan pemisah minimum (minimum separated set) pada graf* G. (Harary dan Melter, 1976)

Definisi 2.15 *Basis dari suatu graf* G *adalah himpunan pemisah minimum dari* G. (Harary dan Melter, 1976)

Definisi 2.16 *Dimensi metrik adalah kardinalitas basis dari* G *yang dinotasikan dengan* $dim(G)$. (Harary dan Melter, 1976)

Contoh 2.12



Gambar 2.12 Graf G

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Misal dipilih $S_1 = \{v_1\}$, maka representasi setiap titik di G adalah $r(v_1|S) = (d(v_1, v_1)) = (0), r(v_2|S) = (d(v_2, v_1)) = (1), r(v_3|S) = (d(v_3, v_1)) = (2), r(v_4|S) = (d(v_4, v_1)) = (1)$, dan $r(v_5|S) = (d(v_5, v_1)) = (1)$. Karena terdapat dua titik atau lebih dengan representasi sama, maka S_1 bukan himpunan pemisah. Untuk setiap satu titik yang diambil sebagai himpunan pemisah, maka pasti terdapat dua titik di G dengan representasi sama. Sehingga $|S| > 1$ atau $|S| \geq 2$.

Misal dipilih $S_2 = \{v_2, v_3\}$, maka representasi setiap titik di G adalah $r(v_1|S_2) = \big(d(v_1, v_2), d(v_1, v_3)\big) = (1,2), r(v_2|S_2) = \big(d(v_2, v_2), d(v_2, v_3)\big) = (0,1), r(v_3|S_2) = \big(d(v_3, v_2), d(v_3, v_3)\big) = (1,0), r(v_4|S_2) = \big(d(v_4, v_2), d(v_4, v_3)\big) = (2,1)$, dan $r(v_5|S_2) = \big(d(v_5, v_2), d(v_5, v_3)\big) = (2,2)$. Karena tidak terdapat dua titik dengan representasi sama, maka S_2 merupakan himpunan pemisah. Karena $|S_2| = 2$ maka S_2 merupakan himpunan dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(G) = 2$.