

SKRIPSI

**PENENTUAN BOBOT TITIK, SISI, DAN BILANGAN
KROMATIK GRAF LENGKAP FUZZY BERORDE GENAP**

Disusun dan diajukan oleh:

FACHRIN MULTAHADI SURYADI

H111 15 025



PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

SKRIPSI

**PENENTUAN BOBOT TITIK, SISI, DAN BILANGAN
KROMATIK GRAF LENGKAP FUZZY BERORDE GENAP**

Disusun dan diajukan oleh

FACHRIN MULTAHADI SURYADI

H111 15 025



PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN BOBOT TITIK, SISI, DAN BILANGAN KROMATIK GRAF LENGKAP FUZZY BERORDE GENAP

Disusun dan Diajukan Oleh

FACHRIN MULTAHADI SURYADI

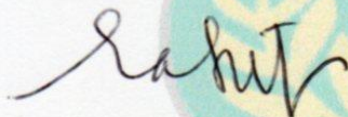
H111 15 025

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Sidang yang dibentuk dalam rangka
Penyelesaian Studi Program Sarjana Program Studi Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 4
Desember 2020 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

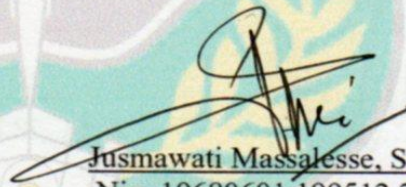
Menyetujui

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping,

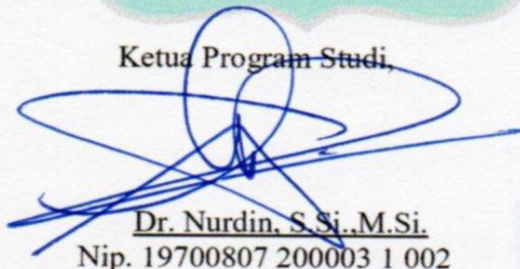


Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.
Nip. 19641231 1199003 2 007



Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.
Nip. 19680601 199512 2 001

Ketua Program Studi,



Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
Nip. 19700807 200003 1 002



HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : FACHRIN MULTAHADI SURYADI

NIM : H111 15 025

Program Studi : MATEMATIKA

Judul Skripsi : Penentuan Bobot Titik, Sisi , dan Bilangan
Kromatik Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.

2. Sekretaris : Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.

3. Anggota : Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.

4. Anggota : Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si.

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 15 April 2021



PERNYATAAN KEASLIAN

Yang betanda tangan dibawah ini :

Nama : Fachrin Multahadi Suryadi

NIM : H111 15 025

Program Studi : Matematika

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa Skripsi dengan judul **Penentuan Bobot Titik, Sisi, dan Bilangan Kromatik Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap** adalah karya saya sendiri dan tidak melanggar hak cipta pihak lain. Apabila di kemudian hari Skripsi karya saya ini terbukti bahwa sebagian atau keseluruhannya adalah hasil karya orang lain yang saya pergunakan dengan cara melanggar hak cipta pihak lain, maka saya bersedia menerima sanksi.

Makassar, 15 April 2021

Yang Menyatakan



Fachrin Multahadi Suryadi

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

Segala puji syukur penulis panjatkan kepada Zat Yang Maha Pengasih, Yang Maha Memberi segalanya, Yang Maha Esa, Allah Subhanahu Wa Ta'ala. Karena berkat kemurahan-Nyalah penulis dapat memperoleh kesempatan dan kesehatan untuk bertemu orang-orang arif dan bijak yang telah membimbing saya sebagai penulis, memberikan arahan dalam banyak hal, termasuk dalam proses penulisan skripsi ini. Shalawat dan salam senantiasa penulis haturkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW yang telah membimbing umat manusia dari alam kegelapan atau zaman kebodohan menuju alam yang terang benderang, yakni zaman intelektual.

Ucapan terima kasih yang tulus, dengan segala kerendahan hati, penulis sampaikan kepada kedua orang tua tercinta, ayahanda **Drs. Suryadi** dan ibunda **Juhariana**, yang selalu menghadirkan penulis dalam setiap doanya, yang tanpa mengenal lelah memberikan dukungan, dan dorongan kepada penulis baik dalam berbentuk materil maupun moril. Kepada kakak **Muhammad Luthfil Hadi Suryadi, S.T**, Penulis juga menyampaikan terima kasih sebesar-besarnya atas masukan, motivasi, dan dukungan yang telah diberikan.

Penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada pembimbing utama, Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si**, yang telah membimbing, memberikan arahan dan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini. Selama pembimbingan, di tengah kesibukannya yang sangat padat, beliau selalu bersedia meluangkan waktunya. Hal ini sangat penulis hargai. Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si**, selaku pembimbing pertama, terima kasih juga karena telah memberikan arahan dan bimbingan, serta bersedia meluangkan waktunya untuk mendampingi penulis sehingga skripsi dapat diselesaikan.

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Dr. Muh Nur, S.Si., M.Si**, selaku anggota tim penguji dan Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si**, selaku anggota tim penguji sekaligus penasehat akademik untuk segala masukan, ilmu, dan nasehat yang telah diberikan.
2. Bapak/Ibu **Dosen Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika. Serta staf departemen atas bantuannya dalam pengurusan akademik selama ini.
3. Ibu **Rektor Universitas Hasanuddin** beserta jajarannya, Bapak **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** beserta jajarannya, Bapak **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si**, selaku Ketua Departemen Matematika beserta jajarannya, dan seluruh pihak birokrasi atas pengetahuan dan kemudahan-kemudahan yang diberikan.
4. Sahabat dari **Syababul Istiqomah** termasuk **Syamsuddin, S.Si, Imam Kurniawan, S.Si, dan Edi Anugrah, S.Si**, yang telah menemani penulis selama lima tahun dan selalu meluangkan waktu bersama penulis, memberikan dukungan, tempat menjalin Ukhuwah Islamiyah bersama dengan ikhwah yang lain dan berbagi ilmu agama dengan penulis.
5. Teman-teman seperjuangan Prodi Matematika 2015 yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
6. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu.

Semoga segala bantuan yang tulus dan ikhlas ditujukan kepada penulis mendapatkan balasan yang terbaik dari Allah SWT. Semoga tulisan ini bermanfaat untuk semua pihak yang membutuhkan dan terutama untuk penulis sendiri.

Makassar, 15 April 2021

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Fachrin Multahadi Suryadi
NIM : H111 15 025
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Nonexclusive Royalty and Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

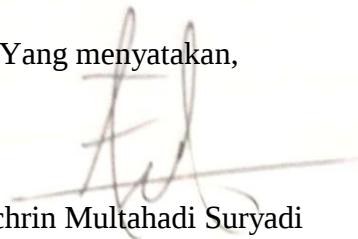
”Penentuan Bobot Titik, Sisi, dan Bilangan Kromatik Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap”

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait hal di atas, maka pihak Universitas Hasanuddin berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan saya buat dengan sebenarnya.

Makassar, 15 April 2021

Yang menyatakan,



Fachrin Multahadi Suryadi

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
PERNYATAAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS.....	iii
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL.....	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT.....	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	4
2.1 Himpunan	4
2.2 Himpunan Fuzzy	7
2.3 Graf.....	8
2.4 Graf Fuzzy	13
2.5 Pewarnaan Fuzzy.....	17
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	43
3.1 Jenis Penelitian	43
3.2 Subjek dan Objek Penelitian	43
3.3 Tahapan Penelitian	43
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	46
BAB V PENUTUP.....	67
5.1 Kesimpulan.....	67
5.2 Saran.....	67
DAFTAR PUSTAKA	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Graf G	10
Gambar 2. 2 Contoh Graf Lengkap	11
Gambar 2. 3 Contoh Siklus.....	11
Gambar 2. 4 a). Graf Bipartit $B_{4,4}$ b). Graf Bipartit $K_{4,4}$ c). Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,2}$ d). Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,2}$	13
Gambar 2. 5 Contoh Graf Fuzzy	14
Gambar 2. 6 Contoh Graf Fuzzy dan Graf yang Mendasari Graf Fuzzy.....	15
Gambar 2. 7 a). Graf Fuzzy Kuat (Bukan Graf Lengkap Fuzzy) b). Graf Lengkap Fuzzy c). Bukan Graf Lengkap Fuzzy d). Graf Lengkap (Bukan Graf Fuzzy)	16
Gambar 2. 8 a). Graf Fuzzy Reguler b). Bukan Graf Fuzzy Reguler	17
Gambar 2. 9 Graf Fuzzy yang Akan Diwarnai	20
Gambar 2. 10 Perbandingan Dua Pewarnaan Fuzzy pada Dua Graf Fuzzy	21
Gambar 2. 11 Perbandingan Empat Pewarnaan Fuzzy Pada Empat Graf Fuzzy	22
Gambar 2. 12 Graf Fuzzy ξ_1	24
Gambar 2. 13 Gambar Fuzzy ξ_1 Diwarnai	26
Gambar 2. 14 Graf Fuzzy ξ_2	26
Gambar 2. 15 Graf Fuzzy ξ_2 Diwarnai.....	28
Gambar 2. 16 Graf Fuzzy ξ_3	28
Gambar 2. 17 Graf Fuzzy ξ_3 Diwarnai.....	29
Gambar 2. 18 Graf Fuzzy ξ_4	30
Gambar 2. 19 Graf Fuzzy ξ_4 Diwarnai.....	31
Gambar 2. 20 Graf Fuzzy ξ_1	31
Gambar 2. 21 Graf Fuzzy ξ_1 Diwarnai.....	32
Gambar 2. 22 Graf Fuzzy ξ_2	33
Gambar 2. 23 Graf Fuzzy ξ_2 Diwarnai.....	34
Gambar 2. 24 Graf Fuzzy ξ_3	35
Gambar 2. 25 Gambar Fuzzy ξ_3 Diwarnai	35
Gambar 2. 26 Graf Fuzzy ξ_4	36
Gambar 2. 27 Gambar Fuzzy ξ_4 Diwarnai	37
Gambar 2. 28 Graf G berorde 8 3 – reguler.....	37
Gambar 2. 29 Tiga Graf Fuzzy Bipartit Diwarnai.....	40

Gambar 4. 1 Graf Lengkap K_2	46
Gambar 4. 2 Graf Lengkap Fuzzy ξ	46
Gambar 4. 3 Graf Lengkap Fuzzy ξ Diwarnai	47
Gambar 4. 4 Graf Lengkap K_4	47
Gambar 4. 5 Graf Lengkap Fuzzy ξ	48
Gambar 4. 6 Graf Lengkap Fuzzy ξ Diwarnai	50
Gambar 4. 7 Graf Lengkap K_6	50
Gambar 4. 8 Graf Lengkap Fuzzy ξ	51
Gambar 4. 9 Graf Lengkap Fuzzy ξ Diwarnai	52
Gambar 4. 10 Graf Lengkap K_8	53
Gambar 4. 11 Graf Lengkap Fuzzy ξ	55
Gambar 4. 12 Graf Lengkap Fuzzy ξ Diwarnai	56
Gambar 4. 13 Graf Lengkap K_{10}	57
Gambar 4. 14 Graf Lengkap Fuzzy ξ	59
Gambar 4. 15 Graf Lengkap Fuzzy ξ Diwarnai	61

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_1	24
Tabel 2. 2 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Lemah Graf Fuzzy ξ_2	26
Tabel 2. 3 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_3	29
Tabel 2. 4 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_4	30
Tabel 2. 5 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_1	31
Tabel 2. 6 Penentuan Sisi Bebas dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_2	33
Tabel 2. 7 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_3	35
Tabel 2. 8 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_4	36
Tabel 4. 1 Nilai Keanggotaan Sisi $x_i x_j$ ($\mu(x_i x_j) = \sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)$)	51
Tabel 4. 2 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah	52
Tabel 4. 3 Nilai Keanggotaan Sisi $x_i x_j$ ($\mu(x_i x_j) = \sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)$)	54
Tabel 4. 4 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah	55
Tabel 4. 5 Nilai Keanggotaan Sisi $x_i x_j$ ($\mu(x_i x_j) = \sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)$)	58
Tabel 4. 6 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah	59
Tabel 4. 7 Nilai Kromatik dari Setiap Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap	62
Tabel 4. 8 Selisih Banyak Sisi Bebas Kuat dari Tiap Titik	63

ABSTRAK

Setiap dua titik, x_i dan x_j pada graf lengkap fuzzy berorde genap, memiliki nilai keanggotaan sisi yakni $\frac{1}{2} \{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$ dengan $\sigma(x_i)$ dan $\sigma(x_j)$ adalah nilai keanggotaan titik x_i dan x_j , sehingga setiap sisinya merupakan sisi bebas kuat. Bilangan kromatik fuzzy $\gamma(\xi)$ atau banyak warna dasar minimum graf lengkap fuzzy berorde genap adalah n , dengan warna fuzzy $(c_n, 1)$ untuk n bilangan genap. Warna fuzzy $(c_n, 1)$ menyatakan bahwa c_n warna dasar titik x_n dan 1 adalah tingkat kepadatan warna c_n yang dinotasikan sebagai $f(c_n)$.

Kata Kunci : Graf Fuzzy, Graf Lengkap Fuzzy, Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap, Pewarnaan Fuzzy.

ABSTRACT

Every two vertices, called x_i and x_j of even-order fuzzy complete graph, have membership value of an edge that is $\frac{1}{2} \{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$ where $\sigma(x_i)$ and $\sigma(x_j)$ are membership values of x_i and x_j , such that every edge is an independent strong edge. Fuzzy chromatic number $\gamma(\xi)$ or a number of minimum basic colours of even-order fuzzy complete graph are n , where a fuzzy colour is $(c_n, 1)$ for n which is even. The fuzzy colour $(c_n, 1)$ states that c_n is a basic colour of vertex x_n and 1 is a solidity of c_n denoted by $f(c_n)$.

Keywords: Fuzzy Graph, Fuzzy Complete Graph, Even-Order Fuzzy Complete Graph, Fuzzy Colouring.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Lotfi A Zadeh pada tahun 1965, yang memperluas gagasan himpunan yang sebelumnya hanya menggunakan logika “Ya atau Tidak” yang digagas oleh Aristoteles (Mathew, Mordeson, & S Malik, 2018). Pada himpunan fuzzy, setiap anggota suatu himpunan memiliki derajat keanggotaan yang menunjukkan keanggotaan dari suatu himpunan yang berinterval $[0,1]$. Pada teori himpunan fuzzy, terdapat beberapa pembahasan seperti definisi himpunan fuzzy, terminologi dasar, dan sebagainya.

Kaufman memberikan definisi pertama dari graf fuzzy. Rosenfeld, Yeh, dan Bang mengemukakan dasar-dasar dari graf fuzzy. Rosenfeld memperkenalkan analog fuzzy dari beberapa konsep dasar graf, seperti subgraf, lintasan, keterhubungan, kelompok graf, jembatan, titik potong, hutan, dan pohon. Yeh dan Bang memperkenalkan konsep keterhubungan titik, sisi, dan aplikasi graf fuzzy pada klusterisasi data. Pada pembahasan mengenai graf fuzzy, diperkenalkan mengenai graf fuzzy kuat dan graf fuzzy lengkap.

Konsep pewarnaan titik graf fuzzy yang dikemukakan oleh Munoz dkk. membahas tentang graf fuzzy $\xi = (V, \tilde{E})$ dengan V merupakan himpunan titik bernilai keanggotaan 1 ($\sigma(x) = 1$) dan $\tilde{E}$ merupakan himpunan sisi yang nilai keanggotaannya kurang dari 1 ($\mu(xy) < 1$) dan nilai keanggotaan μ menunjukkan tingkat kesamaran dari ketidakcocokan antara dua titik pada graf fuzzy ξ . Selain itu, Munoz dkk. memperluas fungsi $C : V \rightarrow N$ pada graf G menjadi fungsi $C : V \rightarrow S$ pada graf fuzzy ξ . Pada pewarnaan fuzzy ini terdapat beberapa aplikasi dalam kehidupan riil, seperti masalah pengaturan lampu lalu lintas dengan titik sebagai jalur lalu lintas dan sisi fuzzy sebagai tingkat kewaspadaan terhadap kecelakaan atau peluang terjadinya kecelakaan (perpotongan jalur) (Munoz, Ortuno, & Yanez, 2004). Selanjutnya, pewarnaan fuzzy pada titik suatu graf fuzzy $\xi = (\tilde{V}, \tilde{E})$ dikemukakan oleh Eslahchi dan Onagh (2005) yang berdasarkan pada

sisi bebas kuat pada suatu graf fuzzy atau ketetanggaan dari dua titik $u, v \in \tilde{V}$ dengan $\tilde{V}$ merupakan himpunan titik bernilai keanggotaan kurang dari 1 ($\sigma(x) < 1$). Bilangan kromatik yang dibahas oleh Munoz dkk maupun Eslahchi dan Onagh merupakan banyaknya warna fuzzy yang tersedia untuk setiap titik pada graf fuzzy ξ (Kishore & Sunitha, 2013). Kemudian, Samanta dkk, Membuat atau mengenalkan konsep pewarnaan fuzzy $\tilde{c}_i = (c_i, f(c_i))$ dengan c_i merupakan warna dasar dan $f(c_i)$ merupakan tingkat kepadatan dari c_i dan bilangan kromatik pada pewarnaan fuzzy ini merupakan banyaknya warna dasar yang dibutuhkan untuk mewarnai graf fuzzy ξ .

Berdasarkan konsep pewarnaan yang telah dikemukakan oleh Samanta dkk, penulis tertarik untuk mengembangkan ke dalam penentuan bilangan kromatik fuzzy pada graf lengkap fuzzy berorde genap dan menuangkan hasilnya kedalam tulisan skripsi dengan judul:

“Penentuan Bobot Titik, Sisi, dan Bilangan Kromatik Graf Lengkap Fuzzy Berorde Genap”.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Bagaimana menentukan nilai keanggotaan pada titik dan sisi suatu graf lengkap K_n , dengan n genap.
2. Bagaimana menentukan bilangan kromatik fuzzy graf lengkap K_n , dengan n genap.

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada penentuan bilangan kromatik fuzzy pada graf lengkap K_n untuk n genap.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menentukan nilai keanggotaan titik dan sisi graf lengkap K_n untuk n genap.
2. Menentukan bilangan kromatik fuzzy graf lengkap fuzzy K_n untuk n genap.

1.5 Manfaat Penelitian

Dalam masalah pewarnaan, selain warna dasar, juga ada yang merupakan campuran dari warna dasar dan warna putih. Dengan pewarnaan graf fuzzy, warna campuran dapat diketahui melalui pewarnaan graf fuzzy.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi, istilah, dan notasi yang digunakan untuk pembahasan pada bab-bab berikutnya guna mempermudah pemahaman pembaca. Secara umum, definisi dan istilah yang digunakan konsep dasar himpunan, himpunan fuzzy, graf, graf fuzzy, dan pewarnaan graf fuzzy merujuk pada beberapa referensi seperti buku *Discrete Mathematics and Its Applications* oleh Rosen (2012) dan *Fuzzy Graph Theory* oleh Mathew dkk. (2018).

2.1 Himpunan

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah sekelompok atau kumpulan benda atau objek yang anggotanya dapat didefinisikan atau ditentukan dengan jelas.

Biasanya, huruf besar (A dan B) merupakan simbol suatu himpunan dan huruf-huruf kecil (a dan b) merupakan elemen dari suatu himpunan. Misalkan $a \in A$ yang menyatakan bahwa a merupakan elemen dari himpunan A .

Contoh 2.1.1 Himpunan V merupakan himpunan huruf vokal yang didefinisikan sebagai $V = \{a, i, e, u, o\}$.

Contoh 2.1.2 Himpunan O merupakan himpunan bilangan ganjil yang kurang dari 10 yang didefinisikan $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Terdapat cara lain untuk mendefinisikan suatu himpunan, yakni pembangun himpunan (*set builder*) yang mencirikan sifat-sifat dari elemen-elemen yang merupakan syarat dari suatu himpunan tersebut. Contoh, himpunan O yang merupakan himpunan bilangan ganjil yang kurang dari 10 didefinisikan sebagai

$$O = \{x | x \text{ bilangan ganjil kurang dari } 10\}$$

Atau

$$O = \{x \in \mathbf{Z}^+ | x \text{ bilangan ganjil dan } x < 10\}$$

Misalkan $a < b$ dengan a dan b merupakan bilangan riil, beberapa notasi interval dari suatu himpunan adalah sebagai berikut

$$[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{a < x < b\}$$

Interval $[a, b]$ merupakan interval tertutup dan interval (a, b) merupakan interval buka.

2.1.1 Operasi Himpunan

Operasi untuk dua himpunan atau lebih menghasilkan beberapa kombinasi dari himpunan-himpunan tersebut. Contoh, himpunan A dan himpunan B yang menghasilkan beberapa kombinasi dari kedua himpunan tersebut, yakni gabungan himpunan A dengan B yang berdasarkan logika ‘atau’, irisan dari himpunan A dengan B berdasarkan logika ‘dan’, dan himpunan yang elemennya bukan dari himpunan A . Definisi gabungan dan irisan antara dua himpunan diberikan di bawah ini.

Definisi 2.1.2 (Rosen, 2012) Misalkan A dan B merupakan himpunan. Gabungan himpunan A dan B , dinotasikan dengan $A \cup B$, merupakan himpunan yang elemennya berada dalam himpunan A atau B , atau dalam kedua himpunan tersebut.

Gabungan himpunan A dan B didefinisikan sebagai $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Contoh 2.1.3 Gabungan dari himpunan $\{1,3,5\}$ dan $\{1,2,3\}$, ditulis dengan notasi $\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\}$ adalah himpunan $\{1,2,3,5\}$. Jadi $\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5\}$.

Definisi 2.1.3 Misalkan A dan B merupakan himpunan. Irisan himpunan A dan B , dinotasikan sebagai $A \cap B$, merupakan himpunan yang elemennya berada pada himpunan A dan B .

Irisan himpunan A dan B didefinisikan sebagai $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Contoh 2.1.4 Irisan dari himpunan $\{1,3,5\}$ dan $\{1,2,3\}$ ditulis dengan notasi $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\}$ adalah himpunan $\{1,3\}$. Yakni, $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$.

Definisi 2.1.4 (Bartle & Sherbert, 2000) Komplemen dari himpunan B yang mempunyai hubungan dengan himpunan A adalah himpunan yang didefinisikan sebagai

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

Dengan kata lain, komplemen dari B yang mempunyai hubungan dengan himpunan A adalah himpunan yang elemennya dari himpunan A tetapi bukan dari himpunan B .

Contoh 2.1.5 Komplemen dari himpunan $\{1,3,5\}$ adalah $\{2\}$. Jadi, $\{1,2,3\} \setminus \{1,3,5\} = \{2\}$.

2.1.2 Perkalian Cartesius

Perkalian Cartesius membentuk suatu himpunan dengan semua elemen dari beberapa himpunan berpasangan terurut dengan elemen lainnya.

Definisi 2.1.5 (Bartle & Sherbert, 2000) Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong, Perkalian Cartesius $A \times B$ dari himpunan A dan B adalah himpunan dari semua pasangan elemen berurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Yakni

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Untuk pembahasan ini, Perkalian Cartesius diterapkan pada dua himpunan.

Contoh 2.1.6 Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1,5\}$ merupakan himpunan, maka $A \times B$ merupakan suatu himpunan yang elemennya merupakan pasangan berurut

$$A \times B = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5)\}$$

2.2 Himpunan Fuzzy

Definisi 2.2.1 Misalkan X adalah sebuah himpunan. Himpunan A disebut himpunan fuzzy pada X jika

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

dengan $\mu_A : X \rightarrow M = [0,1]$ adalah fungsi keanggotaan.

Contoh 2.2.1: (Mathew, Mordeson, & S Malik, 2018) Misalkan himpunan $X = \{1,2,3,\dots,10\}$. Himpunan fuzzy A yang merepresentasikan “ bilangan asli mendekati 5” sebagai $\{(1,0.1), (2, 0.3), (3, 0.6), (4,0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.6), (8, 0.3), (9, 0.1), (10, 0)\}$.

2.2.1 Penyokong (Support)

Definisi 2.2.2 Penyokong (support) dari himpunan fuzzy A adalah himpunan bagian dari X sedemikian sehingga $\mu_A(x) > 0$. Jadi, $\text{Supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$.

Contoh 2.2.2 : *Support* dari himpunan fuzzy A pada contoh 2.2.1 adalah

$$\text{Supp}(A) = \{1,2,3, \dots, 9\}$$

2.2.2 Operasi pada Himpunan Fuzzy

1. Irisan (*Intersection, logical and*)

Irisan dua himpunan fuzzy A dan B didefinisikan sebagai:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \forall x \in X$$

Notasi $\mu_{A \cap B}(x)$ kadang-kadang ditulis sebagai $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$.

2. Gabungan (*Union, exclusive or*)

Gabungan dua himpunan fuzzy A dan B didefinisikan sebagai:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \forall x \in X$$

Notasi $\mu_{A \cup B}(x)$ kadang-kadang ditulis sebagai $\mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

3. Komplemen (*Complement, negation*)

Komplemen dari $\mu_A(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$$

2.3 Graf

Definisi 2.3.1 Graf G adalah suatu sistem yang terdiri dari pasangan himpunan berhingga $V = V(G)$ tak kosong yang anggotanya disebut titik dan himpunan berhingga $E = \{uv | u, v \in V\}$. Anggota himpunan E disebut sisi.

Suatu graf G yang terdiri dari himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan $G(V, E)$. Banyaknya elemen pada himpunan $V(G)$ biasa ditulis $|V(G)| = p$, disebut sebagai orde dari graf G dan banyak anggota himpunan $E(G)$ biasa ditulis $|E(G)| = q$, disebut sebagai ukuran dari graf G .

Jika $u \neq v$ dan $uv = vu$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka G disebut graf sederhana. Jika $u = v$, maka sisi uv dinamakan gelang atau *loop* karena berawal dan berakhir pada titik yang sama. Dan jika $uv \neq vu$ maka titik u dan v terhubung oleh sisi paralel. Graf yang memiliki sisi paralel dan *loop* disebut graf palsu atau *pseudograph*. Graf yang akan menjadi kajian pada penelitian ini adalah graf sederhana yang memiliki bobot dan selanjutnya graf sederhana ini hanya akan disebut ‘graf’ saja. Dalam penulisan, selanjutnya, sisi $e = uv \in E(G)$, kadang-kadang ditulis (u, v) .

Definisi 2.3.2 Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Jika $v_i, v_j \in V(G)$ dan $v_i v_j \in E(G)$, maka :

1. Titik u dan v disebut saling bertetangga (adjacent)
2. Sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan v .

Definisi 2.3.3 Misalkan titik $v \in V(G)$. Derajat v , ditulis dengan notasi $\deg(v)$ atau $\deg_G(v)$ pada graf G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v .

Suatu titik berderajat 0 disebut titik terpencil. Derajat terkecil dari graf G , dinotasikan $\delta(G)$ didefinisikan $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$ dan

derajat terbesar dari graf G , dinotasikan $\Delta(G)$ didefinisikan $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$. Jika semua titik graf G memiliki derajat k yang sama, maka graf G disebut graf k – reguler atau graf teratur – k (Diestel, 2000). Untuk sebarang graf berorde n dan $v \in V(G)$ sebarang, maka

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

Teorema 2.3.1 (Chartrand & Zhang, 2005) (Teorema Pertama dari Teori Graf)
Jika G merupakan suatu graf berukuran q , maka

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$$

Bukti: Pada penjumlahan derajat dari semua titik pada graf G , terdapat minimal satu sisi, yakni sisi e yang menghubungkan dua titik sehingga jumlah derajat dari kedua titik tersebut adalah dua pada sisi tersebut.

Akibat 2.3.1 Banyak titik pada graf G yang berderajat ganjil adalah genap.

Bukti: Misalkan V_1 adalah himpunan titik berderajat ganjil dengan kardinalitas k dan V_2 adalah himpunan titik berderajat genap dengan kardinalitas r pada graf G . Misalkan pula p adalah orde graf G dan q adalah ukurannya. Jika $u_i \in V_1$ dan $v_j \in V_2$, maka menurut Teorema 2.3.1:

$$\sum_{i=1}^k \deg(u_i) + \sum_{j=1}^r \deg(v_j) = 2q,$$

$$\sum_{i=1}^k \deg(u_i) = -\sum_{j=1}^r \deg(v_j) + 2q. \quad (1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa k adalah genap. Karena $v_j \in V_2$ dan V_2 adalah kumpulan titik berderajat genap maka $\sum_{j=1}^r \deg(v_j)$ adalah genap. Akibatnya, $\sum_{i=1}^k \deg(u_i) = -\sum_{j=1}^r \deg(v_j) + 2q$ adalah genap. Tulis $\deg(u_i) = 2r_i - 1, r_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap i . Maka persamaan (1) dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^k (2r_i - 1) = -\sum_{j=1}^r \deg(v_j) + 2q = 2l, \quad \text{untuk } r_i, l \in \mathbb{N} \quad \text{dan} \quad l < q;$$

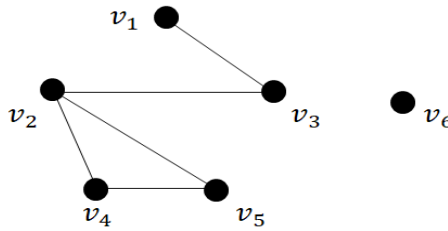
$$\sum_{i=1}^k (2r_i) - \sum_{i=1}^k 1 = -\sum_{j=1}^r \deg(v_j) + 2q = 2l;$$

$$\sum_{i=1}^k (2r_i) - k = 2l$$

$$-k = 2l - \sum_{i=1}^k (2r_i)$$

$$k = \sum_{i=1}^k (2r_i) - 2 = 2(\sum_{i=1}^k r_i - l).$$

Jelas $2(\sum_{i=1}^k r_i - l)$ adalah bilangan genap. Jadi k adalah bilangan genap, atau banyaknya titik berderajat genap.

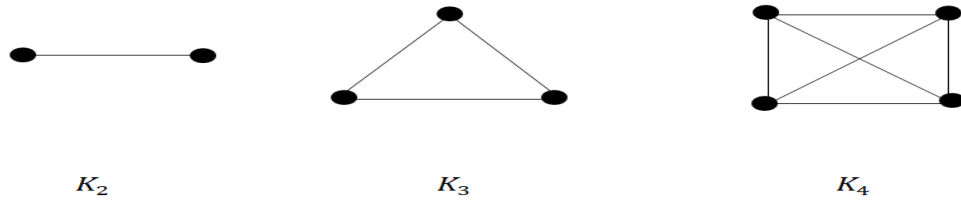


Gambar 2. 1 Graf G

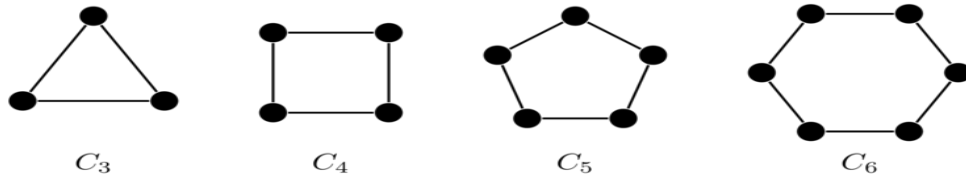
Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa graf G terdiri dari himpunan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$. Graf G dikatakan berorde enam dan berukuran lima. Contoh titik yang bertetangga pada graf G adalah titik v_1 dan v_3 sedangkan titik yang tidak mempunyai tetangga adalah titik v_6 . Derajat titik v_1 adalah 1 ($\deg(v_1) = 1$) karena terdapat satu sisi yang terkait dengan v_1 . Titik v_6 merupakan titik terpencil karena $\deg(v_6) = 0$ dan merupakan derajat minimum dari graf G . Karena $\deg(v_6) = 0$, maka $\delta(G) = 0$. Derajat titik v_2 adalah 3 ($\deg(v_2) = 3$) dan merupakan derajat maksimum dari graf G ($\Delta(G) = 3$). Adapun banyak titik pada graf G berderajat ganjil adalah 2, yakni titik v_1 dimana $\deg(v_1) = 1$ dan titik v_2 dengan $\deg(v_2) = 3$. Penjumlahan derajat dari kedua titik tersebut adalah 4 karena $\deg(v_1) + \deg(v_2) = 4$.

Dibawah ini diberikan definisi graf berdasarkan derajat titiknya. Berdasarkan derajat titiknya, jenis-jenis graf yang diantara graf lengkap, siklus, dan graf multipartit.

Definisi 2.3.4 Graf Lengkap adalah graf yang setiap dua titiknya bertetangga. Graf Lengkap berorde n dilambangkan dengan K_n .

**Gambar 2. 2** Contoh Graf Lengkap

Definisi 2.3.5 Siklus $C_n, n \geq 3$ adalah graf yang terdiri dari n titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi $(v_1v_2), (v_2v_3), \dots, (v_{n-1}v_n)$, dan (v_nv_1) . Graf siklus merupakan graf yang setiap titiknya berderajat 2.

**Gambar 2. 3** Contoh Siklus

Definisi 2.3.6 Graf multipartit atau n –partit untuk $n \geq 2$ adalah graf yang semua titiknya dapat dipartisi kedalam beberapa atau n himpunan titik berbeda.

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$. Misalkan $V_1, V_2, \dots, V_n$ merupakan himpunan bagian dari himpunan titik $V(G)$. Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$, himpunan V_i merupakan partisi himpunan dari himpunan (G) . Graf multipartit dengan $|V_i| = n_i$ disimbolkan sebagai $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Suatu graf dengan partisi himpunan $n = 2$ disebut graf bipartit yang dinotasikan sebagai B_{n_1, n_2} . Suatu graf dikatakan graf multipartit lengkap, yang dinotasikan sebagai $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, jika setiap titik dari suatu partisi terhubung dengan partisi-partisi lainnya. Graf bipartit lengkap, yang dinotasikan sebagai K_{n_1, n_2} , adalah graf yang setiap titik dari partisi satu terhubung dengan setiap titik pada partisi lainnya.

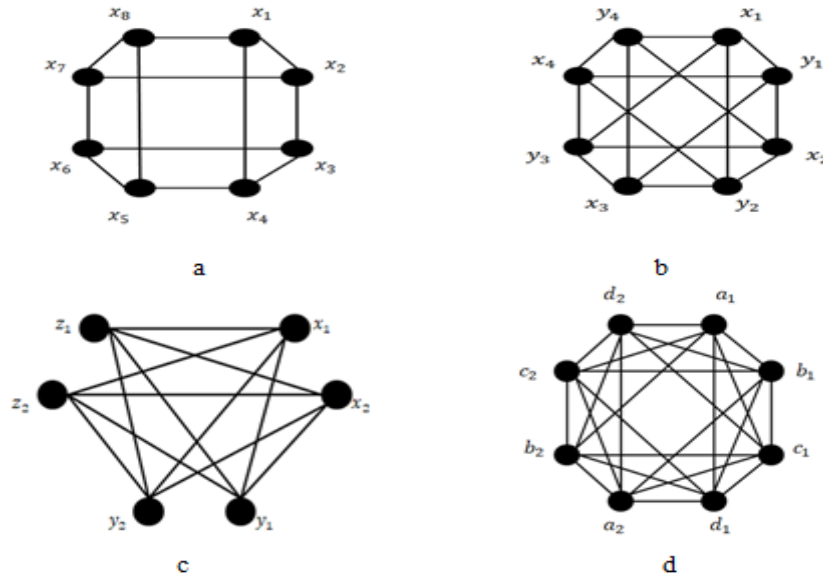
Contoh 2.3.1. sampai contoh 2.3.4 dan gambarnya merupakan contoh graf multipartit. Contoh-contoh tersebut berada dibawah ini beserta gambarnya.

Contoh 2.3.1 Misalkan G merupakan graf 3-reguler berorde 8. Setiap titik pada graf tersebut berderajat 3. Semua titik tersebut dipartisi menjadi dua subhimpunan, yakni subhimpunan V_1 yang merupakan himpunan titik-titik ganjil dan V_2 yang merupakan himpunan titik-titik genap dengan $V_1 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$, $V_2 = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, dan $E = \{x_1x_2, x_1x_4, x_1x_8, x_2x_3, x_2x_7, x_3x_4, x_3x_6, x_4x_5, x_5x_6, x_5x_8, x_6x_7, x_7x_8\}$.

Contoh 2.3.2 Misalkan $K_{4,4}$ merupakan graf lengkap bipartit yang terdiri dari dua subhimpunan titik dengan masing-masing 4 anggota dengan $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $E = \{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_1y_4, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3, x_2y_4, x_3y_1, x_3y_2, x_3y_3, x_3y_4, x_4y_1, x_4y_2, x_4y_3, x_4y_4\}$.

Contoh 2.3.3 Misalkan $K_{2,2,2}$ merupakan graf lengkap tripartit yang terdiri dari 3 himpunan titik dengan $V_1 = \{x_1, x_2\}$, $V_2 = \{y_1, y_2\}$, $V_3 = \{z_1, z_2\}$ dan $E = \{x_1y_1, x_1y_2, x_1z_1, x_1z_2, x_2y_1, x_2y_2, x_2z_1, x_2z_2, y_1z_1, y_1z_2, y_2z_1, y_2z_2\}$.

Contoh 2.3.4 Misalkan $K_{2,2,2,2}$ merupakan graf lengkap 4-partit yang semua titiknya dipartisi menjadi 4 himpunan dengan $V_1 = \{a_1, a_2\}$, $V_2 = \{b_1, b_2\}$, $V_3 = \{c_1, c_2\}$, $V_4 = \{d_1, d_2\}$, dan $E = \{a_1b_1, a_1b_2, a_1c_1, a_1c_2, a_1d_1, a_1d_2, a_2b_1, a_2b_2, a_2c_1, a_2c_2, a_2d_1, a_2d_2, b_1c_1, b_1c_2, b_1d_1, b_1d_2, b_2c_1, b_2c_2, b_2d_1, b_2d_2, c_1d_1, c_1d_2, c_2d_1, c_2d_2\}$.



Gambar 2. 4 a). Graf Bipartit $B_{4,4}$ b). Graf Bipartit $K_{4,4}$ c). Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,2}$ d). Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,2}$

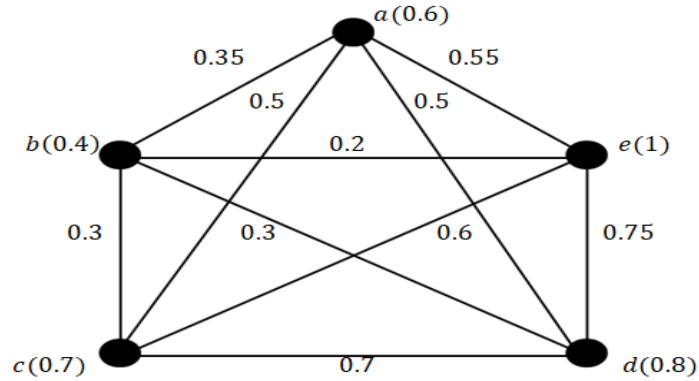
2.4 Graf Fuzzy

Definisi 2.4.1 (Mathew, Mordeson, & S Malik, 2018) Suatu graf dikatakan graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$ jika graf terdiri dari himpunan tidak kosong V yang bersama dengan pasangan fungsi $\sigma : V \rightarrow [0,1]$ dan $\mu : E \rightarrow [0,1]$ sehingga untuk setiap $x, y \in V$ berlaku $\mu(xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$.

Fungsi σ memetakan himpunan titik V menuju interval $[0,1]$ dan μ memetakan himpunan sisi E menuju interval $[0,1]$. Dengan kata lain, μ adalah relasi fuzzy pada fungsi σ . Sederhananya, ξ atau (σ, μ) menunjukkan graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$. Misalkan, $\bar{V}$ merupakan himpunan fuzzy titik dan himpunan $\bar{E}$ merupakan himpunan fuzzy sisi dan penyokong dari $\bar{V}$ dan $\bar{E}$ dapat dilambangkan dengan $Supp(\bar{V})$ dan $Supp(\bar{E})$.

Contoh 2.4.1 : (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015) Diberikan graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$ dengan $V = \{a, b, c, d, e\}$ dengan nilai keanggotaan semua titik adalah $\sigma(a) = 0.6$, $\sigma(b) = 0.4$, $\sigma(c) = 0.7$, $\sigma(d) = 0.8$, $\sigma(e) = 1$ dan nilai keanggotaan sisi graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$ adalah $\mu(ab) = 0.35$, $\mu(ac) = 0.5$,

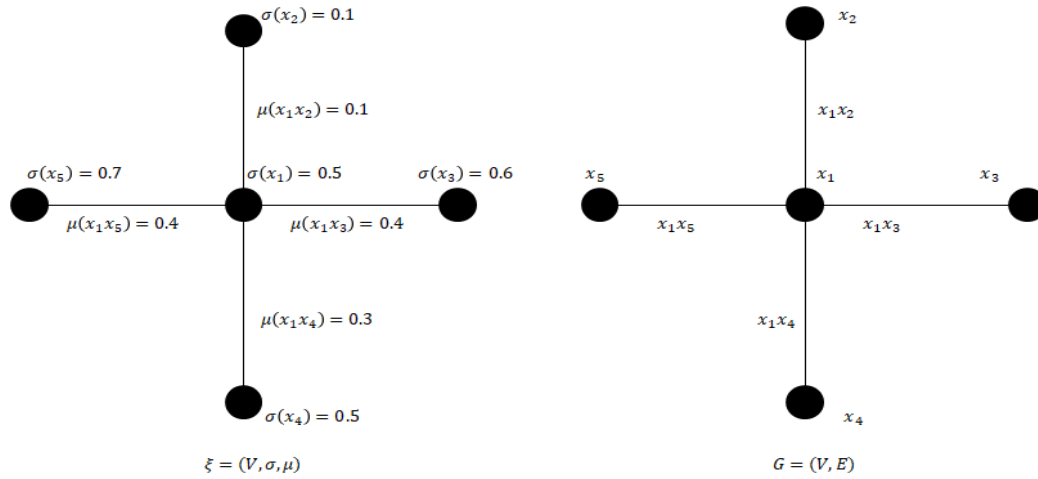
$\mu(ad) = 0.5$, $\mu(ae) = 0.55$, $\mu(bc) = 0.3$, $\mu(bd) = 0.3$, $\mu(be) = 0.2$, $\mu(cd) = 0.7$, $\mu(ce) = 0.6$, $\mu(de) = 0.75$.



Gambar 2. 5 Contoh Graf Fuzzy

Definisi 2.4.2 (Graf Fuzzy ξ dan Graf G) Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf dan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy dengan $\sigma : V \rightarrow [0,1]$ dan $\mu : E \rightarrow [0,1]$ untuk setiap $x, y \in V$ dengan $\mu(xy) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$. Graf $G = (V, E)$ yang mendasari ξ adalah graf yang hanya terdiri dari himpunan tak kosong V dengan elemennya disebut titik dan himpunan E dengan elemennya disebut sisi.

Contoh 2.4.2 Misalkan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ merupakan suatu graf fuzzy dengan $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$. Nilai keanggotaan dari semua titik adalah $\sigma(x_1) = 0.5$, $\sigma(x_2) = 0.1$, $\sigma(x_3) = 0.6$, $\sigma(x_4) = 0.5$, $\sigma(x_5) = 0.7$ dan nilai keanggotaan dari semua sisi graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$ adalah $\mu(x_1x_2) = 0.1$, $\mu(x_1x_3) = 0.4$, $\mu(x_1x_4) = 0.3$, $\mu(x_1x_5) = 0.4$. Graf G yang mendasari graf fuzzy ξ adalah graf S_5 atau $K_{1,4}$.



Gambar 2. 6 Contoh Graf Fuzzy dan Graf yang Mendasari Graf Fuzzy

Definisi 2.4.3 Relasi Fuzzy. Misalkan σ memetakan X menuju interval $[0,1]$. Maka μ dikatakan relasi fuzzy pada σ jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y)$$

dengan $\sigma(x) \wedge \sigma(y) = \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$.

2.4.1 Keterhubungan Graf Fuzzy

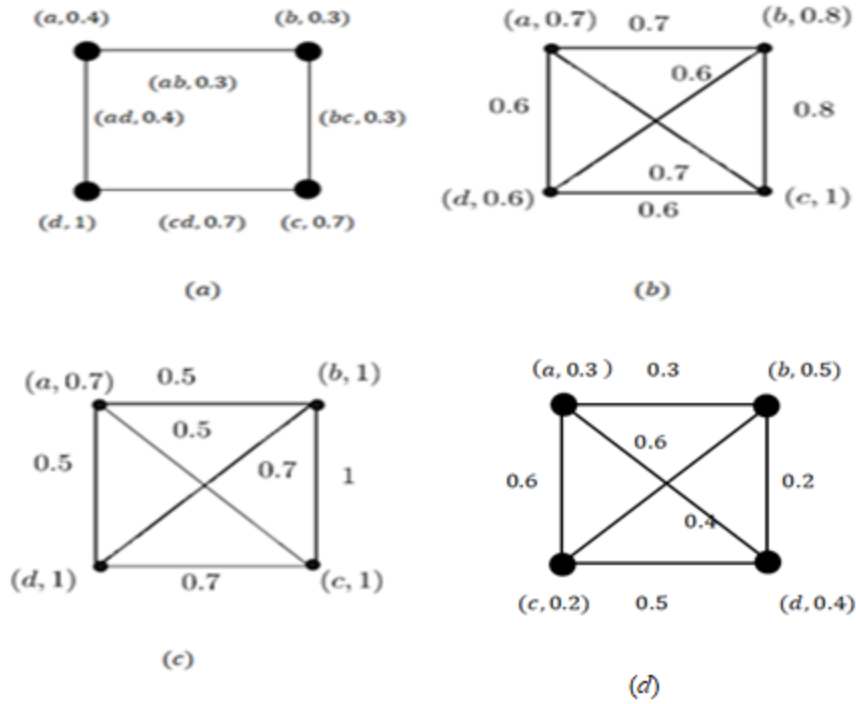
Lintasan P dalam graf fuzzy $\xi = (\sigma, \mu)$ merupakan barisan titik-titik yang berbeda $x_0, x_1, \dots, x_n$ (kecuali mungkin x_0 dan x_n) sehingga $\mu(x_{i-1}x_i) > 0, i = 1, \dots, n$ dengan n merupakan panjang lintasan. Dua titik dikatakan terhubung apabila kedua titik tersebut dihubungkan oleh suatu lintasan (Mathew, Mordeson, & S Malik, 2018).

2.4.2 Graf Fuzzy Kuat dan Graf Lengkap Fuzzy

Definisi 2.4.4 Graf fuzzy $\xi = (\sigma, \mu)$ dikatakan graf fuzzy kuat jika untuk setiap $(uv) \in E$ berlaku $\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.

Definisi 2.4.5 Graf fuzzy $\xi = (\sigma, \mu)$ dikatakan graf lengkap fuzzy jika untuk setiap $u, v \in V$ berlaku $\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.

Jika graf fuzzy $\xi = (\sigma, \mu)$ adalah graf lengkap fuzzy, maka graf fuzzy $\xi = (\sigma, \mu)$ merupakan graf fuzzy kuat, tetapi tidak sebaliknya (Sunitha & Vijayakumar, 2001).



Gambar 2. 7 a). Graf Fuzzy Kuat (Bukan Graf Lengkap Fuzzy) b). Graf Lengkap Fuzzy c). Bukan Graf Lengkap Fuzzy d). Graf Lengkap (Bukan Graf Fuzzy)

2.4.3 Kekuatan Sisi dari Graf Fuzzy

Definisi 2.4.6 (Nivethana & Parwathi, 2013) Misalkan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy. Titik $x, y \in V$ dikatakan bertetangga jika $\frac{1}{2}\{\sigma(x) \wedge \sigma(y)\} \leq \mu(xy)$.

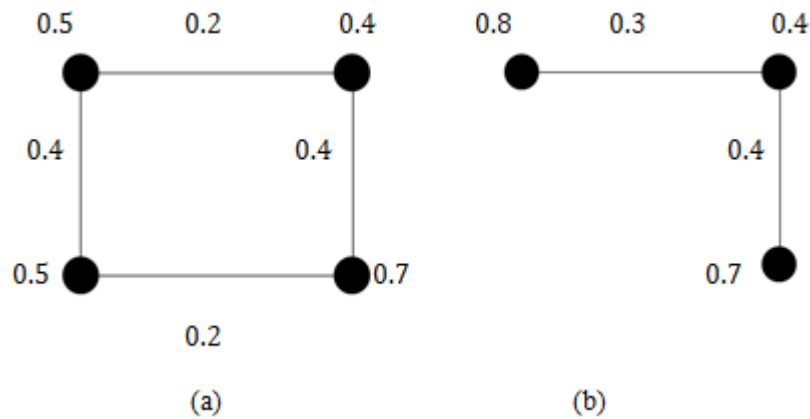
Definisi 2.4.7 (Nivethana & Parwathi, 2013) Misalkan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ adalah graf fuzzy. Sisi $xy, x, y \in V$ dikatakan sisi bebas kuat jika $\frac{1}{2}\{\sigma(x) \wedge \sigma(y)\} \leq \mu(xy)$.

Dalam hal lain, sisi xy dikatakan bebas lemah. Sisi xy dikatakan kuat jika titik x dan y bertetangga (Nivethana & Parwathi, 2013). Kekuatan suatu sisi pada graf fuzzy $\xi = (V, \sigma, \mu)$ disimbolkan dengan $I_{(uv)} = \frac{\mu(uv)}{\sigma(u) \wedge \sigma(v)}$ dengan $\sigma(u) \wedge \sigma(v) = \min\{\sigma(u), \sigma(v)\}$.

2.4.4 Jenis Graf Fuzzy Lain

Pada bagian ini akan digambarkan beberapa jenis fuzzy khusus selain graf lengkap fuzzy yang sudah dibahas pada bagian sebelumnya diantaranya graf fuzzy reguler.

Derajat suatu titik v dari graf fuzzy ξ dinotasikan sebagai $\deg(v)$ didefinisikan sebagai $\deg(v) = \sum_{u \neq v} \mu(uv)$. Jika $\deg(v) = k$ untuk setiap $v \in V$ atau setiap titik memiliki derajat k yang sama, maka graf fuzzy ξ adalah graf fuzzy reguler derajat k atau graf fuzzy reguler k . Ini dianalogikan seperti definisi graf reguler pada teori graf (Gani & Radha, 2008).



Gambar 2. 8 a). Graf Fuzzy Reguler b). Bukan Graf Fuzzy Reguler

2.5 Pewarnaan Fuzzy

Pewarnaan disini adalah pewarnaan campuran antara warna putih dan warna lainnya. Campuran suatu warna dengan warna putih mengurangi tingkat kepadatan dari warna tersebut. Tingkat kepadatan tersebut dikenal sebagai istilah fuzzy. Misalkan $w \leq 1$ satuan warna c_k dicampurkan $1 - w$ satuan warna putih, maka campuran tersebut dinamakan campuran standar dari warna c_k . Hasil warna campuran tersebut dinamakan warna fuzzy dari warna c_k yang merupakan warna dasar dan w merupakan nilai keanggotaannya. Contoh warna dasar adalah merah, biru, hijau, dan sebagainya (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015).

Definisi 2.5.1 (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015)

Misalkan $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}, n \geq 1$ himpunan warna dasar. Himpunan fuzzy (C, f) dinamakan himpunan warna fuzzy dengan $f : C \rightarrow [0,1]$, dengan $f(c_i)$ adalah nilai keanggotaan c_i yang merupakan nilai satuan campuran standar. Warna $\tilde{c}_i = (c_i, f(c_i))$ disebut warna fuzzy yang berkorespondensi pada warna dasar c_i . Sebaliknya, nilai keanggotaan dari warna dasar adalah 1. Oleh karena itu, warna dasar adalah warna fuzzy yang nilai keanggotaannya 1.

Contoh dari definisi diatas, warna merah merupakan warna dasar. Warna “merah fuzzy” dapat dibentuk dari warna merah (dasar) dengan mencampurkan 0.9 satuan warna merah dengan 0.1 satuan dengan warna putih. Warna “merah fuzzy” ini dilambangkan dengan $(merah, 0.9)$. Dengan cara yang sama, warna merah fuzzy lainnya $(merah, 0.75)$ dibentuk dengan mencampurkan 0.75 satuan warna merah dengan 0.25 satuan warna putih, dan seterusnya. Lambang $(merah, 1)$ menunjukkan warna dasar.

2.5.1 Prosedur Pewarnaan Graf Fuzzy

Misalkan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy terhubung dan $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ himpunan warna dasar. Dalam graf fuzzy, terdapat dua jenis sisi, yakni sisi bebas kuat dan lemah. Sisi bebas kuat menunjukkan bahwa sisi ini lebih signifikan daripada sisi bebas lemah. Karena itu, hubungan antara titik-titik yang saling berkorespondensi bebas kuat. Konsep pewarnaan ini sama dengan pewarnaan graf biasa yang berdasarkan pada sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah. Berdasarkan sisinya, pewarnaan fuzzy ini terbagi menjadi tiga kasus yaitu

- (i) Semua sisi bebas kuat
- (ii) Beberapa sisi bebas kuat
- (iii) Semua sisi bebas lemah

Kasus 1 : Semua sisi bebas kuat

Jika sebuah graf fuzzy dengan semua sisinya bebas kuat, maka pewarnaan graf fuzzy ini sama dengan pewarnaan graf biasa. Yaitu, dua titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda jika terdapat satu sisi bebas kuat.

Kasus 2: Beberapa sisi bebas kuat

Misalkan v sebuah titik dan $N(v) = \{u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan semua tetangga dari titik v . Sederhananya, u_1, u_2 merupakan dua titik sedemikian sehingga vu_1, vu_2 merupakan sisi bebas kuat yang terkait dengan v dan sisi lainnya $vu_i, i = 3, 4, \dots, n$ merupakan sisi bebas lemah. Pada kasus ini, warna untuk titik v adalah warna $(c, 1)$, dan warna untuk titik u_1 adalah $(c_2, 1)$. Dengan cara yang sama, u_2 mendapatkan warna yang berbeda dari warna untuk v .

Subkasus 2.1, 2.2, dan 2.3 adalah proses pewarnaan pada titik u_3 dengan catatan bahwa sisi vu_3 merupakan sisi bebas lemah

2.1 Semua titik tetangga u_3 tidak diwarnai

Misalkan vu_3 merupakan sisi lemah, u_3 mendapatkan warna fuzzy yang berkorespondensi dengan warna dari v . Jika warna v berwarna $(c, 1)$, maka warna fuzzy u_3 menjadi $(c, f(c))$, dimana $f(c)$ dapat dihitung sebagai $f(c) = 1 - I_{(vu_3)}$, $I_{(vu_3)} = \frac{\mu(vu_3)}{\sigma(v) \wedge \sigma(u_3)}$ dengan $\mu(vu_3)$ merupakan nilai keanggotaan sisi vu_3 , $\sigma(v) \wedge \sigma(u_3) = \min\{\sigma(v), \sigma(u_3)\}$, dan $\sigma(v), \sigma(u_3)$ merupakan masing-masing nilai keanggotaan dari titik v dan titik u_3 .

2.2 Semua titik tetangga u_3 diwarnai

Jika suatu sisi u_3w yang terkait dengan u_3 merupakan sisi bebas kuat, maka u_3 tidak dapat diwarnai dengan sebarang warna fuzzy titik w . Karena itu, jika warna titik w adalah $(c_w, f(c_w))$, maka u_3 tidak dapat diwarnai dengan sebarang warna fuzzy dari c_w . Andaikan, u_3 memiliki beberapa sisi bebas lemah yang terkait dengan u_3 , misalkan u_3w_i , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, q$. Tanpa mengurangi generalitasnya, asumsikan bahwa warna dari w_i adalah $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, 3, \dots, q$, dengan $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, q$ merupakan fungsi keanggotaan dari warna x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, q$, dan warna x_i dapat berbeda atau sama.

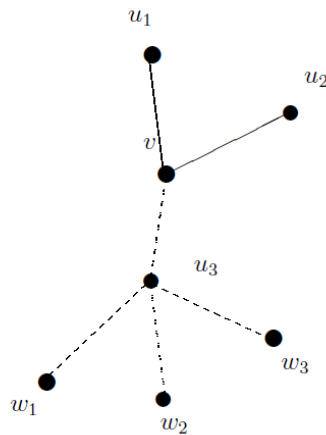
Misalkan $M = \max\{1 - I_{(u_3w_i)}, 1 - I_{(vu_3)} : 1, 2, \dots, q\}$ atau M untuk sisi u_3w_p dengan $M = 1 - I_{(u_3w_p)}$. Jika warna w_p adalah $(x_p, f(x_p))$, maka warna fuzzy untuk u_3 adalah warna (x_p, M) .

2.3 Beberapa titik tetangga u_3 diwarnai

Titik-titik yang bertetangga yang tidak diwarnai tidak mempengaruhi pewarnaan u_3 . Jadi, titik-titik yang bertetangga yang diwarnai, akan ditinjau untuk pewarnaan u_3 . Proses pewarnaan u_3 sama dengan subkasus 2.2. Setelah pewarnaan u_3 , semua titik yang lain diwarnai dengan cara yang sama.

Kasus 3: Semua sisi bebas lemah

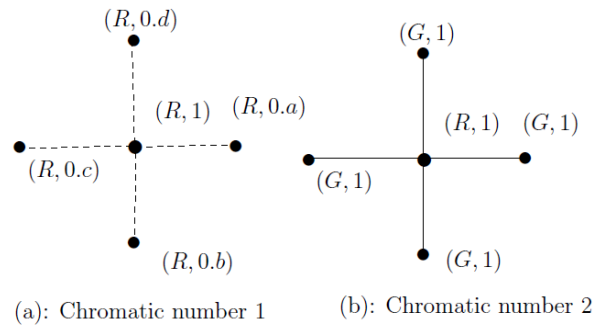
Pada kasus ini, misalkan y sebuah titik dan warna untuk titik y warna dasar, sehingga warna fuzzy untuk titik y adalah $(c_y, 1)$. Maka semua titik tetangga y mendapatkan beberapa warna fuzzy c_y .



Gambar 2. 9 Graf Fuzzy yang Akan Diwarnai

2.5.2 Bilangan Kromatik Fuzzy

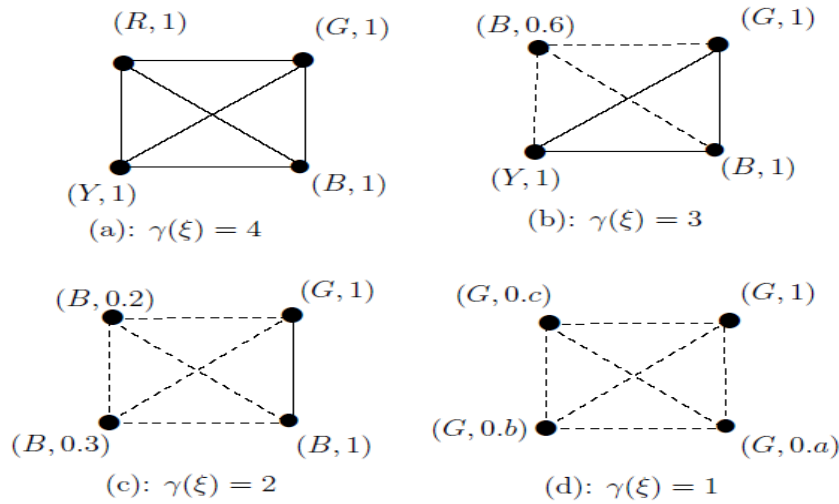
Minimum banyaknya warna dasar yang dibutuhkan untuk mewarnai suatu graf fuzzy disebut bilangan kromatik graf fuzzy, yang disimbolkan dengan $\gamma(\xi)$ (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015).



Gambar 2. 10 Perbandingan Dua Pewarnaan Fuzzy pada Dua Graf Fuzzy

Pada gambar bagian (a), graf fuzzy tersebut memiliki semua sisi bebas lemah. Titik tengah pada graf fuzzy tersebut diwarnai dengan warna fuzzy $(R, 1)$. Jika semua sisi yang terkait dengan titik tersebut merupakan sisi bebas lemah, maka semua titik yang bertetangga dengan titik tengah tersebut diwarnai dengan warna fuzzy $(R, 0.a)$, $(R, 0.b)$, $(R, 0.c)$, $(R, 0.d)$ dari warna dasar R . Semua titik yang bertetangga dengan titik tengah tersebut diwarnai dengan warna dasar yang sama dengan warna dasar titik tengah tersebut, yakni R . Oleh karena itu, banyak warna dasar yang memenuhi graf fuzzy tersebut adalah 1 sehingga bilangan kromatik adalah 1.

Pada gambar bagian (b), graf fuzzy tersebut memuat semua sisi bebas kuat. Titik tengah pada graf fuzzy tersebut diwarnai dengan warna fuzzy $(R, 1)$ dengan R merupakan warna dasar. Jika semua sisi yang terkait dengan titik tersebut merupakan sisi bebas kuat, maka semua titik yang bertetangga dengan titik tengah tersebut diwarnai dengan masing-masing warna fuzzy $(G, 1)$ dari warna dasar G . Semua titik yang bertetangga dengan titik tengah tersebut diwarnai dengan warna dasar yang berbeda dari warna dasar titik tengah tersebut, yakni G . Oleh karena itu, banyak warna dasar yang memenuhi graf fuzzy tersebut adalah 2 sehingga bilangan kromatik adalah 2.



Gambar 2. 11 Perbandingan Empat Pewarnaan Fuzzy Pada Empat Graf Fuzzy

Diberikan empat graf fuzzy tersebut yang dimana graf mendasarinya adalah K_4 . Pada gambar bagian (a), suatu graf fuzzy dengan semua sisinya yang bebas kuat memiliki bilangan kromatik empat seperti K_4 . Pada gambar bagian (b), suatu graf fuzzy memiliki beberapa sisi yang berkaitan dengan tepat satu titik (katakan u) merupakan sisi bebas lemah dan sisanya sisi bebas kuat. Pewarnaan satu titik tergantung pada sisi-sisi bebas lemah yang titik ujung lainnya diwarnai. Titik tersebut diwarnai dengan salah satu dari tiga warna dasar tersebut. Nilai keanggotaannya dari warna fuzzy ditentukan dengan menghitung kekuatan dari sisi-sisi bebas lemah tersebut. Misalkan m merupakan kekuatan minimum ($m = 0.4$) yang berkorespondensi pada sisi (uv) dan v diwarnai dengan $(B,1)$. Maka titik u diwarnai dengan warna fuzzy $(B,1 - m)$ atau $(B,0.6)$. Oleh karena itu, bilangan kromatik dari graf fuzzy tersebut adalah tiga. Dua graf fuzzy pada gambar (c) dan (d) diwarnai dengan cara yang sama.

Teorema 2.5.1 (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015) Misalkan ξ graf fuzzy dan G graf yang mendasari graf ξ . Maka $\gamma(\xi) \leq \chi(G)$.

Bukti : Misalkan $\xi = (V, \sigma, \mu)$ graf fuzzy dan graf biasa yang mendasari ξ adalah $G = (V, E)$. Oleh karena itu, $E = \{(uv) | \mu(uv) \geq 0\}$. Misalkan graf G memiliki n sisi dan $\chi(G) = k$ dengan $k \leq n$. Dengan kata lain, graf fuzzy ξ dapat memiliki

paling banyak n sisi bebas kuat. Karena semua sisi graf fuzzy ξ bebas kuat, bilangan kromatik dari graf fuzzy ξ sama dengan bilangan kromatik graf yang mendasari graf fuzzy tersebut. Selain itu, dua titik ujung dari suatu sisi dapat diwarnai dengan dua warna fuzzy yang berkorespondensi dengan warna dasar yang sama jika sisi tersebut bebas lemah. Dengan kata lain, jika graf fuzzy ξ memiliki sisi bebas kuat yang kurang dari n , maka $\gamma(\xi)$ bisa kurang dari k . Jadi, $\gamma(\xi) \leq k$ atau $\gamma(\xi) \leq \chi(G)$.

Teorema 2.5.2 (Samanta, Pramanik, & Pal, 2015) Jika ξ graf fuzzy dan G graf yang mendasari ξ , maka $\chi(G) - \gamma(\xi)$ menyatakan jumlah minimum dari sisi bebas lemah pada graf fuzzy ξ .

Bukti : Misalkan $m = \chi(G) - \gamma(\xi)$. Terdapat dua kasus

Kasus 1. $m = 0$

Jika $m = 0$ dan $\chi(G) = \gamma(\xi)$, maka graf fuzzy ξ memiliki semua sisi bebas kuat. Dengan kata lain, tidak ada sisi bebas lemah pada graf fuzzy ξ .

Kasus 2. $m > 0$

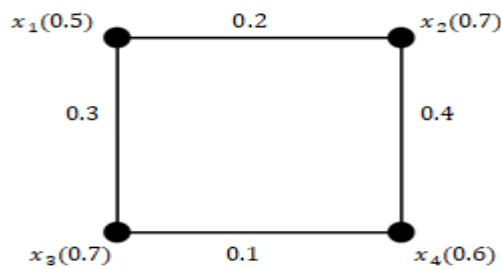
Misalkan uv_1 merupakan sisi pada graf G dan $u'v'_1$ merupakan sisi pada graf fuzzy ξ . Pada graf G , dua warna berbeda dibutuhkan untuk mewarnai titik uv_1 . Pada graf fuzzy ξ , jika $u'v'_1$ merupakan sisi bebas kuat, maka $u'v'_1$ diwarnai dengan dua warna dasar berbeda. Jika sisi tersebut tidak bebas kuat, maka u' dan v'_1 diwarnai dengan warna fuzzy dari warna dasar yang sama kecuali sebarang sisi bebas kuat dihubungkan dengan u' . Oleh karena itu, u' dan v'_1 diwarnai dengan warna fuzzy dari warna dasar yang sama, jika semua sisi terkait dengan u' atau v'_1 bukan sisi bebas kuat. Karena itu, dua titik ujung pada graf fuzzy diwarnai dengan warna fuzzy dari warna dasar yang sama, jika, setidaknya, sisi dari titik ujung tersebut bebas lemah. Ini menunjukkan bahwa ξ memiliki paling sedikit $m = \chi(G) - \gamma(\xi)$ sisi bebas lemah. Jadi, $\chi(G) - \gamma(\xi)$ merupakan jumlah minimum sisi bebas lemah.

2.5.3 Pewarnaan Fuzzy Secara Umum

Pewarnaan fuzzy pada penelitian ini adalah pewarnaan fuzzy titik. Langkah-langkah pewarnaan pada graf fuzzy secara umum meliputi penentuan sisi bebas kuat dan lemah, pemberian warna fuzzy pada suatu titik yakni warna c dan tingkat kepadatannya ($f(c) = 1 - I_{(vu_3)}$).

Diberikan graf fuzzy 2-reguler dan berorde 4

ξ_1 :



Gambar 2. 12 Graf Fuzzy ξ_1

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 1 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_1

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,5	0,7	0,25	0,2	Sisi Bebas Lemah
2	3	0,7	0,6	0,3	0,4	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,7	0,3	0,1	Sisi Bebas Lemah
1	4	0,5	0,7	0,25	0,3	Sisi Bebas Kuat

Dari tabel diatas, terdapat dua sisi bebas kuat dan yang lainnya merupakan sisi bebas lemah. Sisi x_1x_2 dan sisi x_3x_4 merupakan dua sisi bebas lemah. Sedangkan sisi x_1x_4 dan x_2x_3 merupakan sisi bebas kuat. Proses pewarnaan fuzzy ini dimulai dari titik x_1 dengan warna fuzzy $(c_1, 1)$. Selanjutnya, titik-titik yang

bertetangga dengan x_1 , yakni x_2 dan x_4 diberi masing-masing warna fuzzy. Adapun proses pewarnaan fuzzy untuk titik x_2 dan x_4 adalah sebagai berikut

Untuk titik x_2 , karena sisi yang menghubungkan titik x_1 dan x_2 merupakan sisi bebas lemah, maka warna fuzzy untuk x_2 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_2)}$ dan mempunyai warna dasar yang sama dengan warna dasar titik x_1 , yakni c_1 . Adapun proses menentukan nilai $f(c_1)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_2)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1x_2)}{(\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_2))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,2}{((0,5) \wedge (0,7))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,2}{0,5}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.4$$

$$f(c_1) = 0.6$$

Jadi, warna fuzzy untuk titik x_2 adalah $(c_1, 0.6)$

Sedangkan sisi yang menghubungkan titik x_1 dan x_4 merupakan sisi bebas kuat. Oleh karena itu, warna fuzzy untuk titik x_4 adalah $(c_2, 1)$. Sisi yang menghubungkan titik x_4 dan x_3 merupakan sisi bebas lemah. Warna fuzzy untuk x_3 adalah $(c_2, f(c_2))$ dengan warna dasar yang sama dengan warna dasar untuk titik x_4 dan $f(c_2) = 1 - I_{(x_3x_4)}$. Adapun proses penentuan nilai $f(c_2)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_2) = 1 - I_{(x_3x_4)}$$

$$f(c_2) = 1 - \frac{0,1}{(0,6 \wedge 0,7)}$$

$$f(c_2) = 1 - \frac{0.1}{((0,6) \wedge (0,7))}$$

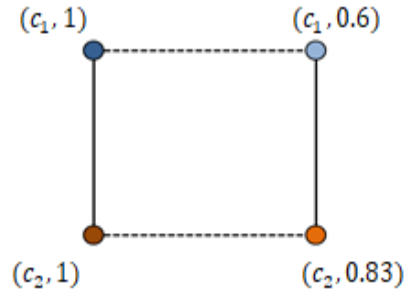
$$f(c_2) = 1 - \frac{0.1}{0.6}$$

$$f(c_2) = 1 - 0.17$$

$$f(c_2) = 0.83$$

Jadi, warna fuzzy untuk titik x_3 adalah $(c_2, 0.83)$

Karena setiap titik untuk graf fuzzy tersebut mendapatkan warna fuzzy masing-masing. Adapun gambar dari pewarnaan fuzzy tersebut sebagai berikut

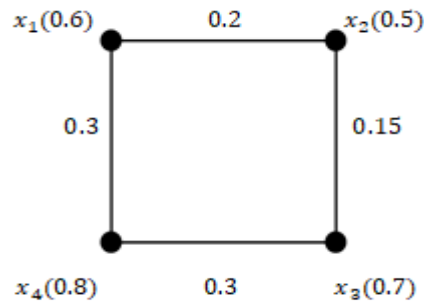


Gambar 2. 13 Gambar Fuzzy ξ_1 Diwarnai

Karena banyak minimum warna dasar yang terpenuhi untuk graf fuzzy ξ adalah 2, maka bilangan kromatik fuzzy $\gamma(\xi)$ adalah 2.

$$\therefore \gamma(\xi) = 2$$

ξ_2 :



Gambar 2. 14 Graf Fuzzy ξ_2

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 2 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Lemah Graf Fuzzy ξ_2

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,6	0,5	0,25	0,2	Sisi Bebas Lemah
2	3	0,5	0,7	0,25	0,15	Sisi Bebas Lemah
3	4	0,7	0,8	0,35	0,3	Sisi Bebas Lemah
1	4	0,6	0,8	0,3	0,25	Sisi Bebas Lemah

Karena semua sisi pada graf fuzzy tersebut bebas lemah, maka banyak warna dasar yang dibutuhkan ialah satu, yakni warna c_1 dengan $f(c_1)$ yang berbeda untuk setiap titik.

Pada proses pewarnaan pada graf fuzzy tersebut, warna fuzzy untuk titik x_1 ialah $(c_1, 1)$. Adapun pewarnaan fuzzy untuk titik x_2 , x_3 , dan x_4 ialah sebagai berikut

Untuk titik x_2 , warna fuzzy x_2 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_2)}$. Adapun proses penentuan nilai $f(c_1)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_2)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1x_2)}{(\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_2))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,2}{((0,6) \wedge (0,5))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,2}{0,5}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.4$$

$$f(c_1) = 0.6$$

Jadi, warna fuzzy untuk titik x_2 adalah $(c_1, 0.6)$.

Untuk titik x_3 , warna fuzzy x_3 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_2x_3)}$. Adapun proses penentuan nilai $f(c_1)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_2x_3)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_2x_3)}{(\sigma(x_2) \wedge \sigma(x_3))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,15}{((0,5) \wedge (0,7))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,15}{0,5}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.3$$

$$f(c_1) = 0.7$$

Jadi, warna fuzzy untuk titik x_3 adalah $(c_1, 0.7)$.

Untuk titik x_4 , warna fuzzy x_4 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1 x_4)}$.

Adapun proses penentuan nilai $f(c_1)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1 x_4)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1 x_4)}{(\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_4))}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0,25}{((0,6) \wedge (0,8))}$$

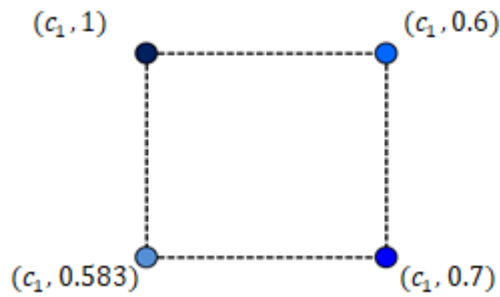
$$f(c_1) = 1 - \frac{0,25}{0,6}$$

$$f(c_1) = 1 - 0,417$$

$$f(c_1) = 0,583$$

Jadi, warna fuzzy untuk titik x_4 adalah $(c_1, 0,583)$.

Adapun pewarnaan fuzzy untuk graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

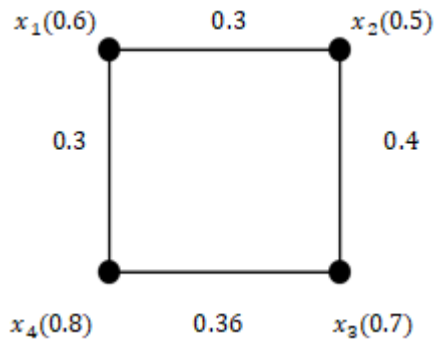


Gambar 2. 15 Graf Fuzzy ξ_2 Diwarnai

Karena banyak minimum warna dasar yang memenuhi graf fuzzy ini adalah 1, maka bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 1.

$$\therefore \gamma(\xi) = 1$$

ξ_3 :



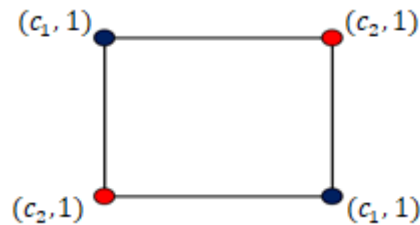
Gambar 2. 16 Graf Fuzzy ξ_3

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 3 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_3

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,6	0,5	0,25	0,3	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,5	0,7	0,25	0,4	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,7	0,8	0,35	0,36	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,6	0,8	0,3	0,3	Sisi Bebas Kuat

Karena semua sisi pada graf fuzzy ξ bebas kuat, maka banyak minimum warna dasar yang memenuhi adalah 2, yakni c_1 dan c_2 . Titik x_1 dan x_3 diberi warna fuzzy yang sama, yaitu $(c_1, 1)$. Sedangkan, titik x_2 dan x_4 diberi warna fuzzy yang sama juga, yaitu $(c_2, 1)$. Adapun pewarnaan fuzzy untuk graf fuzzy tersebut adalah sebagai berikut.

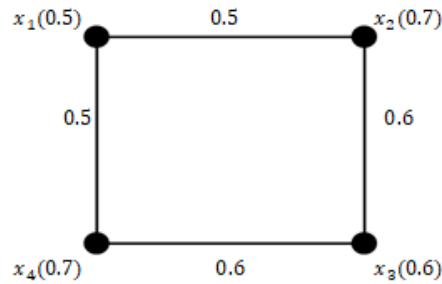


Gambar 2. 17 Graf Fuzzy ξ_3 Diwarnai

Karena banyak minimum warna dasarnya adalah 2, maka bilangan kromatik fuzzy $\gamma(\xi)$ adalah 2.

$$\therefore \gamma(\xi) = 2$$

ξ_4 :



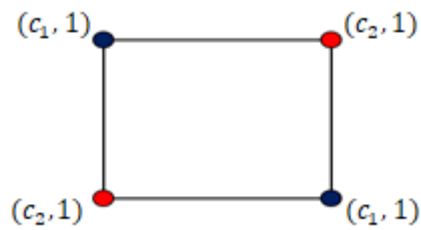
Gambar 2. 18 Graf Fuzzy ξ_4

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 4 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_4

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,5	0,7	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,7	0,6	0,3	0,6	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,7	0,3	0,6	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,5	0,7	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat

Karena semua sisi graf fuzzy tersebut bebas kuat, maka banyak minimum warna dasar yang memenuhi adalah 2, yaitu c_1 dan c_2 . Pada penentuan sisi bebas kuat-lemah pada graf fuzzy ini, nilai $\mu(x_i x_j)$ merupakan dua kali dari nilai $1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$ karena nilai $\mu(x_i x_j) = \sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)$ dengan nilai $\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)$ dua kali dari nilai $1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$. Akibatnya, setiap sisi dari graf fuzzy tersebut bebas kuat dan graf fuzzy ini merupakan graf fuzzy kuat. Karena setiap sisinya bebas kuat, maka setiap titik yang bertetangga diberikan warna fuzzy $(c_n, 1)$ dengan warna dasar c_n yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang memenuhi untuk graf fuzzy ini ialah 2, yakni $(c_1, 1)$ untuk titik x_1 dan x_3 dan $(c_2, 1)$ untuk titik x_2 dan x_4 . Adapun pewarnaan fuzzynya seperti gambar sebagai berikut.



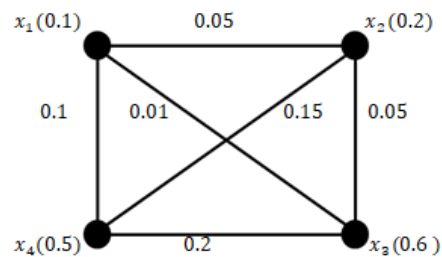
Gambar 2. 19 Graf Fuzzy ξ_4 Diwarnai

Karena banyak warna yang memenuhi ialah 2, maka bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 2.

$$\therefore \gamma(\xi) = 2$$

Graf fuzzy berorde 4 dan 3 – reguler

ξ_1 :



Gambar 2. 20 Graf Fuzzy ξ_1

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 5 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_1

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,1	0,2	0,05	0,05	Sisi Bebas Kuat
1	3	0,1	0,6	0,05	0,01	Sisi Bebas Lemah
1	4	0,1	0,5	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,2	0,6	0,1	0,05	Sisi Bebas Lemah
2	4	0,2	0,5	0,1	0,15	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,5	0,25	0,2	Sisi Bebas Lemah

Dari tabel diatas, sisi-sisi yang bebas kuat ialah x_1x_2 , x_1x_4 , dan x_2x_4 . Sedangkan sisi-sisi yang bebas lemah ialah x_1x_3 , x_2x_3 , dan x_3x_4 . Pada proses pewarnaan fuzzy, dua titik yang dihubungkan dengan sisi bebas kuat akan diberikan warna fuzzy $(c_n, 1)$ dengan warna dasar c_n yang berbeda. Adapun titik-titik yang dihubungkan dengan sisi-sisi bebas kuat adalah titik x_1, x_2 , dan x_4 dengan masing-masing warna fuzzy $(c_1, 1)$, $(c_2, 1)$, dan $(c_3, 1)$.

Pada pewarnaan titik x_3 , salah satu titik yang bertetangga dengan x_3 yang dihubungkan dengan sisi bebas lemah adalah x_1 . Warna fuzzy untuk x_3 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan warna dasar yang sama untuk x_1 dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_3)}$. Adapun proses penentuan nilai $f(c_1)$ adalah sebagai berikut

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_3)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1x_3)}{\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_3)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0.01}{(0.1) \wedge (0.6)}$$

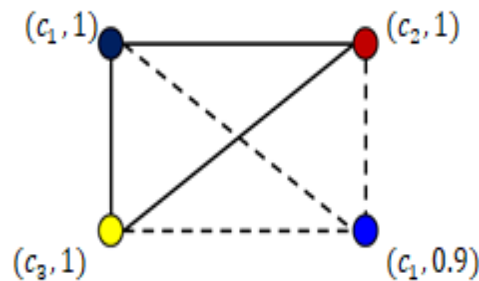
$$f(c_1) = 1 - \frac{0.01}{0.1}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.1$$

$$f(c_1) = 0.9$$

Jadi, warna fuzzy untuk x_3 adalah $(c_1, 0.9)$

Pewarnaan fuzzy untuk graf fuzzy tersebut ialah sebagai berikut

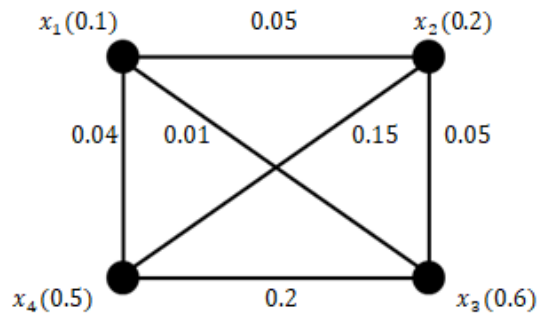


Gambar 2. 21 Graf Fuzzy ξ_1 Diwarnai

Banyak warna minimum yang dibutuhkan oleh graf fuzzy tersebut ialah 3. Oleh karena itu, bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 3.

$$\therefore \gamma(\xi) = 3$$

ξ_2 :



Gambar 2. 22 Graf Fuzzy ξ_2

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 6 Penentuan Sisi Bebas dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_2

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,1	0,2	0,05	0,05	Sisi Bebas Kuat
1	3	0,1	0,6	0,05	0,01	Sisi Bebas Lemah
1	4	0,1	0,5	0,05	0,04	Sisi Bebas Lemah
2	3	0,2	0,6	0,1	0,05	Sisi Bebas Lemah
2	4	0,2	0,5	0,1	0,15	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,5	0,25	0,2	Sisi Bebas Lemah

Sisi x_1x_2 dan x_2x_4 merupakan sisi bebas kuat pada graf fuzzy tersebut. Sisi-sisi selain dari kedua sisi tersebut merupakan sisi-sisi bebas lemah. Titik x_1 dan x_2 diberi warna fuzzy $(c_1, 1)$ dan $(c_2, 1)$. Untuk pewarnaan titik x_4 , karena titik x_4 dan x_2 dihubungkan dengan sisi bebas kuat, titik x_4 diberi warna dasar yang berbeda dari warna dasar titik x_2 . Tetapi karena sisi yang menghubungkan titik x_4 dan x_1 merupakan sisi bebas lemah, maka warna dasar titik x_4 sama dengan

warna dasar titik x_1 . Warna fuzzy untuk titik x_4 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_4)}$. Sehingga

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_4)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1x_4)}{\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_4)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0.04}{(0.1) \wedge (0.5)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0.04}{0.1}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.4$$

$$f(c_1) = 0.6$$

Jadi, warna fuzzy untuk x_4 adalah $(c_1, 0.6)$

Untuk titik x_3 , sisi yang menghubungkan titik x_3 dan x_1 merupakan sisi bebas lemah. Warna fuzzy untuk x_3 adalah $(c_1, f(c_1))$ dengan $f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_3)}$. Sehingga

$$f(c_1) = 1 - I_{(x_1x_3)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{\mu(x_1x_3)}{\sigma(x_1) \wedge \sigma(x_3)}$$

$$f(c_1) = 1 - \frac{0.01}{(0.1) \wedge (0.6)}$$

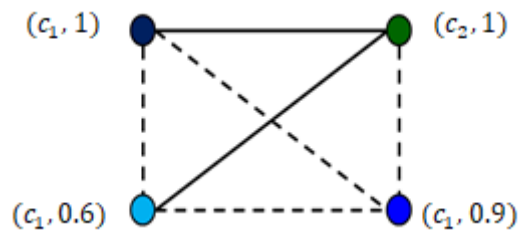
$$f(c_1) = 1 - \frac{0.01}{0.1}$$

$$f(c_1) = 1 - 0.1$$

$$f(c_1) = 0.9$$

Jadi, warna fuzzy untuk x_3 adalah $(c_1, 0.9)$

Pewarnaan fuzzy untuk graf fuzzy tersebut adalah sebagai berikut

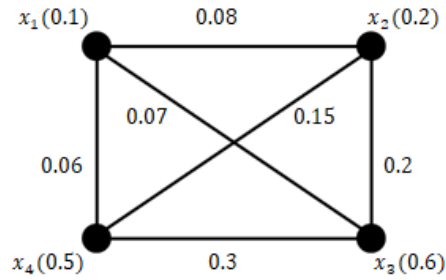


Gambar 2. 23 Graf Fuzzy ξ_2 Diwarnai

Karena banyak minimum warna dasar yang memenuhi ialah 2, maka bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 2.

$$\therefore \gamma(\xi) = 2$$

ξ_3 :



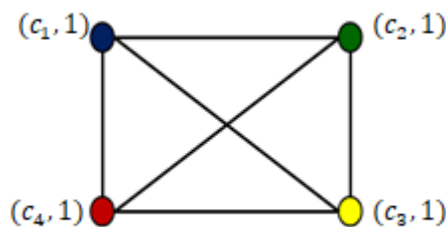
Gambar 2. 24 Graf Fuzzy ξ_3

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 7 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_3

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$1/2\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,1	0,2	0,05	0,08	Sisi Bebas Kuat
1	3	0,1	0,6	0,05	0,07	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,1	0,5	0,05	0,06	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,2	0,6	0,1	0,2	Sisi Bebas Kuat
2	4	0,2	0,5	0,1	0,15	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,5	0,25	0,3	Sisi Bebas Kuat

Semua sisi pada graf fuzzy tersebut bebas kuat. Titik x_1 , x_2 , x_3 , dan x_4 diberi masing-masing warna fuzzy $(c_1, 1)$, $(c_2, 1)$, $(c_3, 1)$, dan $(c_4, 1)$. Sehingga

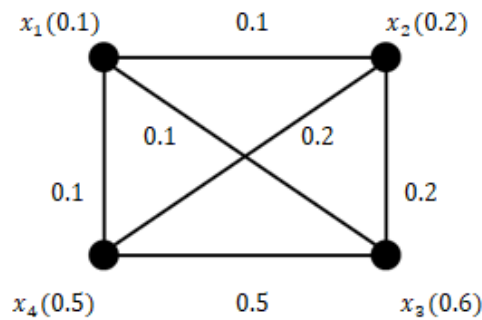


Gambar 2. 25 Gambar Fuzzy ξ_3 Diwarnai

Karena banyak warna yang ada pada graf fuzzy tersebut 4, maka bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 4.

$$\therefore \gamma(\xi) = 4$$

ξ_4 :



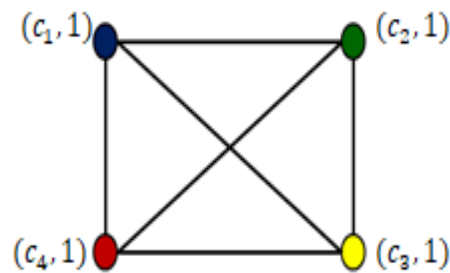
Gambar 2. 26 Graf Fuzzy ξ_4

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy ini adalah sebagai berikut

Tabel 2. 8 Penentuan Sisi Bebas Kuat dan Sisi Bebas Lemah Graf Fuzzy ξ_4

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,1	0,2	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
1	3	0,1	0,6	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,1	0,5	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,2	0,6	0,1	0,2	Sisi Bebas Kuat
2	4	0,2	0,5	0,1	0,2	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,6	0,5	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat

Pada tabel diatas, nilai $\mu(x_i x_j)$ dua kali dari nilai $\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$. Graf fuzzy ini merupakan graf fuzzy kuat dan nilai $\mu(x_i x_j)$ lebih besar dari nilai $\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$. Akibatnya, semua sisi pada graf fuzzy tersebut bebas kuat. Karena itu, semua titik diberi masing-masing warna fuzzy $(c_n, 1), n = 1, \dots, 4$, dengan warna dasar c_n yang berbeda dengan warna dasar titik lainnya. Sehingga



Gambar 2. 27 Gambar Fuzzy ξ_4 Diwarnai

Karena banyak warna dasar yang memenuhi adalah 4, maka bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ adalah 4.

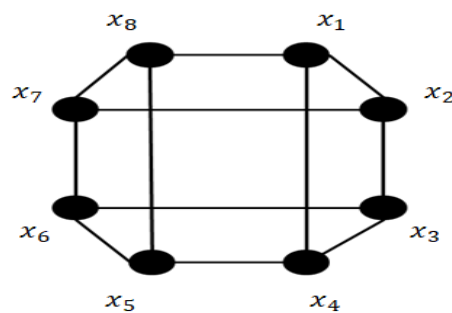
$$\therefore \gamma(\xi) = 4$$

Graf Fuzzy Multipartit

Salah satu graf fuzzy multipartit adalah graf fuzzy bipartit

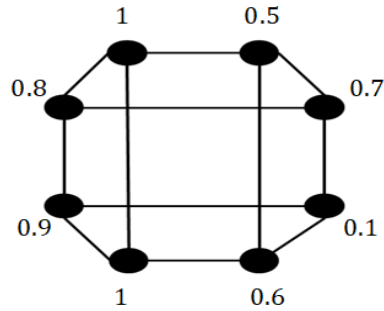
Misalkan G merupakan graf berorde 8 3-reguler. Setiap titik pada graf tersebut berderajat 3. Semua titik tersebut dipartisi menjadi dua subhimpunan, yakni subhimpunan V_1 yang merupakan himpunan titik-titik ganjil dan V_2 yang merupakan himpunan titik-titik genap.

G :



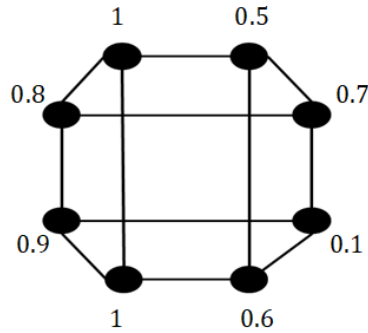
Dengan $V_1 = \{$ **Gambar 2. 28** Graf G berorde 8 3 – reguler $x_2, x_1x_4, x_1x_8,$
 $x_2x_3, x_2x_7, x_3x_4, x_3x_6, x_4x_5, x_5x_6, x_5x_8, x_6x_7, x_7x_8\}.$

Misalkan tiga graf fuzzy dengan graf G -nya adalah graf berorde 8, 3-reguler.



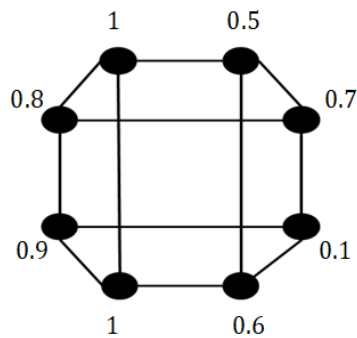
Sisi	$\mu(x_i x_j)$	Sisi	$\mu(x_i x_j)$
$x_1 x_2$	0,5	$x_3 x_6$	0,1
$x_1 x_4$	0,5	$x_4 x_5$	0,6
$x_1 x_8$	0,5	$x_5 x_6$	0,9
$x_2 x_3$	0,1	$x_5 x_8$	1
$x_2 x_7$	0,7	$x_6 x_7$	0,8
$x_3 x_4$	0,1	$x_7 x_8$	0,8

(i)



Sisi	$\mu(x_i x_j)$	Sisi	$\mu(x_i x_j)$
$x_1 x_2$	0,5	$x_3 x_6$	0,05
$x_1 x_4$	0,21	$x_4 x_5$	0,24
$x_1 x_8$	0,23	$x_5 x_6$	0,63
$x_2 x_3$	0,01	$x_5 x_8$	0,44
$x_2 x_7$	0,07	$x_6 x_7$	0,22
$x_3 x_4$	0,08	$x_7 x_8$	0,52

(ii)



Sisi	$\mu(x_i x_j)$	Sisi	$\mu(x_i x_j)$
$x_1 x_2$	0,2	$x_3 x_6$	0,04
$x_1 x_4$	0,18	$x_4 x_5$	0,12
$x_1 x_8$	0,22	$x_5 x_6$	0,27
$x_2 x_3$	0,01	$x_5 x_8$	0,31
$x_2 x_7$	0,01	$x_6 x_7$	0,11
$x_3 x_4$	0,02	$x_7 x_8$	0,3

(iii)

Adapun penentuan sisi bebas kuat dan sisi bebas lemah dari graf fuzzy bipartit ini adalah sebagai berikut (Dengan pertidaksamaan $\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\} \leq \mu(x_i x_j)$, dengan $i < j$)

Untuk graf fuzzy bipartit (i)

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,5	0,7	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,5	0,6	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat
1	8	0,5	1	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat
2	3	0,7	0,1	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
2	7	0,7	0,8	0,35	0,7	Sisi Bebas Kuat
3	4	0,1	0,6	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
3	6	0,1	0,9	0,05	0,1	Sisi Bebas Kuat
4	5	0,6	1	0,3	0,6	Sisi Bebas Kuat
5	6	1	0,9	0,45	0,9	Sisi Bebas Kuat
5	8	1	1	0,5	1	Sisi Bebas Kuat
6	7	0,9	0,8	0,4	0,8	Sisi Bebas Kuat
7	8	0,8	1	0,4	0,8	Sisi Bebas Kuat

Untuk graf fuzzy bipartit (ii)

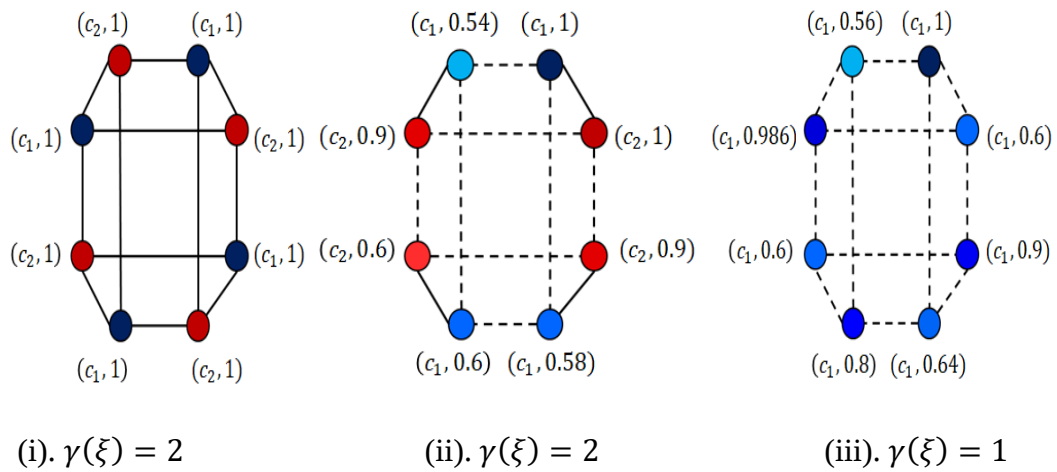
i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,5	0,7	0,25	0,5	Sisi Bebas Kuat
1	4	0,5	0,6	0,25	0,21	Sisi Bebas Lemah
1	8	0,5	1	0,25	0,23	Sisi Bebas Lemah
2	3	0,7	0,1	0,05	0,01	Sisi Bebas Lemah
2	7	0,7	0,8	0,35	0,07	Sisi Bebas Lemah
3	4	0,1	0,6	0,05	0,08	Sisi Bebas Kuat
3	6	0,1	0,9	0,05	0,04	Sisi Bebas Lemah
4	5	0,6	1	0,3	0,24	Sisi Bebas Lemah
5	6	1	0,9	0,45	0,63	Sisi Bebas Kuat
5	8	1	1	0,5	0,44	Sisi Bebas Lemah
6	7	0,9	0,8	0,4	0,22	Sisi Bebas Lemah
7	8	0,8	1	0,4	0,52	Sisi Bebas Kuat

Untuk graf fuzzy bipartit (iii)

i	j	$\sigma(x_i)$	$\sigma(x_j)$	$\frac{1}{2}\{\sigma(x_i) \wedge \sigma(x_j)\}$	$\mu(x_i x_j)$	Keterangan
1	2	0,5	0,7	0,25	0,2	Sisi Bebas Lemah
1	4	0,5	0,6	0,25	0,18	Sisi Bebas Lemah
1	8	0,5	1	0,25	0,22	Sisi Bebas Lemah
2	3	0,7	0,1	0,05	0,01	Sisi Bebas Lemah

2	7	0,7	0,8	0,35	0,01	Sisi Bebas Lemah
3	4	0,1	0,6	0,05	0,02	Sisi Bebas Lemah
3	6	0,1	0,9	0,05	0,04	Sisi Bebas Lemah
4	5	0,6	1	0,3	0,12	Sisi Bebas Lemah
5	6	1	0,9	0,45	0,27	Sisi Bebas Lemah
5	8	1	1	0,5	0,31	Sisi Bebas Lemah
6	7	0,9	0,8	0,4	0,11	Sisi Bebas Lemah
7	8	0,8	1	0,4	0,3	Sisi Bebas Lemah

Adapun proses pewarnaan fuzzy dari tiga graf fuzzy bipartit tersebut adalah sebagai berikut



Gambar 2. 29 Tiga Graf Fuzzy Bipartit Diwarnai

Pada pewarnaan fuzzy dari ketiga graf fuzzy bipartit tersebut, bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ atau warna dasar yang memenuhi graf fuzzy (i) dan (ii) adalah 2. Sedangkan bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ graf fuzzy (iii) adalah 1.

Pada graf fuzzy bipartit (i), banyak warna yang ada ialah 2, yakni biru dan merah. Semua titik yang diwarnai dengan warna biru ialah x_1, x_3, x_5, x_7 yang merupakan semua anggota dari subhimpunan V_1 . Sedangkan semua titik lainnya yang diwarnai dengan warna merah ialah x_2, x_4, x_6, x_8 yang merupakan semua anggota subhimpunan V_2 . Dari pewarnaan ini, dua warna tersebut juga mewakili dua subhimpunan dari himpunan semua titik dari graf fuzzy tersebut.

Pada graf fuzzy bipartit (ii), banyak warna yang ada ialah 2, sama halnya dengan graf fuzzy (i). Semua titik yang diwarnai dengan warna biru ialah x_1, x_4, x_5, x_8 , dengan titik x_1 dan x_5 merupakan anggota subhimpunan V_1 dan titik x_4 dan x_8 merupakan anggota subhimpunan V_2 . Semua titik yang diwarnai dengan warna merah ialah x_2, x_3, x_6, x_7 , dengan titik x_3 dan x_7 merupakan anggota subhimpunan V_1 dan titik x_2 dan x_6 merupakan anggota subhimpunan V_2 . Dari pewarnaan tersebut, kedua warna tersebut tidak mewakili kedua subhimpunan tersebut.

Pada graf fuzzy bipartit (iii), hanya ada satu warna yang ada, yakni warna biru. Semua titik dari kedua subhimpunan tersebut diwarnai dengan warna tersebut dengan masing-masing tingkat kepadatan warna $f(c_1)$.

Adapun bilangan kromatik fuzzy $\gamma(\xi)$ untuk k – partit adalah sebagai berikut

Banyak Himpunan Titik	Bilangan Kromatik Graf Fuzzy Kuat	Bilangan Kromatik Graf Fuzzy Biasa
2	2	$1 \leq \gamma(\xi) \leq 2$
3	3	$1 \leq \gamma(\xi) \leq 3$
4	4	$1 \leq \gamma(\xi) \leq 4$
5	5	$1 \leq \gamma(\xi) \leq 5$
...	...	$1 \leq \gamma(\xi) \leq \dots$
$k - 1$	$k - 1$	$1 \leq \gamma(\xi) \leq k - 1$
k	k	$1 \leq \gamma(\xi) \leq k$

Dari tabel diatas, graf fuzzy kuat multipartit memiliki bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ atau banyak minimum warna dasar sebanyak banyak himpunan titik pada graf fuzzy tersebut. Pada graf fuzzy kuat multipartit, setiap warna dasar mewakili masing-masing satu himpunan titik pada graf fuzzy tersebut. Pada graf fuzzy biasa multipartit, satu warna dasar dapat mewakili satu himpunan titik jika $\gamma(\xi) = k$, dengan k merupakan banyak himpunan titik. Jika $1 \leq \gamma(\xi) < k$, satu warna dasar

dapat mewakili lebih dari satu himpunan titik. Bilangan kromatik $\gamma(\xi)$ graf fuzzy multipartit ialah k untuk graf fuzzy kuat dan $1 \leq \gamma(\xi) \leq k$ untuk graf fuzzy biasa.