

**TESIS**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL  
MATEMATIKA PERILAKU MEROKOK DENGAN PEROKOK  
BERHENTI SEMENTARA DAN PEROKOK BERHENTI PERMANEN**

Disusun dan diajukan oleh

**ANDI UTARI SAMSIR**

**H022191009**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2021**

**TESIS**

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL  
MATEMATIKA PERILAKU MEROKOK DENGAN PEROKOK  
BERHENTI SEMENTARA DAN PEROKOK BERHENTI PERMANEN**

Disusun dan diajukan oleh

**ANDI UTARI SAMSIR**

**H022191009**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2021**

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL MODEL  
MATEMATIKA PERILAKU MEROKOK DENGAN PEROKOK  
BERHENTI SEMENTARA DAN PEROKOK BERHENTI PERMANEN

Disusun dan diajukan oleh

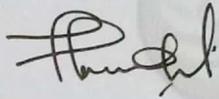
ANDI UTARI SAMSIR  
H022191009

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam  
rangka Penyelesaian Studi Program Magister Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin  
pada tanggal 16 Juli 2021  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

Pembimbing Pendamping

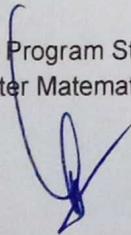


Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc  
NIP. 19680114 199412 1 001



Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si  
NIP. 198009042003122001

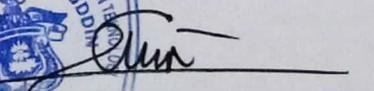
Ketua Program Studi  
Magister Matematika,



Dr. Muhammad Zakir, M.Si  
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin



  
Dr. Eng. Amiruddin, S.Si., M.Si  
NIP. 19720515 199702 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Andi Utari Samsir  
NIM : H022191009  
Program Studi : Matematika  
Jenjang : S2

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

### **Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Perilaku Merokok dengan Perokok Berhenti Sementara dan Perokok Berhenti Permanen**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa Tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi Tesis ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 16 Juli 2021

Yang Menyatakan



Andi Utari Samsir

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah Rabbil Alamin* ucapan syukur penulis terhadap kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala Rabb* semesta alam. Karena atas limpahan rahmat, hidayah, dan kasih sayang-Nya, penulis masih diberikan kesempatan dan kesehatan sehingga tesis ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam juga tak henti-hentinya tercurah kepada Rasulullah *Shallallahu Alaihi Wasallam*, yang menjadi panutan untuk terus menuntut ilmu dan memberikan manfaat kepada sesama.

Alhamdulillah berkat pertolongan Allah akhirnya tesis dengan judul **“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Perilaku Merokok dengan Perokok Berhenti Sementara dan Perokok Berhenti Permanen”** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar Magister Sains pada Program Studi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Dalam proses penyelesaian tesis ini banyak suka dan duka yang telah dilewati penulis. Namun berkat rahmat dan izin-Nya serta dukungan dan bantuan dari berbagai pihak, sehingga tesis ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan tak terhingga kepada Ayahanda **Andi Samsir.Ar** dan Ibunda **Kaarfiawati.K,S.Ag** tercinta, yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kesabaran bertabur cinta dan kasih sayang dengan penuh ketulusan hati dan kesungguhan dalam

memberikan semangat dan dukungan kepada penulis dengan doa dan restunya untuk keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan. Untuk adikku tersayang **Andi Novita Samsir, S.A.P**, terimakasih banyak atas pengaruh positif yang luar biasa kepada penulis selama menjalani proses pendidikan dengan saling mengingatkan satu sama lain dalam hal kebaikan, menjadi teman terbaik dalam berbagi keluh kesah tentang dunia perkuliahan serta senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Kepada seluruh keluarga yang senantiasa memberikan doa dan dukungan bagi penulis selama menjalani pendidikan.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku pembimbing utama dan Ibu Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si selaku pembimbing pendamping penulis atas kesediaan, kesabaran, dan kesetiaannya untuk membimbing dan membagi ilmunya kepada penulis serta senantiasa mengarahkan, mengingatkan dan menasihati sehingga tesis ini dapat terselesaikan.
2. Bapak Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc, Bapak Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc dan bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan tesis ini.

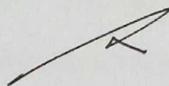
3. Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku ketua program studi hingga penulis semester 3 dan Bapak Dr. Muhammad Zakir, M.Si yang telah memberikan banyak bantuan selama penulis menjalani pendidikan dan kepada segenap jajaran Pegawai Akademik Program Studi Magister Matematika.
4. Bapak/Ibu Dosen Pengajar Program Studi Magister Matematika yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Magister Matematika dan kepada Pak Irsan selaku staf pada saat penulis semester satu dan Irma atas bantuannya dalam pengurusan akademik selama ini.
5. Ibu Rektor Universitas Hasanuddin beserta jajarannya, Bapak Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya dan semua pihak birokrasi atas kemudahan yang diberikan, baik dalam bidang akademik maupun bidang kemahasiswaan.
6. Sahabat terdekat penulis Srimul, Arni, Indah, Ayu, Ida, Eka, Agnes, Amy, Ainun, Dian, Mira, Afni yang selalu memberi bantuan, dukungan, kebahagiaan, waktu, dan selalu menjadi tempat keluh kesah penulis.
7. Teman-teman seperjuangan Program Studi Magister Matematika 2019, Kak Amira, Pute, Fitri, Astri, Kak Nita, Ade, Noni, Ica, Nola, Syamsir atas kebersamaannya yang sangat menyenangkan walaupun hanya pada saat semester 1 dan kemudian harus terpisah karena pandemic

COVID-19. Terima kasih untuk dukungan dan waktunya saat berjuang sama-sama di dunia perkuliahan.

8. Tema-teman Acceleneun (Akselerasi SMAN 3 Sengkang) atas semangat dan dukungannya untuk menyelesaikan tugas akhir.
9. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga segala bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapat imbalan yang setimpal dari Allah SWT. Akhir kata semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan. Amiin Yaa Rabbal Alamiin.

Makassar, 16 Juli 2021



Andi Utari Samsir

## ABSTRAK

Merokok merupakan kegiatan yang sering ditemui di berbagai lapisan masyarakat. Kegiatan ini seakan telah menjadi bagian dari kehidupan sehari-hari. Dalam penelitian ini, dideskripsikan model kontrol perilaku merokok untuk mempelajari kestabilan dan bentuk strategi kontrol yang efektif dalam mengurangi jumlah perokok. Model yang dibangun yaitu dalam bentuk persamaan diferensial dengan penerapan kontrol berupa kampanye edukasi dan pemberian obat anti nikotin. Hasil analisa menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas perokok dan adanya perokok adalah stabil asimtotik yang diperoleh dari kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Sistem diselesaikan dengan menggunakan prinsip minimum *Pontryagin* dan secara numerik diselesaikan dengan metode *forward-backward Sweep*. Simulasi numerik dari masalah optimal menunjukkan bahwa dengan adanya penerapan kampanye edukasi dan pemberian obat anti nikotin maka perilaku merokok lebih cepat berkurang dan meningkatkan populasi perokok yang berhenti secara permanen.

**Kata Kunci** : Model Matematika Perilaku Merokok, Kontrol Optimal, Titik Kesetimbangan, Kestabilan, Prinsip Minimum Pontryagin, Metode Forward-Backward Sweep.

## ABSTRACT

*Smoking is an activity that is often found in society. This activity has become a part of everyday life. In this research, we describe a smoking control model to study the stability and effective control strategies form to reduce the smoking population. The model is a differential equation with implementation of controls in the form of educational campaign and anti-nicotine medicine. The result of the analysis showed that the equilibrium point of smokers and smoker-free are asymptotically stable as obtained from Routh-Hurwitz criteria. The completion of this research uses the Pontryagin minimum principle and numerically using the forward-backward Sweep method. Numerical simulations of the optimal problem show that with the implementation of education campaigns and anti-nicotine medicine, the smokers can be decreased more quickly and increasing the smoking population who quit permanently.*

**Keywords** : *Mathematical Model on Smoking, Optimal Control, Equilibrium Point, Stability, Pontryagin Minimum Principle, Forward-Backward Sweep Method.*

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL.....</b>	<b>ii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN TESIS.....</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN .....</b>	<b>iv</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL.....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xiv</b>
<b>BAB 1 PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	6
1.4 Manfaat Penelitian.....	7
1.5 Batasan Masalah.....	8
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Perilaku Merokok.....	9
2.2 Sistem Persamaan Differensial .....	10
2.3 Titik Keseimbangan.....	10
2.4 Linearisasi dan Kestabilan Titik Keseimbangan .....	11

2.5	Kriteria Routh-Hurwitz .....	12
2.6	Masalah Kontrol Optimal Syarat Perlu Keoptimalannya .....	14
2.7	Prinsip Minimum Pontryagin.....	19
2.8	Metode Forward-Backward Sweep .....	21
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>		<b>25</b>
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b>		
4.1	Model Matematika Perilaku Merokok .....	27
4.2	Titik Keseimbangan Sistem.....	32
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Perokok .....	33
4.2.2	Titik Keseimbangan Adanya Perokok .....	33
4.3	Linearisasi dan Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	35
4.3.1	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Perokok.....	36
4.3.2	Kestabilan Titik Keseimbangan Adanya Perokok.....	38
4.4	Formulasi Model Kontrol Optimal .....	41
4.5	Penyelesaian Kontrol Optimal .....	43
4.6	Simulasi Numerik .....	52
<b>BAB V PENUTUP</b>		
5.1	Kesimpulan.....	64
5.2	Saran.....	65
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>66</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>		<b>69</b>

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Kestabilan dari sistem linear $\dot{x} = f(x)$ dengan $\det(J - \lambda I) = 0$ .....	12
<b>Tabel 4.1</b> Deskripsi Parameter dan Variabel Model .....	31
<b>Tabel 4.2</b> Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik .....	53

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 4.1</b> Diagram Kompartemen Model Matematika Perilaku Merokok .....	28
<b>Gambar 4.2</b> Grafik Perubahan Potential Smokers dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	54
<b>Gambar 4.3</b> Grafik Perubahan Snuffing Class dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	55
<b>Gambar 4.4</b> Grafik Perubahan Irregular Smokers dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	56
<b>Gambar 4.5</b> Grafik Perubahan Regular Smokers dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	57
<b>Gambar 4.6</b> Grafik Perubahan Temporary Quitters dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	58
<b>Gambar 4.7</b> Grafik Perubahan Permanent Quitters dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) .....	59
<b>Gambar 4.8</b> Grafik Perbandingan Fungsi Kontrol Optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ .....	60
<b>Gambar 4.9</b> Grafik Perubahan <i>Snuffing Class</i> (a), <i>Irregular Smokers</i> (b), <i>Regular Smokers</i> (c) dalam Populasi terhadap Waktu ( $t = 20$ tahun) dengan nilai $\beta_1$ yang berbeda-beda .....	61

**Gambar 4.10** Grafik Perubahan *Snuffing Class (a)*, *Irregular Smokers (b)*,  
*Regular Smokers (c)* dalam Populasi terhadap Waktu  
( $t = 20$  tahun) dengan nilai  $\omega$  yang berbeda-beda ..... 62

**Gambar 4.11** Grafik Perubahan *Snuffing Class (a)*, *Irregular Smokers (b)*,  
*Regular Smokers (c)* dalam Populasi terhadap Waktu  
( $t = 20$  tahun) dengan nilai  $\gamma$  yang berbeda-beda..... 63

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Model matematika adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari suatu fenomena. Ekspresi dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Model matematika digunakan untuk menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkannya secara kualitatif atau kuantitatif, yang dibuat dengan melibatkan asumsi – asumsi yang didasarkan atas eksperimen atau observasi terhadap fenomena sebenarnya (Cahyono, 2013). Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan secara matematika adalah perilaku merokok.

Merokok merupakan kegiatan yang sering ditemui diberbagai lapisan masyarakat. Kegiatan ini seakan telah menjadi bagian dari kehidupan sehari-hari, tidak hanya dewasa, remaja bahkan anak-anak baik laki-laki maupun perempuan. Terdapat berbagai bahaya yang ditimbulkan oleh rokok, tidak hanya bagi perokok itu sendiri melainkan bahaya bagi orang lain disekitarnya (Salawati, 2016). Di dalam sebatang rokok terkandung lebih dari 4000 jenis senyawa kimia dengan komponen utama nikotin, tar, dan karbonmonoksida. Nikotin merupakan zat yang bersifat adiktif atau zat yang dapat membuat seseorang ketagihan dan menimbulkan rasa ketergantungan terhadap rokok. Kandungan tar yang

bersifat karsinogenik atau penyebab kanker dan karbonmonoksida yang mampu menurunkan kadar oksigen dalam darah dapat menjadi penyebab timbulnya beberapa risiko kesehatan bagi perokok, diantaranya penyakit paru-paru, stroke, gangguan pembuluh darah, gangguan kehamilan dan janin (Kemenkes RI, 2018). Merokok merupakan bentuk utama penggunaan tembakau. Tembakau menjadi penyebab tunggal kematian utama yang dapat dicegah. Konsumsi tembakau merupakan hal yang umum karena harga yang relatif terjangkau, pemasaran yang tersebar luas dan agresif, kurangnya pengetahuan masyarakat akan bahaya yang ditimbulkan, serta inkonsistensi kebijakan publik terhadap penggunaan tembakau (Kemenkes RI, 2018). Berdasarkan laporan World Health Organization (WHO) per Desember 2019, lebih dari 8 juta orang meninggal setiap tahunnya karena penggunaan tembakau. Lebih dari 7 juta kematian tersebut berasal dari penggunaan tembakau secara langsung sementara sekitar 1,2 juta disebabkan oleh aktivitas penggunaan tembakau (WHO, 2019).

Indonesia merupakan produsen rokok terbesar di dunia setelah China dan menjadi negara pertama dengan produksi rokok tertinggi di ASEAN. Pada tahun 2016 pertumbuhan pasar tembakau di ASEAN mencapai 548 miliar batang rokok yang terjual, utamanya di Indonesia, Filipina, Thailand dan Vietnam (SEATCA, 2018). Berdasarkan data Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) 2018, prevalensi perokok usia di atas 15 tahun mencapai 33,8 persen dan pada remaja usia 10-18 tahun

mengalami peningkatan dari tahun 2013 sebesar 7,2 persen menjadi 9,1 persen di tahun 2018. Prevalensi perokok laki-laki usia di atas 15 tahun masih berada pada angka yang tinggi yaitu 62,9 persen dan menjadi prevalensi perokok laki-laki tertinggi di dunia (Kemenkes RI, 2018).

Sampai saat ini telah banyak penelitian yang menyebutkan mengenai jenis penyakit yang ditimbulkan akibat merokok, namun hingga saat ini merokok tetap saja menjadi kebiasaan yang tidak bisa ditinggalkan oleh banyak orang. Hal ini dipengaruhi oleh beberapa faktor diantaranya ingin terlihat lebih dewasa, melihat kebiasaan orang terdekat seperti orang tua, saudara dan teman, sebagai pelarian untuk melepas penat atau stress dan karena adanya pengaruh iklan. Hal inilah yang mengakibatkan jumlah perokok terus bertambah.

Model matematika merokok pertama kali diperkenalkan oleh Garsow dkk pada tahun 1997 (Garsow, C.C., Salivia, G.J & Herrera, A.A., 1997). Pada model tersebut, populasi terbagi menjadi tiga kelas yaitu *potential smokers* atau orang yang tidak merokok namun memiliki potensi untuk menjadi perokok dimasa depan, kemudian kelas perokok dan kelas orang yang berhenti merokok. Model tersebut kemudian dikembangkan oleh Sharomi & Gumel pada tahun 2008 dengan membagi kelas perokok menjadi dua yaitu *mild smokers* dan *chain smokers* (Sharomi, O & Gumel., A.B., 2008). Zaman menganalisis model berhenti merokok Garsow dengan mempertimbangkan kelas *occasional smokers* dan menyajikan perilaku kualitatif pada model (Zaman, G., 2011a). Zeb, dkk pada tahun

2013 menyajikan model berhenti merokok yang baru berdasarkan model Zaman dimana interaksi antara *potential smokers* dan *occasional smokers* adalah akar kuadrat (Zeb, A., Zaman, G & Momani, S., 2013) kemudian Din dan rekan-rekannya pada tahun 2016 memodifikasi model Zeb dengan menambahkan kompartemen perokok yang menderita penyakit (Din, Q., Ozair, M., Hussain, T & Saeed, U., 2016). Guerrero menggunakan model matematika untuk menggambarkan karakteristik kebiasaan merokok di Spanyol pada tahun 2011 (Guerrero. F., Santonja, F.J., & Villanueva, R.J., 2011). Pada tahun 2013, Alkhudari, dkk mengadopsi dan mengembangkan penelitian Sharomi dan Gumel dengan mempertimbangkan efek teman sebaya pada perokok berhenti sementara (Alkhudhari, Z., Al-Sheikh, S., Al-Tuwairqi, S., 2014a), kemudian pada penelitian selanjutnya berdasarkan model yang telah diperoleh, mereka mengkaji mengenai pengaruh *occasional smokers* terhadap *potential smoker* (Alkhudhari, Z., Al-Sheikh, S., Al-Tuwairqi, S., 2014b) dan pada tahun 2015 mengkaji mengenai pengaruh *heavy smokers* terhadap *potential smokers* (Alkhudhari, Z., Al-Sheikh, S., Al-Tuwairqi, S., 2015). Matintu mengembangkan model baru berdasarkan ide yang diberikan oleh ketiga penelitian Alkhudhari dan rekannya dengan mempertimbangkan efek dari *heavy smokers* dan *occasional smokers* terhadap *potential smokers* dan efek dari *heavy smokers* terhadap perokok berhenti sementara (Matintu, S.A., 2017). Pang pada tahun 2015 mempertimbangkan penyediaan tempat khusus merokok dan peningkatan

harga rokok dalam mengendalikan perokok di China (Pang, L., Zhao, Z., Liu, S & Zhang, X., 2015).

Dalam mengurangi perilaku merokok, beberapa peneliti menerapkan kontrol optimal (Alzahrani,E & Zeb,A., 2020; Pang,L., Liu,S., Zhang,X & Tian,T.,2019; Sikander,W., Khan,U., Ahmed,N & Mohyud-Din,S.T.,2017; Verma,V.,2020; Zaman,G.,2011b). Pada tahun 2019, Pang dan rekan-rekannya mengkaji mengenai pengendalian optimal dalam mengontrol penggunaan tembakau. Dalam penelitian tersebut dideskripsikan model kontrol dengan teori kontrol optimal untuk mengurangi jumlah perokok dengan menerapkan dua macam strategi yaitu media dan pengobatan berhenti merokok. Populasi perokok dibagi dalam enam kompartemen yaitu perokok potensial, perokok tidak aktif, perokok aktif, perokok yang berhenti sementara, perokok yang berhenti secara permanen, dan pasien karena merokok. Selanjutnya, penelitian yang ditulis oleh Alzahrani dan Zeb (2020) menjelaskan mengenai strategi pencegahan pada model dinamik perilaku merokok dan analisis kontrol optimalnya. Pada analisis kontrol optimalnya diberikan dua strategi yaitu kampanye edukasi dan obat anti nikotin. Penelitian tersebut membagi populasi dalam lima kompartemen yaitu populasi rentan merokok, kelas menghirup tembakau atau *snuffing class*, perokok tidak aktif, perokok aktif, dan populasi berhenti merokok.

Dalam penelitian ini, model yang dikaji oleh Alzahrani dan Zeb (2020) dikembangkan dengan membagi kompartemen berhenti merokok

menjadi dua kompartemen yaitu perokok yang berhenti sementara dan perokok yang berhenti secara permanen seperti yang dimuat pada penelitian Pang dkk (2019) dengan tetap memperhatikan kompartemen berhenti merokok pada penelitian Alzahrani dan Zeb (2020). Pada penelitian ini pula diberikan dua macam strategi dalam mengendalikan konsumsi rokok yaitu kampanye edukasi dan obat anti nikotin yang dituangkan ke dalam tesis yang berjudul :

“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika  
Perilaku Merokok dengan Perokok Berhenti Sementara  
dan Perokok Berhenti Permanen.”

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka rumusan masalah yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengembangkan model perilaku merokok dengan menambahkan kompartemen perokok berhenti sementara dan perokok berhenti permanen?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model perilaku merokok?
3. Bagaimana bentuk kontrol optimal dari pengendalian berupa kampanye edukasi dan pemberian obat anti nikotin pada model perilaku merokok?

4. Bagaimana perbandingan simulasi numerik dari model perilaku merokok tanpa kontrol dan dengan kontrol?

### **1.3 Tujuan penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengembangkan model perilaku merokok dengan menambahkan kompartemen perokok berhenti sementara dan perokok berhenti permanen.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dari model perilaku merokok.
3. Mendapatkan bentuk kontrol optimal dari pengendalian berupa kampanye edukasi dan pemberian obat anti nikotin pada model perilaku merokok.
4. Menganalisis perbandingan simulasi numerik dari model perilaku merokok tanpa kontrol dan dengan kontrol.

### **1.4 Manfaat Penelitian**

Pada penelitian ini diharapkan memberikan gambaran mengenai kontrol optimal pada model perilaku merokok dalam menentukan strategi yang optimal melalui kampanye edukasi dan obat anti nikotin.

## 1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, model matematika perilaku merokok diamati pada enam kompartemen, yaitu *potential smokers* ( $P$ ), *snuffing class* ( $S$ ), *irregular smokers* ( $X$ ), *regular smokers* ( $Y$ ), *temporary quitters* ( $Q_t$ ) dan *permanent quitters* ( $Q_p$ ).

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **2.1 Perilaku Merokok**

Merokok telah menjadi sebuah kebiasaan yang sangat umum dan meluas di kalangan masyarakat namun perilaku ini masih sulit untuk dihilangkan. Secara umum, merokok adalah tindakan seseorang yang menghisap asap tembakau ke dalam mulut dan paru-parunya sendiri (Usman, 2014). Di dalam rokok terkandung sebuah zat yang bernama nikotin. Zat inilah yang membuat kebiasaan merokok sulit untuk ditinggalkan karena menimbulkan kecanduan.

Rokok yang dikonsumsi menghasilkan asap rokok yang sangat berbahaya baik bagi kesehatan perokok sendiri sebagai perokok aktif maupun orang lain di sekitarnya yang tidak merokok sebagai perokok pasif. Asap rokok yang dihirup oleh perokok pasif memiliki setidaknya 4000 senyawa kimia. Ironisnya, 75% bahaya dari asap rokok justru didapat oleh perokok pasif karena terpapar asap rokok secara langsung (Kemkes, 2018).

Perilaku merokok merupakan masalah penting yang harus diatasi karena sangat berpengaruh terhadap kesehatan masyarakat. Pemerintah berperan penting dalam mengatasi masalah penggunaan rokok. Salah satu upaya yang dilakukan pemerintah dalam mengurangi konsumsi rokok dikalangan masyarakat diantaranya adalah dengan melakukan promosi

kesehatan. Promosi kesehatan ini berupa penyuluhan tentang bahaya merokok sebagai upaya preventif untuk mengurangi kebiasaan merokok.

## 2.2 Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan persamaan diferensial yang terhubung satu sama lain dan membentuk sebuah sistem persamaan. Misalkan diberikan sebuah vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Jika notasi  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  untuk menyatakan turunan  $x$  terhadap  $t$ , maka diperoleh

$$\dot{x} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T. \quad (2.1)$$

Misalkan diberikan sistem autonomous  $\dot{x} = f(x)$ , yaitu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang dinyatakan secara implisit bergantung pada  $t$  dengan  $x \in \mathbb{R}^n$ , maka sistem  $\dot{x} = f(x)$ , dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

## 2.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan atau biasa disebut solusi kesetimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap

waktu. Suatu titik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  dikatakan titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  sedemikian sehingga  $f(x^*) = 0$ , dengan (Wiggins, 1990)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

atau dengan kata lain, jika  $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  merupakan titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

## 2.4 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan.

**Definisi 1** (Hale & Kocak , 1991). *Jika  $x^*$  merupakan titik kesetimbangan dari  $\dot{x} = f(x)$ , maka persamaan diferensial linear*

$$\dot{x} = J(x^*)x \tag{2.2}$$

*disebut persamaan linearisasi dari vector field  $f$  pada titik kesetimbangan*

*$x^*$  dimana  $f = f_1, f_2, \dots, f_n$  dan*

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

*$J(x^*)$  disebut sebagai matriks Jacobi dari  $f$  di titik  $x^*$ .*

Kestabilan titik kesetimbangan  $x^*$  dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu  $\lambda$  yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (2.3)$$

dengan  $I$  adalah suatu matriks identitas. Dalam Tabel 2.1 diberikan beberapa jenis sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari Persamaan (2.3).

**Tabel 2.1** Kestabilan dari sistem linear  $\dot{x} = f(x)$  dengan  $\det(J - \lambda I) = 0$

No.	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
1.	$\lambda_i > \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
2.	$\lambda_i < \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
3.	$\lambda_i < 0 < \lambda_j$	Tidak Stabil
4.	$\lambda_i = \lambda_j > 0$	Tidak Stabil
5.	$\lambda_i = \lambda_j < 0$	Stabil Asimtotik
6.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r > 0$ , Tidak Stabil
7.	$\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$	$r < 0$ , Stabil Asimtotik
8.	$\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic$	Stabil

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012)

## 2.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Uji kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar dari persamaan karakteristik secara langsung. Tinjau sistem linier

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (2.4)$$

Dengan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  yang diperoleh dari linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan yang disebut matriks Jacobi di titik kesetimbangan dan  $x$  adalah vektor yang berukuran  $n \times 1$ . Persamaan karakteristik dari Sistem (2.4) yaitu:

$$|A - \lambda I| = 0,$$

dimana  $I$  adalah matriks identitas. Nilai eigen dari matriks  $A$  adalah akar-akar dari polinomial karakteristik berikut:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.5)$$

dengan  $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  adalah konstanta real. Diasumsikan  $a_n \neq 0$  karena jika tidak maka  $\lambda = 0$  adalah solusi. Persamaan tersebut mempunyai  $n$  buah akar-akar  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  yang dapat bernilai real atau mungkin bernilai kompleks yang memenuhi  $P(\lambda) = 0$ . Adapun syarat perlu dan syarat cukup agar  $P(\lambda)$  mempunyai nilai eigen dengan bagian real yang negatif adalah (Murray, 2002)

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } a_n > 0.$$

Contoh diberikan persamaan kubik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan kubik tersebut mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

dengan demikian diperoleh kondisi berikut :

$$a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ dan } a_1a_2 - a_3 > 0.$$

## 2.6 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalannya

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol  $u(t)$  yang membawa sistem dari *state* awal  $x(t_0)$  pada waktu  $t_0$  ke *state* akhir  $x(t_f)$  pada waktu akhir  $t_f$ , sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk suatu fungsi objektif (fungsi tujuan).

*State* yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.6)$$

dengan nilai awal  $x(t_0) = x_0$ . Sistem tersebut bergantung pada fungsi  $u(t)$  yang merupakan fungsi kontrol dari Sistem (2.6). Jika nilai  $u(t)$  berubah maka solusi dari Sistem (2.6) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar adalah mencari fungsi kontrol  $u(t)$  dan solusi sistem

yang bersesuaian dengan (2.6) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.7)$$

dengan kendala  $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ .

Teknik prinsip untuk masalah kontrol optimal adalah menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol yang optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang diperoleh dikembangkan oleh Pontryagin dan rekan kerjanya. Pontryagin memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Misalkan fungsi tujuan dalam Persamaan (2.7) dituliskan sebagai berikut :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.8)$$

dengan  $x$  merupakan variabel *state*. Diasumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.7) ada, yaitu  $u^*$  dengan  $x^*$  adalah variabel *state* optimal yang memenuhi Persamaan (2.6). Misalkan  $J(u^*) \leq J(u) < \infty$  untuk semua kontrol  $u$ . Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu  $h(t)$  dan  $\varepsilon \in R$  sedemikian sehingga

$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t), \quad (2.9)$$

dengan  $v(t)$  merupakan fungsi kontrol yang lain,  $\varepsilon$  adalah jarak untuk  $[t_0, t_f]$  dan  $h$  adalah *step size* dari Persamaan (2.9). Misalkan  $y$  merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan  $v$  yang memenuhi,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)), \quad (2.10)$$

di mana  $v(t)$  adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Fungsi tujuan dalam Persamaan (2.8) yang dievaluasi di  $v$  adalah

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) dt. \quad (2.11)$$

Kemudian didefinisikan  $\lambda(t)$  yang merupakan fungsi *adjoint* yang akan ditentukan. Fungsi tersebut merupakan fungsi yang terturunkan dalam interval  $[t_0, t_f]$ . Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh,

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)) dt = \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) - \lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0),$$

atau

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)) dt + (\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)) = 0. \quad (2.12)$$

Jika bentuk yang bernilai nol tersebut dijumlahkan ke dalam fungsi  $J(v)$  diperoleh

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{t_f} \left( f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda^T(t) \mathbf{y}(t)) \right) dt + (\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t) + \lambda^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t))) dt + (\lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) - \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f)), \end{aligned}$$

dengan  $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)) = \dot{\mathbf{y}}(t)$ . Karena nilai minimum dari  $J$  terhadap kontrol  $u$  terjadi pada  $u^*$ , saat turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$  (dalam arah  $h$ ) adalah nol, yaitu

$$\left. \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0.$$

Dengan menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari  $J(v)$  terhadap  $\varepsilon$ , yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dJ(v)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( f(t, \mathbf{y}(t), v(t)) + \dot{\lambda}^T(t) \mathbf{y}(t) + \lambda^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t), v(t)) \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_f) \mathbf{y}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

Dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi  $f$  dan  $g$  diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( f_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}^T(t) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \lambda^T(t) \left( \mathbf{g}_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \mathbf{g}_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right) dt - \lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f) \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (2.13)$$

dengan  $f_x, f_u, g_x$  dan  $g_u$  bergantung pada  $\mathbf{x}^*(t)$  dan  $u^*(t)$ . Jika Persamaan (2.13) disederhanakan maka diperoleh :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( \underbrace{\left( f_x + \lambda^T(t) \mathbf{g}_x + \dot{\lambda}^T(t) \right) \frac{dy}{d\varepsilon}(t)}_{*} \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda^T(t) \mathbf{g}_u) h(t) \right) dt - \underbrace{\lambda^T(t_f) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t_f)}_{**} \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (2.14)$$

Agar bentuk (\*) dan (\*\*) dalam Persamaan (2.14) bernilai nol maka dipilih fungsi adjoint  $\lambda(t)$  yang memenuhi persamaan :

$$\dot{\lambda}(t) = - \left( f_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \lambda^T(t) \mathbf{g}_x(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \right), \quad (2.15)$$

dan syarat batas  $\lambda(t_f) = \mathbf{0}$ . Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas. Persamaan (2.14) tereduksi menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) dt = 0.$$

Selanjutnya, karena Persamaan (2.14) berlaku untuk sembarang fungsi variasi  $h(t)$  yang kontinu, maka dipilih fungsi

$$h(t) = f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)),$$

akibatnya Persamaan (2.14) menjadi

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \right)^2 dt = 0.$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi yang optimal, yaitu

$$f_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}_u(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f. \quad (2.16)$$

Jadi Persamaan (2.15) dan (2.16) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.7) (Lenhart dan Workman, 2007).

Dalam praktiknya, syarat perlu di atas dapat dihasilkan dari Hamiltonian  $H$ , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u),$$

akan memaksimumkan atau meminimumkan  $H$  pada saat  $u$  di  $u^*$  dan kondisi di atas dapat ditulis dalam Persamaan Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ di } u^* \rightarrow f_u + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}_u = 0 \quad (\text{kondisi optimal/syarat stasioner})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{f}_x + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}_x) \quad (\text{persamaan adjoint})$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \quad (\text{syarat transversalitas})$$

dengan diberikan persamaan *state* yaitu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

## 2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut :

$$\min J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt, \quad (2.17)$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), u(t)). \quad (2.18)$$

Fungsi  $J$  disebut fungsi tujuan dan kontrol  $u(t) \in U$ , dengan  $U$  merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol  $u(t)$  yang diperkenankan. Diasumsikan bahwa  $u(t)$  merupakan fungsi terhadap waktu sehingga  $f(t, \mathbf{x}, u)$  dan  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u)$  juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval  $[t_0, t_f]$ . Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.17). Masalah kontrol optimal adalah mencari  $u^*(t)$  yang menggerakkan Sistem (2.18) ke trajektori  $\mathbf{x}^*(t)$  sedemikian sehingga fungsi objektif pada Persamaan (2.17) mencapai nilai yang optimal.

Pencarian fungsi kontrol  $u^*(t)$  yang mengoptimalkan  $J$  pada prinsipnya menggunakan metode pengali Lagrange. Sistem (2.18) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada  $t \in [t_0, t_f]$ , sehingga diperlukan pengali Lagrange pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali Lagrange. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan dengan  $\lambda(t) \in R^n$  maka bentuk perluasan dari  $J$  yang menyertakan kendala (2.18) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left( f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u) - \dot{\mathbf{x}}(t)) \right) dt. \quad (2.19)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamiltonian sebagai berikut :

$$H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad (2.20)$$

dengan menggunakan fungsi Hamilton tersebut, Persamaan (2.19) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} (H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)) dt. \quad (2.21)$$

Secara ringkas, prinsip minimum Pontryagin dapat dituliskan sebagai berikut:

Model Sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$

Fungsional Objektif  $J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt.$

Fungsi Hamiltonian  $H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u).$

Pengontrol Optimum,

- Persamaan *state*  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad (2.22)$

- Persamaan *costate*  $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.23)$

- Syarat Stationer  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall u \in U, \quad (2.24)$

- Syarat Transversalitas  $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}. \quad (2.25)$

**Contoh 2.1** (Lenhart & Workman, 2007)

Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan :

$$\min \int_0^1 u(t)^2 dt,$$

terhadap fungsi kendala  $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$  dengan syarat awal  $x(0) = 1$ .

Fungsi Hamiltonian dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$H = u^2 + \lambda(x + u).$$

dengan syarat keoptimalan

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\lambda.$$

Persamaan *costate*

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda \Rightarrow \lambda(t) = ce^t,$$

dengan  $c$  merupakan sebuah konstanta.

Dari syarat *transversality* yaitu  $\lambda(1) = 0$ , diperoleh

$$ce^{-1} = 0 \text{ atau } c = 0.$$

Akibatnya  $\lambda = 0$ , sehingga diperoleh  $u^* = -\frac{1}{2}\lambda = 0$ .

Selanjutnya, untuk persamaan *state* dan syarat awalnya yaitu

$$\dot{x} = x \text{ dengan } x(0) = 1.$$

Dengan menyelesaikan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} dx &= dt, \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int dt, \\ x &= ce^t. \end{aligned}$$

Karena  $x(0) = 1$  maka diperoleh

$$ce^0 = 1 \text{ atau } c = 1.$$

Jadi diperoleh  $u$  dan  $x$  yang optimal, yaitu

$$u^* = 0 \text{ dan } x^* = e^t.$$

## 2.8 Metode Forward-Backward Sweep

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada Persamaan (2.17) terhadap kendala pada Persamaan (2.18). Dengan menggunakan prinsip

minimum Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t, \mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t, \mathbf{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u),$$

dengan syarat keoptimalan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0, \quad \forall u \in U. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal  $u^*$  menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk  $u$  di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu  $[t_0, t_f]$  dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu  $t_0 = b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1} = t_f$  dan kontrol  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$ , dimana  $u_i \approx u(b_i)$ . Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk  $x$  dan  $\lambda$  yang bergantung pada  $u$ . Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk  $x$  dan  $\lambda$  tersebut.

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi  $x(t)$ . Pada metode ini, diberikan kondisi awal yaitu pada Persamaan (2.22), kemudian diberikan *step size* yaitu  $h$  dan

Persamaan (2.16) akan diselesaikan. Pendekatannya melalui  $x(t + h)$  dan  $x(t)$ , sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$x(t + h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.27)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t)), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t + h, x(t) + hk_3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir yaitu pada Persamaan (2.23). Kemudian diberikan *step size* yaitu  $h$  dan Persamaan (2.16) akan diselesaikan, pendekatannya melalui  $\lambda(t - h)$  dan  $\lambda(t)$  sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu :

$$\lambda(t - h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.29)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \lambda(t)), \\ k_2 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t - h, \lambda(t) - hk_3). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sedangkan nilai  $u$  diperbaharui setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai  $u$  yang lama dengan nilai  $u$  yang baru yaitu

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2},$$

dengan  $u_{baru}$  diperoleh dari syarat keoptimalan  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ . Bentuk uji konvergensi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\|u - u_{lama}\|}{\|u\|} \leq \delta$$

atau  $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$ , dengan  $\delta$  merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).