ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA DINAMIKA PENYEBARAN PENYALAHGUNAAN NARKOBA

NITA ANGGRIANI

H022191002

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2021

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA DINAMIKA PENYEBARAN PENYALAHGUNAAN NARKOBA

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

\

NITA ANGGRIANI

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2021

TESIS

ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA DINAMIKA PENYEBARAN PENYALAHGUNAAN NARKOBA

Disusun dan diajukan oleh

NITA ANGGRIANI

Nomor Pokok H022191002

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis

Pada Tanggal 02 Februari 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui
Komisi Penasehat

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.	**Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**
Ketua	Anggota

Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Dr. Muhammad Zakir, M.Si.	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nita Anggriani
Nomor Mahasiswa	: H022191002
Program Studi	: Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudain hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 02 Februari 2021

Yang menyatakan

Nita Anggriani

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu 'Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT, atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis dengan judul "***Analisis Kestabilan Dan Kontrol Optimal pada Model Matematik Dinamika Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba***", sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika Terapan, Departemen Matematika, Program Pascasarjana, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan dunia akhirat.

Penyelesaian tesis ini diperlukan proses yang sangat panjang, dengan banyak tantangan dan hambatan mulai dari penyusunan hingga akhirnya tesis ini dapat dirampungkan. Oleh karena itu, penulis ucapkan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orangtua Ayahanda ***H. Arifuddin*** dan Ibunda ***Hj. Nurfitriah*** atas segala doa, kasih sayang, cinta, nasihat, motivasi, serta berbagai macam bantuan, baik secara moril maupun materil, perhatian, bimbingan serta ketulusan dalam merawat penulis dari lahir hingga saat ini dengan penuh sabar dan ikhlas. Dan tak lupa terima kasih kepada kakanda ***Lilis Handayani, S.K.M, M.A.R.S*** dan adinda ***Muhammad Taufiq Arif Nur*** serta keluarga atas segala dorongan dan bantuannya selama ini. Semoga Allah membalas semua kebaikannya dengan pahala yang berlipat ganda.

Penghargaan dan ucapan terima kaih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat dan arahannya dalam menyelesaikan tesis ini.

2. Dr. Kasbawati, S.Si, M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah meluangkan waktunya untuk senantiasa memberi bimbingan, saran, semangat, dan arahannya dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc., Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si., dan Dr. Firman, S.Si., M.Si. selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tulisan ini.
4. Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku ketua Program Studi Magister Matematika yang senantiasa memberi bimbingan dan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
5. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.
6. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya, seluruh dosen dan staf administrasi pada Program Studi Magister Matematika Terapan Pascasarjana Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
7. Teman-teman seperjuangan angkatan 2019 yaitu Fitri, Noni, Ica, Syamsir, Astri, Nola, Pute, Ade, kak Amira, dan Utari.
8. Serta orang-orang yang telah berjasa kepada penulis yang tidak dapat dituliskan oleh penulis.

Penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan mendapatkan balasan dari Allah, sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat ganda di sisi-Nya. Semoga penulisan tesis ini dapat bermanfaat bagi segenap pembaca. Dan dapat berkontrisbusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan memberi informasi ilmiah secara umum.

Wassalamu 'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Makassar, 02 Februari 2021

Nita Anggriani

ABSTRACT

The spread of drug abuse in the world is increasing every year. This study aims to determine the equilibrium point, analyze stability, and examine the application of optimal control theory to the differential equation system from the mathematical model of the dynamics of the spread of drug abuse with five compartments, namely Susceptible (S), Lighter users (A), Heavy users (H), Treatment. (T), and Recovery (R). This study also aims to minimize the number of individuals who abuse drugs with minimum costs.

The optimal control problem is derived using theminimum Pontryaginprinciple then solved numerically using themethod Forward-Backward Sweep. There are two forms of optimal control for the dynamics of the spread of drug abuse, namely by maximizing efforts to implement anti-drug campaigns and efforts to strengthen self-psychology through counseling. Based on the results of numerical simulations that have been carried out, it was found that the number of individuals who abused severe drugs without the application of the initial control reached 11,729 people but could be reduced to only 7,152 people with the implementation of optimal control. This shows that the implementation of optimal control has succeeded in reducing 37.87% of the number of individuals who abuse severe drugs.

Keywords: The Drug Abuse, Mathematical Model, Pontryagin Minimum Principles, Forward-Backward Sweep, Optimal Contro.

ABSTRAK

Penyebaran penyalahgunaan narkoba di dunia yang semakin meningkat setiap tahunnya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan, serta mengkaji aplikasi teori kontrol optimal pada sistem persamaan diferensial dari model matematika dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan lima kompartemen yaitu *Susceptible* (S), *Lighter users* (A), *Heavy users* (H), *Treatment* (T), dan *Recovery* (R). Penelitian ini juga bertujuan untuk meminimumkan jumlah individu yang menyalahgunakan narkoba dengan biaya yang minimum.

Masalah kontrol optimal diturunkan dengan menggunakan prinsip minimum *Pontryagin* kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Model dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba terdapat dua bentuk kontrol optimal yaitu dengan memaksimalkan upaya penerapan kampanye anti narkoba dan upaya penerapan penguatan terhadap psikologi diri lewat konseling. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang telah dilakukan, diperoleh jumlah individu yang menyalahgunakan narkoba tingkat berat tanpa adanya penerapan kontrol awalnya mencapai sebanyak 11.729 orang namun dapat ditekan menjadi hanya 7.152 orang dengan diterapkannya kontrol yang optimal. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya penerapan kontrol yang optimal tersebut berhasil menurunkan sebanyak 37,87% jumlah individu yang menyalahgunakan narkoba tingkat berat.

Kata Kunci: : Penyalahgunaan Narkoba, Model Matematika, Prinsip Minimum Pontryagin, *Forward-Backward Sweep*, Kontrol Optimal.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama / Arti
β	Beta (\beta)
δ	Delta (\delta)
η	Eta (\eta)
γ	Gamma (\gamma)
Λ	Lambda (\lambda)
μ	Mu (\mu)
ω	Omega (\omega)
ρ	Rho (\rho)
τ	Tau (\tau)

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Narkoba atau narkotika dan obat-obatan tidak termasuk zat berbahaya apabila digunakan sesuai petunjuk medis. Narkotika adalah zat atau obat yang bersifat alamiah, sintetis, maupun semi sintetis yang menimbulkan efek penurunan kesadaran, halusinasi, serta daya rangsang. Sementara menurut UU Narkotika pasal 1 ayat 1 menyatakan bahwa narkotika merupakan zat buatan atau pun yang berasal dari tanaman yang mengakibatkan efek halusinasi, menurunya kesadaran serta menyebabkan kecanduan. Manfaat dari pengguna zat tersebut adalah sebagai obat penghilang rasa nyeri serta memberikan ketenangan. Menurut UU tentang Narkotika, jenisnya dibagi menjadi 3 golongan berdasarkan pada resiko ketergantungan (BNN, 2019).

Narkoba dapat menyebabkan perilaku ketergantungan yang kemudian berujung pada penyalahgunaan. Penyebaran dan penyalahgunaan narkoba di Indonesia adalah suatu pola perilaku di mana seseorang menggunakan obat-obatan golongan narkotika, psikotropika, dan zat adiktif yang tidak sesuai fungsinya. Penyalahgunaan narkoba umumnya terjadi pada beberapa faktor terutama karena adanya rasa ingin tahu yang tinggi, kemudian menjadi kebiasaan. Selain itu, penyalahgunaan narkoba pada diri seseorang juga biasa dipicu oleh masalah dalam hidupnya atau berteman dengan pecandu narkoba. Di sisi lain penyalahgunaan narkoba dapat dialami oleh penderita gangguan mental misalnya gangguan bipolar atau *skizofrenia*. Seseorang yang menderita gangguan mental dapat lebih mudah menyalahgunakan narkoba yang awalnya bertujuan untuk meredakan gejala yang dirasa (Alodokter.com, 2018).

Indonesia menjadi sasaran penyelundupan narkoba dari sindikat internasional karena jumlah penduduk yang besar dan juga perkembangan ekonomi yang terbilang tinggi. Penyebaran dan penyalahgunaan narkoba di Indonesia meningkat setiap tahunnya, terutama dikalangan remaja yang meningkat sebesar 24% sampai 28% dari sebelumnya yaitu sebesar 20%. Pada tahun 2018 penyalahgunaan narkoba dikalangan pelajar mencapai angka 2,29 juta orang dengan rentan usia 15-35 tahun. Jenis yang digunakan adalah PCC, Psikotropika, NPS karena lebih murah daripada jenis narkoba yang lain, bahkan harganya hanya Rp 3.000,- sampai Rp 4.000,- sehingga anak-anak dapat membelinya dengan uang jajan mereka (BNN, 2019).

Narkoba yang kini tidak lagi memandang usia dan tempat. Salah satu upaya pemberantasan penyebaran narkoba dengan memberikan edukasi kepada masyarakat. Sasaran utama untuk mengatasi pengedaran narkoba yaitu pada kalangan generasi milenial karena masa depan bangsa dan Negara berada di tangan kaum milenial. Saat ini pengedaran narkoba sangat cepat penyebarannya dengan teknologi yang dimanfaatkan oleh sindikat untuk memasarkannya dan kaum milenial erat kaitannya karena salah satunya melalui sosial media.

Hasil Riset Badan Narkotika Nasional (BNN) yang bekerja sama dengan Universitas Indonesia pada tahun 2017 mengatakan anak usia SD dan SMP banyak yang terjerumus narkoba, menurut kesepakatan *Convention on the Rights of the Child (CRC)* yang juga disepakati Indonesia tahun 1089, setiap anak berhak mendapatkan informasi kesehatan reproduksi (termasuk HIV/ AIDS dan narkoba) dan dilindungi secara fisik maupun mental. Namun realita yang terjadi saat ini bertentangan dimana ditemukan anak usia 7 tahun sudah ada yang mengkonsumsi narkoba jenis inhalan (uap yang dhirup), anak usia 8 tahun sudah memakai ganja, dan usia 10 tahun menggunakan narkoba dari beragam jenis seperti inhalan, ganja, heroin, morfin, ekstasi, dan sebagainya.

Penyalahgunaan narkoba yang memiliki dampak negatif terhadap kesehatan, ekonomi dan sosial, bahkan menimbulkan kriminalitas. Bukan hanya berakibat kepada penggunanya saja, namun keluarga juga turut menjadi korban dan penyalahgunaan narkoba dalam skala besar sehingga dapat merugikan masyarakat, bangsa dan Negara. Masalah narkotika bukan hanya tentang penanganan tapi juga pemberdayaan masyarakat, rehabilitasi, dan paling penting pencegahaan. Narkoba merupakan isu yang kritis dan rumit yang tidak bisa diselesaikan oleh hanya satu pihak saja, namun masalah ini melibatkan semua orang. Pencarian solusi yang tepat merupakan sebuah pekerjaan besar yang melibatkan dan memobilisasi semua pihak baik pemerintah, lembaga swadaya masyarakat (LSM) dan komunitas lokal.

Berdasarkan permasalahan di atas maka peneliti membawa permasalahan tersebut ke dalam bentuk model matematika karena pemodelan matematika merupakan salah satu tahap pemecahaan masalah yakni berupa penyederhanaan suatu fenomena nyata ke dalam bentuk matematika. Peneliti **Fikri L dan Dmitry K, (2019)** membahas tentang efek penyalahgunaan narkoba pada masyarakat dengan model matematika SLHT (*Susceptible, Lighter users, Heavy users, Treatment*), dan peneliti **Joan K, Shaibu O, dan Mary W, (2018)** membahas tentang efek penyalahgunaan zat (obat) oleh pengemudi komersial dengan model matematika SDAR (*Susceptible, Lighter users, Heavy users, Rehabilitasi*) penyalahgunaan narkoba yang telah mengikuti rehabilitasi kembali menjadi *lighter users*. Oleh sebab itu, pada penelitian ini berdasarkan fenomena yang disebutkan sebelumnya akan dilakukan modifikasi model dengan topik yang sama dari peneliti sebelumnya dalam sudut pandang matematika yang berjudul:

"**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Matematika Dinamika Penyebaran Penyalahgunaan Narkoba**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan sebelumnya diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan model matematika penyebaran penyalahgunaan narkoba?
2. Bagaimana menentukan dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika terhadap dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba?
3. Bagaimana bentuk kontrol optimal pada model matematika terhadap dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan faktor upaya penerapan kampanye anti narkoba dan penguatan terhadap psikologis penyalahgunaan narkoba yang sembuh?
4. Bagaimana interpretasi model matematika terhadap dinamika penyalahgunaan narkoba sebelum dan sesudah berdasarkan hasil simulasi numerik?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengembangkan model matematika penyebaran penyalahgunaan narkoba.
2. Menganalisa kestabilan titik kesetimbangan model matematika terhadap dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba.
3. Menentukan bentuk kontrol optimal pada model matematika terhadap dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan faktor upaya penerapan kampanye anti narkoba dan penguatan terhadap psikologis penyalahgunaan narkoba yang sembuh.
4. Menginterpretasikan model matematika terhadap dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba sebelum dan sesudah diberi kontrol berdasarkan hasil simulasi numerik.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian adalah

1. Penelitian ini diharapkan akan memberikan informasi kepada masyarakat terkait penyalahgunaan narkoba sehingga dapat melakukan pencegahan resiko dan bahaya penyalahgunaan narkoba.
2. Sebagai bahan acuan untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan penyalahgunaan narkoba.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari permasalahan model matematika terhadap dinamika penyalahgunaan narkoba adalah Populasi dibagi menjadi 5 kompertemen yaitu *Susceptible (S), Lighter Users (A), Heavy Users (H), Treatment (T),* serta *Recovery (R)* dan variabel kontrol dengan faktor upaya penerapan kampanye anti narkoba dan penguatan terhadap psikologis penyalahgunaan narkoba yang sembuh.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan beberapa teorema, definisi dan informasi sebagai pendukung ataupun acuan dalam pembahasan penelitian ini.

2.1 Model Matematika

Model matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematik. (Widowati & Sutimin, 2007).

Pemodelan matematika diperoleh dari langkah-langkah sebagai berikut:

1. Langkah pertama memodelkan permasalahan yang terjadi di dunia nyata ke dalam bahasa matematis yang meliputi variable-variabel dalam masalah dan membentuk beberapa variable yang dihasilkan dari permasalahan tersebut.
2. Membuat asumsi dalam pemodelan matematika yang merupakan suatu kerangka berpikir sehingga model tersebut dapat berproses.
3. Memformulasikan model yang merupakan langkah yang paling penting, sehingga terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar dalam proses pembentukan formulasi dapat sesuai dan realistic. Jika pada proses peengujian kembali ditmukan ketidaksesuaian model, maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru.
4. Setelah formulasi model terbeentuk, kemudian dilakukan penyelidikan sifat dari solusi yaitu apakah sistem stabil atau tidak stabil.
5. Interpretasi hasil merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan permaslahan dunia nyata yang diwujudkan dalam bentuk grafik yang diperoleh dan selanjutnya diinterprestasikan sebagai solusi dalam dunia nyata.

2.2 Studi Review Perkembangan Pemodelan Penyalahgunaan Narkoba

Penyalahgunaan narkoba dapat sebagai kelebihan atau ketergantungan pada suatu zat, obat atau bahan kimia lainnya terutama untuk efek yang merugikan kesehatan fisik, psikologis, sosial dan mental individu hingga menimbulkan efek terhadap kesejahtraan orang lain. Sebagaian besar zat yang disalahgunakan adalah zat psikoaktif yang menyebabkan kecanduan saat dikonsumsi. Zat yang disalahgunakan termasuk obat-obatan legal (tidak dilarang oleh hukum) dan kriminal (dilarang oleh hukum).

Peneliti Lucas Fikiri dan Dmitry Kuznetsov pada jurnal yang berjudul *Mathematical Modelling on the Effects of Drug Abuse to the Societies* tahun 2019 dalam penelitiannya membagi empat kompartemen yaitu: beresiko menggunakan narkoba *Suscetible* (*S*) yang merupakan individu yang bergabung dengan populasi rentan pada tingkat melalui kelahiran dan imigrasi; setelah terkontaminasi individu yang rentan pindah ke kompartemen pengguna narkoba tingkat ringan atau *Lighter users* (*L*) merupakan fase awal penyalahgunaan narkoba di mana individu dapat berhenti secara alami, kematian, atau berpindah kepengguna narkoba tingkat berat; *Heavy users* (*H*) merupakan individu yang dapat kembali ke pengguna narkoba ringan, kematian, bergabung dengan program rehabilitasi atau mengalami masalah terkait pengguna narkoba yang berupa penahanan dan kematian secara langsung diakibatkan penggunaan narkoba; dan pengguna narkoba pada pengobatan *Treatment* (*T*) merupakan masa rehabilitasi individu dapat kambuh menggunakan narkoba, berhenti secara permanen, mati atau mengalami masalah terkait pengguna narkoba. Penelitian ini dapat disimpulkan bahwa menunjukkan ada kondisi bebas narkoba yang stabil secara global setiap $R_0 < 1$ dan unik atau tunggal ketika $R_0 > 1$. Interpretasi epidemiologis dari hal ini adalah bahwa penyalahgunaan zat dapat dihilangkan jika jumlah reproduksi dikurangi. Analisis dengan menggunakan simulasi numerik secara konsisten menunjukkan bahwa penyalahgunaan narkoba meningkat dengan pengaruh interaksi individu pengguna narkoba pada populasi yang rentan. Prevalensi penyalahgunaan narkoba berkurang dengan meningkatnya rekrutmen ke dalam rehabilitas dan dengan individu berhenti dari pengguna ringan ke rentan.

Peneliti selanjutnya oleh Kavuti Joan M, Shaibu Osman dan Mary Wainaina pada jurnal yang berjudul *Mathematical Modelling of Substance Abuse by Commercial Drivers* tahun 2018. Penelitian ini menyelidiki dan berbagai obat yang telah disalahgunakan oleh pengemudi komersial di Kenya dengan membagi empat kompertemen yaitu: rentan (*S*) terdiri dari semua pengemudi yang beresiko menggunakan zat (obat) dalam bentuk apapun, semua pengemudi komersial yang menggunakan zat (obat) dalam bentuk apapun dikelompokkan di bawah pengguna narkoba *D*, kompartemen semua pengemudi yang menyalahgunakan narkoba dalam bentuk apapun diklasifikasikan dalam *A* dan mereka yang berhenti menggunakan narkoba melalui rehabilitasi di bawah kelas *R*. Peneliti menganalisis kualitatif dari sistem persamaan model yang digunakan. Waktu atau periode penyebaran penggunaan narkoba interaksi menyeluruh antara pengemudi yang berisiko menggunakan narkoba dengan rentan waktu diambil lima tahun. Asumsi periode sebagai imitasi yang dapat berdampak pada populasi yang rentan. Dari hasil simulasi numerik pada pengguna yang rentan seiring waktu jumlah mereka terus meningkat, demikian juga ukuran populasi pengemudi yang rentan masuk ke dalam penyalahgunaan zat meningkat seiring dengan waktu. Kejadiaan ini membutuhkan banyak waktu sehingga periode simulasi diambil selama 5 tahun. Populasi yang rentan menurun dengan seiring waktu, selain itu hal ini juga dapat diperlambat karena perekrutan pengemudi ke dalam populasi yang rentan lebih rendah dibandingkan dengan tingkat di mana pengemudi berinteraksi dengan mereka yang menggunakan obat sehingga dengan cepat terlibat dalam penggunaan obat-obatan melalui peniruan. Populasi pengemudi yang rentan berisiko menggunakan narkoba, tingkat dimana pengemudi komersial meniru mereka dengan meningkat secara eksponensial. Populasi mengalami penurunan yang diakibatkan ketika jumlah yang pulih (pengemudi yang menghindar atau menghentikan penggunaan obat-obatan) mengalami meningkat pada suatu waktu. Penurunan jumlah penggunaan narkoba yang berhubungan dengan peningkatan jumlah pengemudi yang menghindari penggunaan narkoba. Populasi pengemudi yang terlibat dalam penggunaan narkoba menunjukkan effek dari tingkat interaksi antara penggunaan non-narkoba dan penggunaan narkoba. Seiring waktu, tingkat interaksi mengalami peningkatan jumlah atau populasi pengguna narkoba. Pengaruh tingkat interaksi di antara pengemudi menunjukkan dinamika populasi penyalahgunaan narkoba oleh pengemudi komersial, dimana populasi pengemudi yang menggunakan obat saat mengemudi sangat meningkat seiring waktu. Selanjutnya populasi pengemudi yang menyalahgunakan narkoba telah sembuh menujukkan untuk menghentikan penggunaan obat atau menghindarinya. Jumlah pengemudi yang menghindari pengguna obat berkurang sepenuhnya pada suatu titik waktu. Melalui pendidikan intensif dan penyuluhan penentangan penggunaan narkoba oleh kementrian transportasi. Selain itu unit transportasi dari kepolisian kadang-kadang mengintensifkan pemeriksaan berkala pada mengemudi dalam keadaan mabuk, yang merupakan salah satu alas untuk pengurangan atau penghindaran penggunaan zat oleh pengemudi.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang terdiri atas dua atau lebih persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau variabel bebas. Persamaan diferensial diklasifikasikan berdasarkan tiga aspek yaitu tipe, orde, dan linieritas. Menurut jenisnya, persamaan diferensial mencakup persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Sementara, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat dua atau lebih variabel bebas. Orde dari persamaan diferensial dapat diperoleh dengan melihat tingkat turunan tertinggi dari persamaan diferensial tersebut. Berdasarkan linieritas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu linier dan non linier (Ziill dan Cullen, 2009).

Pada umumnya solusi dari sistem persamaan diferensial non linier sulit ditentukan secara analitik, sehingga digunakan metode penelitian.

Definisi 2.1 Sebuah sistem persamaan diferensial linear yang dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = AX, \qquad \dots (2.1)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*) dan A adalah matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real. Penyelesaian dari sistem tersebut adalah

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad \dots (2.2)$$

Di mana $e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}$ Dan $x(t_0) = x_0$ adalah nilai awal dari sistem (Bronson dan Costa, 2007).

Definisi 2.2 Sistem persamaan diferensial orde satu dalam n persamaan disebut sebagai sistem autonomous jika sistem dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad \dots (2.3)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan fungsi $g_i, i = 1,2, \dots, n,$ tidak memuat t secara eksplisit (Ziill dan Cullen, 2009).

Definisi 2.3 Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \qquad \dots (2.4)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ dengan $0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbang (Olsder, 2003).

2.4 Kestabilan Sistem Linier

Kestabilan dari titik kesetimbang model digunakan untuk mengetahui apakah solusi sistem menuju titik kesetimbang atau tidak. Sistem persamaan diferensial yang digunakan paa model ini sistem persamaan diferensial non linier sehingga untuk analisis kestabilannya dilakukan pelinearan di sekitar titik kesetimbang dengan menggunakan matriks Jacobi. Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{x} = f(x) \qquad \ldots(2.5)$$

dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: L \to \mathbb{R}^n$, f fungsi nonlinear dan kontinu. Diberikan pula $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ dan $f \in C^n(L)$. Misalkan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.5) maka pendekatan linear untuk sistem persamaan (2.5) diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar titik ekuilibrium $\bar{x}$, maka sistem persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1} \\
\dot{x}_2 &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}
\end{aligned}$$

dengan $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots, R_{f_n}$ merupakan bagian nonlinear yang selanjutnya dapat diabaikan karena nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots, R_{f_n}$ mendekati nol.

Definisi 2.4 J adalah matriks Jacobi yang dibangun untuk melakukan linierisasi sistem persamaan diferensial non linier. Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \ldots, y_n = x_n - \bar{x}_n$ dinyatakan sebagai berikut:

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T
\end{bmatrix}
$$

adalah matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ (Candrawati, 2014).

Definisi 2.5 Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x dinamakan vektor eigen dari A, jika dan hanya jika terdapat skalar λ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x \qquad \dots (2.6)$$

Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A terkait dengan λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n\times n}$, persamaan (2.6) dapat ditulis kembali sebagai:

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \dots (2.7)$$

dengan I merupakan matriks identitas. Persamaan (2.7) mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$p(\lambda) = det\ (A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \qquad \dots (2.8)$$

Persamaan (2.8) $p(\lambda)$ yang disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Anton, 2000).

Suatu model biasanya memiliki parameter *threshold* yang dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar (R_0), sedemikian sehingga jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtoti dan penyakit tidak menyerang populasi, namun jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan penyakit sangat mungkin untuk menyebar (Driessche, 2001).

Secara istilah, penyakit memiliki definisi yang lebih luas dari definisi klinis yaitu mencakup tahap asimtotik infeksi serta gejala artinya bahwa yang dimaksud individu yang terinfeksi adalah individu yang terkena penyakit dengan menunjukkan gejala maupun yang tidak menunjukkan gejala (Ratna, 2013).

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^m$ dan $y \in \mathbb{R}^n$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y)$, dengan $i = 1,2, \dots, m$

$\dot{y} = \eta_j(x, y)$, dengan $j = 1,2,3, \dots, n$

dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompertemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x} = (F - V)x$$

dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$, dimana $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$.

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai

$$K = FV^{-1}$$

dengan K disebut sebagai *next generation matrix* dengan menggunakan persamaan (2.7) maka akan diperoleh nilai-nilai eigen tersebut kemudian ditentukan nilai eigen terbesarnya (spektral radius). Spektral radius adalah maksimum dari absolut nilai eigen suatu matriks yang dilambangkan dengan $\rho(.)$ dan $\mathcal{R}_0$ merupakan spektral radius matriks generasi K (Driesse dan Watmough, 2001).

Definisi 2.6 Diberikan K adalah matriks $n \times n$ dan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah nilai eigen dari matriks K, maka radius spektral dari matriks A didefinisikan sebagai

$$\rho(K) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|Y_i|\} \qquad \dots (2.9)$$

dengan $\rho(K)$ merupakan spektral radius dari matriks K (Wiwiek, 2005).

2.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Pengujian kestabilan dapat menggunakan kriteria jenis nilai eigen, namun kadang ditemui kesulitan dalam mencari jenis nilai eigen dari akar persamaan karakteristik, apalagi pada persamaan karakteristik yang berorde tinggi. Sehingga, dibutuhkan suatu kriteria untuk menjamin nilai akar persamaan karakteristik bernilai positif atau negatif. Salah satu kriteria yang efektif untuk menjamin jenis nilai eigen adalah kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz* adalah suatu metode untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem dengan memperhatikan nilai koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung.

Teorema 2.1 Diberikan persamaan karakteristik:

$$\mathrm{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0} \qquad (2.10)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$, adalah bilangan real. Matriks *Hurwitz* dinotasikan dengan H_n, yang berisi koefisisen-koefisien a_i dari persamaan karakteristik (2.10). Masing-masing n matriks *Hurwitz* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

dengan $a_i = 0$, saat $i > n$.

Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.10) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks *Hurwitz* bernilai positif atau $\det(H_n) > 0,\ n = 1,2,\ldots,n$. Sebagai contoh, diberikan persamaan kubik:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{2.11}$$

Dari Persamaan (2.8) maka dibentuk matriks *Hurwitz* sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, akar-akar Persamaan (2.8) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\det(H_1) > 0, \det(H_2) > 0$, dan $\det(H_3) > 0$. Dengan demikian didapatkan kondisi sebagai berikut:

1. $\det(H_1) > 0 = |a_1| > 0$ atau $a_1 > 0$,
2. $\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, yaitu $a_1 a_2 > 0$. Karena $a_1 > 0$ maka $a_2 > 0$,
3. $\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$, sehingga $a_1 a_2 a_3 - a_3{}^2 > 0$ atau $a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0$, dengan demikian didapatkan dua kondisi yaitu:
   a. $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$,
   b. $a_3 < 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) < 0$.

Untuk kondisi (b) tidak mungkin terjadi sebab jika $a_3 < 0$ maka tidak mungkin $(a_1 a_2 - a_3) < 0$ sebab $a_1 a_2 > 0$. Dengan demikian, akar-akar dari persamaan karakteristik (2.11) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$. Titik kesetimbangan pada persamaan karakteristik (2.11) memenuhi kondisi (Merkin, 1997):

1. $a_1 > 0$,
2. $a_2 > 0$,
3. $a_3 > 0$,
4. $a_1 a_2 > a_3$.

2.6 Masalah Kontrol Optimal dan Syarat Perlu Keoptimalan

Masalah kontrol optimal adalah memilih fungsi kontrol $u(t)$ yang membawa sistem dari *state* awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke *state* akhir $x(t_f)$ pada waktu akhir t_f, sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk suatu fungsi objektif (fungsi tujuan).

State yang bergantung pada fungsi kontrol yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial:

$$\dot{x}(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big) \qquad \dots (2.12)$$

dengan nilai awal yang diberikan $x(t_0) = x_0$. Sistem tersebut bergantung pada fungsi $u(t)$ yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.12). Jika nilai $u(t)$ berubah maka solusi dari sistem (2.12) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.12) sehingga fungsi tujuan berikut dapat tercapai, yaitu:

$$\min_{u} \int_{t_0}^{t_f} f\big(t, x(t), u(t)\big) dt \qquad \dots (2.13)$$

dengan kendala $\dot{x}(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big)$.

Masalah kontrol optimal adalah menyelesaikan serangkaian syarat perlu yang harus dipenuhi oleh kontrol optimal dan *state* yang terkait. Syarat perlu yang diperoleh dikembangkan oleh *Pontryagin* dan rekan kerjanya di Moskow pada tahun 1950-an yang memperkenalkan gagasan fungsi *adjoint* untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi objektif. Fungsi *adjoint* memiliki tujuan yang sama dengan pengali *Lagrange* dalam kalkulus multivariabel, yaitu menambahkan beberapa variabel untuk dimaksimalkan atau diminimalkan. Misalkan dalam persamaan (2.13) dituliskan sebagai berikut:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f\big(t, x(t), u(t)\big)dt \qquad \dots(2.14)$$

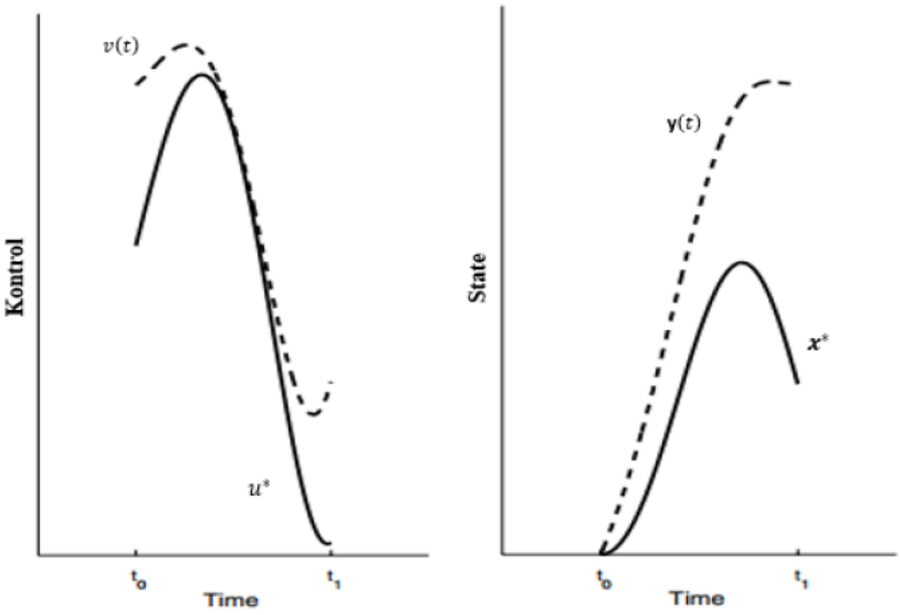
dengan x merupakan variabel *state*. Diasumsikan bahwa control optimal dari masalah optimal (2.13) ada, yaitu u^* dengan x^* adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.14). misalkan $J(u^*) \leq J(u) < \infty$ untuk semua control u. Misalkan pula terdapat fungsi variasi kontinu $h(t)$ dan $\varepsilon \in R$ sedemikian sehingga

$$v(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \qquad \dots(2.15)$$

dengan $v(t)$ merupakan fungsi control yang lain, ε adalah jarak untuk $[t_0, t_f]$ dan h adalah *step size* dari persamaan (2.15). misalkan y merupakan variabel *state* yang bersesuaian dengan v yang memenuhi:

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = \dot{y}(t) = g\big(t, y(t), v(t)\big) \qquad \dots(2.16)$$

dimana $v(t)$ adalah kontinu dan dengan lintasan *state* berawal dari posisi yang sama, dipilih $y(t_0) = x$(lihat Gambar 2.1). Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa $v(t) \to u^*(t)$ untuk semua t, ketika $\varepsilon \to 0$. Hal yang sama berlaku untuk y, karena asumsi yang dibuat pada g maka $y(t) \to x^*(t)$ untuk setiap t yang tetap, dengan kata lain turunan $\frac{d}{d\varepsilon} y(t)\Big|_{\varepsilon=0}$ ada untuk setiap t.



Gambar 2.1 Perbandingan antara control optimal u^* dengan v(kiri) dan state optimal v^* dengan y (kanan). Garis putus-putus menunjukkan sistem tanpa control dan garis penuh menunjukkan sistem dengan control optimal.

Fungsi tujuan dalam persamaan (2.16) yang dievaluasi di v adalah:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f\big(t, y(t), v(t)\big)dt \qquad \ldots(2.17)$$

Didefinisikan $\lambda(t)$ yang merupakan fungsi *adjoint* yang akan ditentukan. Fungsi tersebut merupakan fungsi yang terturunkan dalam interval $[t_0, t_f]$. Menggunakan teorema dasar kalkulus diperoleh:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}[\lambda^T(t)y(t)]dt = \lambda^T(t_f)y(t_f) - \lambda^T(t_0)y(t_0)$$

atau,

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}[\lambda^T(t)y(t)]dt + \left[\lambda^T(t_0)y(t_0) - \lambda^T(t_f)y(t_f)\right] = 0 \qquad \ldots(2.18)$$

Jika bentuk yang bernilai nol tersebut dijumlahkan ke dalam fungsi $J(v)$ diperoleh:

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_f} \left[f\big(t, y(t), v(t)\big) + \tfrac{d}{dt}\big(\lambda^T(t) y(t)\big) \right] dt + \left[\lambda^T(t_0) y(t_0) - \lambda^T\big(t_f\big) y\big(t_f\big)\right]$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[f\big(t, y(t), v(t)\big) + \dot{\lambda}^T(t) y(t) + \lambda^T g\big(t, y(t), v(t)\big)\right] dt +$$

$$\left[\lambda^T(t_0) y(t_0) - \lambda^T\big(t_f\big) y\big(t_f\big)\right]$$

dengan $g\big(t, y(t), v(t)\big) = \dot{y}(t)$. Karena nilai minimum dari J terhadap control u terjadi pada u^*, saat turunan dari $J(v)$ terhadap ε (dalam arah h) adalah nol, yaitu:

$$\left.\frac{dJ(v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0$$

Menggunakan teorema *Lebesgue Dominated Convergence*, bentuk limit (begitu pula dengan turunan) dapat dipindahkan ke dalam bentuk integral, sehingga diperoleh turunan dari $J(v)$ terhadap ε, yaitu:

$$\left.\frac{dJ(v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[f\big(t, y(t), v(t)\big) + \dot{\lambda}^T(t) y(t) + \lambda^T(t) g\big(t, y(t), v(t)\big)\right] dt \right|_{\varepsilon=0}$$

$$+ \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T(t_0) y(t_0)\right|_{\varepsilon=0} - \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda^T\big(t_f\big) y\big(t_f\big)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

dengan menerapkan aturan rantai terhadap fungsi f dan g diperoleh

$$\int_{t_0}^{t_f} \left.\left[f_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \dot{\lambda}^T(t) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \lambda^T(t) \left(g_x \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right) \right]\right|_{\varepsilon=0} dt$$

$$- \left.\lambda^T\big(t_f\big) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\big(t_f\big)\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \dots (2.19)$$

dengan f_x, f_u, g_x dan g_u bergantung pada $t, x^*(t)$ dan $u^*(t)$. jika persamaan (2.19) disederhanakan maka diperoleh:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\left.\underbrace{\left(f_x+\lambda^T(t)g_x+\dot{\lambda}^T(t)\right)}_{*}\frac{dy}{d\varepsilon}(t)\right|_{\varepsilon=0}+(f_u+\lambda^T(t)g_u)h(t)\right]dt$$

$$-\underbrace{\left.\lambda^T(t_f)\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}(t_f)\right|_{\varepsilon=0}}_{**}=0 \qquad \ldots(2.20)$$

Agar bentuk (*) dan (**) dalam persamaan (2.20) bernilai nol, maka dipilih fungsi *adjoint* $\lambda(t)$ yang memenuhi persamaan:

$$\dot{\lambda}(t)=-\left[f_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\lambda^T(t)g_x\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right] \qquad \ldots(2.21)$$

dan syarat batas $\lambda(t_f)=0$. Syarat batas ini dikenal sebagai syarat transversalitas. Persamaan (2.15) tereduksi menjadi:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[f_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\lambda^T(t)g_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right]h(t)dt=0.$$

Selanjutnya, karena persamaan (2.20) berlaku untuk sembarang fungsi variasi $h(t)$ yang kontinu, maka dipilih fungsi:

$$h(t)=f_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\lambda^T(t)g_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)$$

Akibatnya (2.20) menjadi:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[f_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\lambda^T(t)g_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)\right]^2dt=0.$$

Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh fungsi yang memenuhi kondisi yang optimal yaitu:

$$f_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)+\lambda^T(t)g_u\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)=0,\ \ \forall\ t_0\le t\le t_f \qquad \ldots(2.22)$$

Jadi persamaan (2.22) dan (2.21) yang diperoleh tersebut merupakan syarat perlu keoptimalan fungsi tujuan (2.13).

Dalam praktiknya, syarat perlu di atas dapat dihasilkan dari Hamilton H, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda^T g(t, x, u)$$

akan memaksimumkan atau meminimumkan H pada saat u di u^* dan kondisi diatas dapat ditulis dalam persamaan Hamilton:

$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ di $u^* \rightarrow f_u + \lambda g_u = 0$ (kondisi optimal/syarat stasioner)

$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \rightarrow \dot{\lambda} = -(f_x + \lambda g_x)$ (persamaan *adjoint*)

$\lambda(t_f) = 0$ (syarat transversalitas)

dengan diberikan persamaan *state* yaitu:

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u),$ $x(t_0) = x_0.$

2.7 Prinsip Minimum Pontryagin

Misalkan diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut:

$$\min J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \qquad \text{... (2.23)}$$

dengan kendala:

$$\dot{x} = g\big(t, x(t), u(t)\big). \qquad \text{... (2.24)}$$

Fungsi J disebut fungsi tujuan dan kontrol $u(t) \in U$, dengan U merupakan himpunan dari semua fungsi kontrol $u(t)$ yang diperkenankan. Diasumsikan bahwa $u(t)$ merupakan fungsi terhadap waktu sehingga $f(t, x, u)$ dan $g(t, x, u)$

juga merupakan fungsi terhadap waktu yang terdefinisi dalam interval $[t_0, t_f]$. Pemilihan fungsi f bergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan. Dalam sistem kontrol optimal, tujuan pengontrolan adalah untuk mengoptimalkan fungsi objektif (2.23). Masalah kontrol optimal adalah mencari $u^*(t)$ yang menggerakkan sistem (2.24) ke trayektori $x^*(t)$ sedemikian sehingga fungsi objektif pada persamaan (2.23) mencapai nilai yang optimal.

Pencarian fungsi kontrol $u^*(t)$ yang mengoptimalkan J pada prinsipnya menggunakan metode pengali *Lagrange*. Sistem (2.24) menyatakan suatu fungsi kendala yang bergantung pada $t \in [t_0, t_f]$, sehingga diperlukan pengali *Lagrange* pada masing-masing waktu tersebut karena setiap kendala mempunyai satu pengali *Lagrange*. Misalkan pengali *Lagrange* disimbolkan dengan $\lambda(t) \in R^n$ maka bentuk perluasan dari J yang menyertakan kendala (2.24) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[f(t,x,u) + \lambda^T(t)\big(g(t,x,u) - \dot{x}(t)\big)\right] dt \qquad \dots(2.25)$$

Misalkan didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$H(t,x,u,\lambda) = f(t,x,u) + \lambda^T(t) g(t,x,u) \qquad \dots(2.26)$$

dengan menggunakan fungsi Hamilton tersebut, persamaan (2.26) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(t,x,u,\lambda) - \lambda^T(t)\dot{x}(t)]\, dt. \qquad \dots(2.27)$$

Teorema 2.4 Jika $\mathrm{u}^*(\mathrm{t})$ dan $\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$ merupakan kontrol optimal dan *state* optimal untuk masalah berikut:

$$\min_{u} \int_{t_0}^{t_f} f\big(t, x(t), u(t)\big)dt \qquad \dots (2.28)$$

terhadap $\dot{x} = g\big(t, x(t), u(t)\big)$, $x(t_0) = x_0$ maka terdapat variabel *adjoint* $\lambda(t)$ yang terturunkan sedemikian sehingga:

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\big) \leq H\big(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)\big)$$

untuk semua fungsi kontrol u pada setiap t dengan fungsi Hamilton:

$$H = f\big(t, x(t), u(t)\big) + \lambda^T(t) g\big(t, x(t), u(t)\big)$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H\big(t, x(t), u^*(t), \lambda(t)\big)}{\partial x}, \qquad \lambda\big(t_f\big) = 0.$$

Teorema 2.5 Misalkan fungsi f dan g adalah fungsi yang terturunkan secara kontinu terhadap t, x, u dan merupakan fungsi konveks terhadap u. Misalkan u^* adalah kontrol optimal untuk masalah optimasi, dengan *state* optimal x^*, dan λ adalah fungsi yang terturunkan untuk setiap t. Misalkan untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_f$ berlaku $H_u\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\big) = 0$ maka untuk semua kontrol u dan untuk setiap t diperoleh:

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)\big) \leq H\big(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)\big).$$

Berikut adalah garis besar bagaimana prinsip ini dapat diterapkan untuk memperoleh syarat perlu dari masalah optimasi yang dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Bentuk fungsi Hamilton yaitu kombinasi fungsi dari $f(t, x(t), u(t))$ dan perkalian fungsi yang berbentuk persamaan diferensial $\mathrm{g}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{u}(\mathrm{t}))$ dengan suatu faktor pengali *Lagrange* $\lambda(\mathrm{t})$. Berikut bentuk fungsi Hamilton:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda^T g\big(t, x(t), u(t)\big).$$

2. Mencari solusi fungsi *Pontryagin* berdasarkan syarat stasioner:

$$\frac{\partial H\big(t, x(t), u(t), \lambda(t)\big)}{\partial u} = 0 \qquad \text{... (2.29)}$$

   Untuk mendapatkan $u^* = u^*\big(t, x(t), \lambda(t)\big)$.

3. Mengamati

$$H(t, x(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_{u \in U} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \qquad \text{... (2.30)}$$

4. Menyelesaikan persamaan *state*:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H\big(t, x(t), u(t), \lambda(t)\big)}{\partial \lambda} \qquad \text{... (2.31)}$$

   dengan nilai $x(t_0) = x_0$ dan persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H\big(t, x(t), u(t), \lambda(t)\big)}{\partial x} \qquad \text{... (2.32)}$$

   dengan kondisi transversalitas $\lambda(t_f) = 0$.

5. Mensubstitusi hasil dari langkah 4 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal.

Contoh 2.4 Misalkan diberikan suatu fungsi tujuan:

$$\min_{u} \int_0^1 (x + u)dt$$

dengan $\dot{x}(t) = 1 - u^2$ dengan syarat awal $x(0) = 1$.

Penyelesaian:

Fungsi Hamilton dari masalah kontrol optimal tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$H = x + u + \lambda(1 - u^2)$$

dan sistem Hamiltonnya adalah

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 \qquad \text{... (2.33)}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 1 - u^2 \qquad \text{... (2.34)}$$

dengan mengintegralkan persamaan (2.33) dan sifat $\lambda(1) = 0$ diperoleh

$\lambda = -t - k$ dan $k = 1$ sehingga didapat $\lambda = 1 - t$.

Dari sifat optimal dengan $\lambda = 1 - t$ maka

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\lambda u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2(1-t)} \qquad \text{... (2.35)}$$

Substitusi persmaan (2.35) ke persamaan (2.34) maka

$$\dot{x} = 1 - \left(\frac{1}{2(1-t)}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4(1-t)^2}$$

kemudian integralkan terhadap t dan dengan syarat batas $x(0) = 1$ diperoleh

$$x = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$$

Jadi, solusi optimal yang dihasilkan adalah

$$x^*(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$$

$$u^* = \frac{1}{2(1-t)}$$

2.8 Metode Forward-Backward Sweep

Tinjau masalah optimasi yang diberikan pada persamaan (2.23) terhadap kendala pada persamaan (2.24). Dengan menggunakan prinsip minimum

Pontryagin, masalah optimasi yang berkendala tersebut dapat diubah menjadi masalah optimasi tanpa kendala yaitu:

$$\min_{(x,u,\lambda)} H(t,x,u,\lambda) = \min_{(x,u,\lambda)} f(t,x,u) + \lambda^T(t)g(t,x,u)$$

dengan syarat keoptimalan:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0 \qquad \text{... (2.36)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \qquad \forall u \in U$$

Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan secara numerik menggunakan berbagai metode optimasi. Salah satunya adalah dengan menggunakan metode *Forward-Backward Sweep*. Metode ini merupakan metode iteratif yang akan digunakan untuk mengaproksimasi solusi optimal u^* menggunakan tebakan awal yang diberikan untuk u di awal iterasi. Pada metode ini, interval waktu $[t_0, t_f]$ dibagi menjadi beberapa bagian, yaitu $t_0 = b_1, b_2, \ldots, b_N, b_{N+1} = t_f$ dan kontrol $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{N+1})$, di mana $u_i \approx u(b_i)$. Pada syarat keoptimalan, dua syarat keoptimalan yang pertama memberikan suatu masalah nilai batas untuk x dan λ yang bergantung pada u. Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas untuk x dan λ tersebut.

Metode *Forward Runge Kutta* orde 4 digunakan untuk mendapatkan solusi $x(t)$. Pada metode ini, diberikan kondisi awal dan *step size* yaitu h. Pendekatannya melalui $x(t+h)$ dan $x(t)$, sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \text{... (2.37)}$$

dengan:

$$k_1 = f\big(t, x(t)\big) \qquad \text{... (2.38)}$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t + h, x(t) + hk_3)$$

Sedangkan metode *Backward Runge Kutta* orde 4 diberikan kondisi akhir dan *step size* yaitu h. Pendekatannya melalui $\lambda(t-h)$ dan $\lambda(t)$ sehingga bentuk umum dari metode ini yaitu:

$$\lambda(t-h) = \lambda(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \text{... (2.39)}$$

dengan:

$$k_1 = f\big(t, \lambda(t)\big) \qquad (2.40)$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \lambda(t) - \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t - h, \lambda(t) - hk_3)$$

Sedangkan nilai u diperbaharui setiap iterasi menggunakan kombinasi konveks antara nilai u yang lama dengan nilai u yang baru yaitu:

$$u = \frac{(u_{awal} + u_{baru})}{2}$$

dengan u_{baru} diperoleh dari syarat keoptimalan $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Pada metode ini, iterasi akan berhenti ketika syarat konvergensinya telah dipenuhi yaitu ketika nilainya menjadi sangat kecil. Bentuk uji konvergensi lain adalah $\delta\|u\| - \|u - u_{lama}\| \geq 0$, dengan δ merupakan besar toleransi yang diperkenankan (Lenhart & Workman, 2007).

BAB III

METODE PENELITIAN

Lokasi, waktu, dan tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan pada peneliti untuk mencapai tujuan penelitian akan dijelaskan pada bab ini. Lokasi penelitian bertempat di Kota Makassar Provinsi Sulawesi Selatan khususnya di Departemen Matematika Universitas Hasanuddin. Penelitian berlangsung dari bulan Juni 2020 dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

3.1 Identifikasi Masalah

Identifikasi masalah dilakukan untuk menetapkan topik permasalahan yang berkaitan dengan model matematika pada penyebaran penyalahgunaan narkoba.

3.2 Studi Literatur

Studi literatur dilakukan terhadap jurnal penelitian-penelitian terdahulu dan referensi-referensi yang relevan lainnya untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan model matematika penyebaran penyalahgunaan narkoba.

3.3 Formulasi Model Matematika Dinamika Narkoba

Tahap selanjutnya menyusun masalah dan mengkonstruksi model matematika dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba menggunakan lima kompartemen yaitu:

- *Drug-Susceptible (S)* adalah kelompok manusia yang rentan menggunakan narkoba
- *Lighter Drug Users (A)* adalah kelompok manusia yang menggunakan narkoba lebih ringan
- *Heavy Drug Users (H)* adalah kelompok manusia menggunakan narkoba dengan berat dimana kelompok manusia menjadi pengeder narkoba
- *Treatment (T)* adalah kelompok manusia pengguna narkoba mengalami penggobatan atau rehabilitasi dalam proses penyembuhan menggunakan narkoba