

# Kelengkapan Ruang $\ell^p$ pada Ruang Norm- $n$

Meriam<sup>1</sup>, Naimah Aris<sup>2</sup>, Muh Nur<sup>3</sup>

## Abstrak

Rumusan norm- $n$  pada  $\ell^p$  merupakan perumuman dari rumusan norm- $n$  pada  $\ell^2$ . Selanjutnya, ditunjukkan bahwa ruang  $\ell^p$  merupakan ruang Banach- $n$  dengan mengambil sebarang barisan Cauchy di  $\ell^p$  yang konvergen di  $\ell^p$  dalam ruang norm- $n$ .

**Kata Kunci** : ruang norm- $n$ , ruang  $\ell^p$ , Barisan Cauchy, ruang Banach- $n$

## Abstract

The formula of  $n$ -normed space in space  $\ell^p$  is a generalization from the formula of  $n$ -normed space in space  $\ell^2$ . Furthermore, it is shown that space  $\ell^p$  is  $n$ -Banach space by taking any Cauchy sequence in the space  $\ell^p$  which convergent in  $\ell^p$  on  $n$ -normed space.

**Keywords** :  $n$ -normed space, space  $\ell^p$ , Cauchy sequence,  $n$ -Banach space

## 1. Pendahuluan

Konsep ruang norm pertama kali dikemukakan oleh S. Banach, H. Hahn dan N. Wiener pada tahun 1922. Ruang norm,  $(X, \|\cdot\|)$  adalah suatu ruang vektor  $X$  dengan metrik yang didefinisikan oleh suatu norm  $\|\cdot\|$ . Kajian tentang ruang norm ini telah banyak dikaji oleh matematikawan, diantaranya adalah kajian tentang ruang norm-2 yang pertama kali dikemukakan oleh Gähler pada pertengahan tahun 1960-an. Ruang norm-2,  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  adalah ruang yang dibangun dari ruang vektor  $X$  yang mempunyai  $\dim(X) \geq 2$  dengan metrik yang didefinisikan oleh suatu norm  $\|\cdot, \cdot\|$ .

Pada tahun 1969, Gähler kemudian mengembangkan ruang norm pada ruang vektor real  $X$  dengan  $\dim(X) \geq n$ , dilambangkan dengan  $\|\cdot, \dots, \cdot\|$  dan  $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  disebut ruang norm- $n$ . Tahun 2011, H. Gunawan dan Mashadi [6] dalam tulisannya menyatakan bahwa ruang norm- $n$  dengan  $n \geq 2$  adalah suatu ruang norm- $(n-1)$ , untuk kasus standar atau untuk ruang yang berdimensi hingga, norm- $(n-1)$  dapat diturunkan dari norm- $n$  dengan cara tertentu, kemudian kekonvergenan dan kelengkapan dari norm- $n$  ekuivalen dengan kekonvergenan dan kelengkapan yang diturunkan dari norm- $(n-1)$ .

Kajian lain yang membahas tentang kelengkapan norm- $n$  dilakukan oleh Shelvi Ekariani dan Hendra Gunawan [2], dimana kekonvergenan dan kelengkapan barisan dalam norm- $n$  mengakibatkan kekonvergenan dan kelengkapan barisan dalam norm, begitu juga sebaliknya.

Kelengkapan ruang  $\ell^p$  pada norm- $n$  sebelumnya telah dibahas oleh Hendra Gunawan [4] dalam tulisannya “*The Space of  $p$ -Summable Sequences and Its Natural  $n$ -Norm*”. Kelengkapan tersebut ditunjukkan dengan mendefinisikan sebuah norm pada ruang  $\ell^p$  dan membuktikan ekuivalensi norm tersebut dengan norm pada ruang  $\ell^p$ .

Dari beberapa referensi tersebut diatas, penulis tertarik untuk mengkaji kembali bagaimana kelengkapan ruang  $\ell^p$  di dalam ruang norm- $n$  dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa ruang  $\ell^p$  merupakan ruang Banach- $n$ , dengan metode yang sama dengan [1] dengan

<sup>1</sup> Program S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

<sup>2</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

<sup>3</sup> Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

tujuan penulisan yaitu mengkaji definisi norm- $n$  pada ruang  $\ell^p$ , dan membuktikan kelengkapan ruang  $\ell^p$  di ruang norm- $n$ .

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1 Ruang $\ell^p$

#### Definisi 2.1.1

Misal  $p \geq 1$  adalah bilangan real. Setiap elemen dalam ruang  $\ell^p$  adalah barisan  $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$  dari bilangan real sedemikian sehingga  $|x_1|^p + |x_2|^p + \dots$  konvergen, didefinisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \quad \text{untuk } p \geq 1. \quad (1)$$

Jika  $(x_n)$  adalah barisan dalam bilangan real, maka yang diperoleh adalah ruang real  $\ell^p$ . Jika  $(x_n)$  adalah barisan dalam bilangan kompleks, maka yang diperoleh adalah ruang kompleks  $\ell^p$ , namun yang akan dibahas adalah ruang real  $\ell^p$ .

### 2.2 Ruang Norm-2

#### Definisi 2.2.1

Misalkan  $X$  ruang vektor real berdimensi  $d$  dengan  $d \geq 2$ . Norm-2 pada  $X$  didefinisikan sebagai suatu pemetaan  $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $x, y, z \in X$  dan  $\alpha \in \mathbb{R}$  memenuhi sifat-sifat berikut :

1.  $\|x, y\| = 0$  jika dan hanya jika  $x$  dan  $y$  bergantung linear,
2.  $\|x, y\| = \|y, x\|$ ,
3.  $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|$ ,
4.  $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$

Pasangan  $(X, \|\cdot, \cdot\|)$  disebut ruang norm-2.

Telah diketahui bahwa norm-2 pada ruang  $\ell^p$  untuk  $1 \leq p < \infty$  dan  $p \neq 2$  didefinisikan sebagai

$$\|x, y\| = \left[ \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left| \begin{matrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{matrix} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

Untuk menunjukkan bahwa ruang  $\ell^p$  merupakan ruang norm-2 dibutuhkan ketaksamaan Minkowski untuk deret double.

#### Teorema 2.2.2 (Ketaksamaan Minkowski untuk Deret Double)

Jika  $p \geq 1$  dan  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dimana  $(x_n), (y_n) \in \ell^p$  maka

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_k + x_k y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

Proposisi 2.2.3

Jika fungsi  $\|\cdot, \cdot\|: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ , didefinisikan

$$\|x, y\| = \left[ \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left| \begin{matrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{matrix} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Maka  $(\ell^p, \|\cdot, \cdot\|)$  adalah ruang norm-2.

Ruang  $\ell^p$  merupakan ruang yang lengkap pada ruang norm-2 atau ruang Banach-2, yang telah dibuktikan pada [1].

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1 Ruang Norm-n

Definisi 3.1.1

Misalkan  $X$  adalah ruang vektor real berdimensi  $d$  dimana  $d \geq n$  serta  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ . Suatu fungsi bernilai real tak negatif yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan  $\|\cdot, \dots, \cdot\|: X \times \dots \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $x_1, x_2, \dots, x_n, y, z \in X$  memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

1.  $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$  jika dan hanya jika  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear;
2.  $\|x_1, \dots, x_n\| = \|x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\|$ , untuk permutasi  $(i_1, \dots, i_n)$  dari  $(1, \dots, n)$ ;
3.  $\|x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\|$  untuk setiap  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|$ , disebut norm-n di  $X$ . Pasangan  $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  disebut ruang norm-n.

Terinspirasi dari rumusan norm-n pada  $\ell^2$  didefinisikan norm-n pada  $\ell^p$ , yaitu

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left( \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left| \begin{matrix} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{matrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4)$$

Proposisi 3.1.2

Jika fungsi  $\|\cdot, \dots, \cdot\|: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ , didefinisikan

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left( \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left| \begin{matrix} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{matrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

maka  $(\ell^p, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  adalah ruang norm-n.

Bukti :

Ambil  $(x_1, \dots, x_n) \in \ell^p$ , akan ditunjukkan bahwa norm  $\|x_1, \dots, x_n\|$  memenuhi sifat-sifat ruang norm-n. Akan ditunjukkan  $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$  jika dan hanya jika  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear.

( $\Rightarrow$ ) Jika  $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$  maka  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear, diketahui  $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ , sehingga

$$\left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{vmatrix} \right]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

diperoleh

$$\begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Sehingga berdasarkan teorema bebas linear,  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear.

( $\Leftarrow$ ) Jika  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear maka  $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$

Jika  $x_1, \dots, x_n$  bergantung linear maka terdapat skalar-skalar  $k_i \neq 0$  dimana  $i = 1, 2, \dots, n$ , sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} x_{ij_1} \\ x_{ij_2} \\ \vdots \\ x_{ij_n} \end{pmatrix} = \left(-\frac{k_2}{k_i}\right) \begin{pmatrix} x_{2j_1} \\ x_{2j_2} \\ \vdots \\ x_{2j_n} \end{pmatrix} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right) \begin{pmatrix} x_{nj_1} \\ x_{nj_2} \\ \vdots \\ x_{nj_n} \end{pmatrix} \quad (5)$$

sehingga,

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} \begin{vmatrix} \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2j_1} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{nj_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2j_2} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{nj_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\frac{k_2}{k_i}\right)x_{2j_n} + \dots + \left(-\frac{k_n}{k_i}\right)x_{nj_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{vmatrix} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

Berdasarkan sifat penjumlahan determinan jika terdapat dua kolom sama atau sebanding maka nilai determinan = 0, sehingga dari persamaan (6) diperoleh

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} (0)^p \right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Sehingga  $\|x_1, \dots, x_n\|_p = 0$

Ruang  $\ell^p$  memenuhi sifat kedua dan ketiga ruang norm- $n$ , dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat determinan. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\|_p + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|_p$$

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p = \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{(n-1)j_1} & y_{j_1} + z_{j_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{(n-1)j_2} & y_{j_2} + z_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{(n-1)j_n} & y_{j_n} + z_{j_n} \end{vmatrix} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

Berdasarkan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$\left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{vmatrix} x_{1j_1} & \dots & x_{(n-1)j_1} & y_{j_1} \\ x_{1j_2} & \dots & x_{(n-1)j_2} & y_{j_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1j_n} & \dots & x_{(n-1)j_n} & y_{j_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1j_1} & \dots & x_{(n-1)j_1} & z_{j_1} \\ x_{1j_2} & \dots & x_{(n-1)j_2} & z_{j_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1j_n} & \dots & x_{(n-1)j_n} & z_{j_n} \end{vmatrix} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{array}{cccc} x_{1j_1} & \dots & x_{(n-1)j_1} & y_{j_1} \\ x_{1j_2} & \dots & x_{(n-1)j_2} & y_{j_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1j_n} & \dots & x_{(n-1)j_n} & y_{j_n} \end{array} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{array}{cccc} x_{1j_1} & \dots & x_{(n-1)j_1} & z_{j_1} \\ x_{1j_2} & \dots & x_{(n-1)j_2} & z_{j_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1j_n} & \dots & x_{(n-1)j_n} & z_{j_n} \end{array} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (8)$$

Jadi,  $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\|_p \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\|_p + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|_p$ .

Karena semua sifat ruang norm- $n$  terpenuhi maka ruang  $\ell^p$  terdefinisi pada ruang norm- $n$ . ■

### 3.2 Ruang Banach- $n$

#### Definisi 3.2.1

Barisan  $(x_k)$  diruang norm- $n$   $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  dikatakan konvergen ke  $x \in X$  dalam norm- $n$  jika untuk setiap  $x_2, \dots, x_n \in X$ , dan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sedemikian sehingga

$$\|x_k - x, x_2, \dots, x_n\| < \varepsilon, \quad \text{untuk setiap } k \geq n_0$$

#### Teorema 3.2.2

Misalkan  $X = (X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  adalah ruang norm- $n$ , maka limit dari suatu barisan diruang tersebut yang konvergen adalah tunggal.

#### Definisi 3.2.3

Barisan  $(x_k)$  diruang norm- $n$   $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$  dikatakan Cauchy ke  $x \in X$  dalam norm- $n$  jika untuk setiap  $x_2, \dots, x_n \in X$ , dan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sedemikian sehingga

$$\|x_k - x_l, x_2, \dots, x_n\| < \varepsilon, \quad \text{untuk setiap } k, l \geq n_0$$

#### Teorema 3.2.4

Jika barisan  $(x_k)$  konvergen dalam norm- $n$ , maka  $(x_k)$  adalah barisan Cauchy dalam norm- $n$ .

#### Definisi 3.2.5

Misal  $X$  merupakan ruang vektor dalam ruang norm- $n$ . Maka  $X$  disebut ruang yang lengkap pada norm- $n$  jika setiap barisan Cauchy pada  $X$  konvergen ke elemen  $X$ . Ruang Banach- $n$  merupakan ruang norm- $n$  yang lengkap.

#### Teorema 3.2.6

Ruang  $\ell^p$  adalah ruang yang lengkap pada norm- $n$ , dengan norm- $n$  pada  $\ell^p$  didefinisikan sebagai berikut

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{array}{cccc} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Bukti :*

Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam  $\ell^p$  konvergen ke  $x \in \ell^p$ . Misal  $(x_k)$  adalah sebarang barisan Cauchy dalam  $\ell^p$ , dimana  $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots)$ . Maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $k, l \geq n_0$  berlaku

$$\|x_k - x_l, x_2, \dots, x_n\| = \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{array}{cccc} x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}^{(l)} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2}^{(l)} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_n}^{(k)} - x_{j_n}^{(l)} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \quad (9)$$

diperoleh,

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left( \begin{array}{cccc} x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}^{(l)} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2}^{(l)} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_n}^{(k)} - x_{j_n}^{(l)} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right)^p < \varepsilon^p \quad (10)$$

Ambil  $j_i$  yang tetap, dimana  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan misal  $(n!)^{\frac{1}{p}} \varepsilon = \varepsilon'$ , sehingga diperoleh

$$\left| \begin{array}{cccc} x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}^{(l)} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2}^{(l)} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_n}^{(k)} - x_{j_n}^{(l)} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right| < \varepsilon'. \quad (11)$$

Berdasarkan definisi determinan  $n \times n$ , dimana  $p = (n - 1)$  dan  $q = n$  untuk  $n$  genap dan  $p = n$  dan  $q = (n - 1)$  untuk  $n$  ganjil. Maka persamaan (3.8) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} & \left( (x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}^{(l)})C_{11} + (x_{j_3}^{(k)} - x_{j_3}^{(l)})C_{31} + \dots + (x_{j_p}^{(k)} - x_{j_p}^{(l)})C_{p1} \right) \\ & - \left( (x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2}^{(l)})C_{21} + (x_{j_4}^{(k)} - x_{j_4}^{(l)})C_{41} + \dots + (x_{j_q}^{(k)} - x_{j_q}^{(l)})C_{q1} \right) \\ & < \varepsilon' \end{aligned} \quad (12)$$

Pilih  $j_i$  yang tetap, untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , dimana  $j_i = 1, 2, \dots$  sehingga dari (12) dapat disimpulkan bahwa  $(x_{j_1}^{(k)}), (x_{j_2}^{(k)}), \dots, (x_{j_n}^{(k)})$  merupakan barisan Cauchy di  $\mathbb{R}$ . Berdasarkan Teorema Cauchy-Konvergen pada bilangan real, maka  $\mathbb{R}$  lengkap. Karena  $\mathbb{R}$  lengkap, maka  $(x_{j_1}^{(k)}), (x_{j_2}^{(k)}), \dots, (x_{j_n}^{(k)})$  konvergen, berarti untuk  $k \rightarrow \infty$  berlaku  $(x_{j_1}^{(k)}) \rightarrow (x_{j_1}), (x_{j_2}^{(k)}) \rightarrow (x_{j_2}), \dots, (x_{j_n}^{(k)}) \rightarrow (x_{j_n})$ .

Kemudian akan ditunjukkan bahwa  $x_k \rightarrow x$  dan  $x \in \ell^p$ . Dari (10), untuk  $m, n \geq n_0$  diperoleh

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^u \dots \sum_{j_n=1}^u \left| \begin{array}{cccc} x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}^{(l)} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2}^{(l)} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_n}^{(k)} - x_{j_n}^{(l)} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right|^p < \varepsilon^p. \quad (u = 1, 2, \dots)$$

Untuk  $l \rightarrow \infty$  dan  $u \rightarrow \infty$ , dimana  $k \geq n_0$ , diperoleh

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left| \begin{array}{cccc} x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_n}^{(k)} - x_{j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right|^p < \varepsilon^p \quad (13)$$

Dari definisi determinan  $n \times n$  memberikan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} & \left[ \left( (x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1})c_{11} + (x_{j_3}^{(k)} - x_{j_3})c_{31} + \dots + (x_{j_p}^{(k)} - x_{j_p})c_{p1} \right) \right. \\ & \left. - \left( (x_{j_2}^{(k)} - x_{j_2})c_{21} + (x_{j_4}^{(k)} - x_{j_4})c_{41} + \dots + (x_{j_q}^{(k)} - x_{j_q})c_{q1} \right) \right]^p \\ & < \varepsilon^p. \end{aligned} \quad (14)$$

Persamaan (14) menunjukkan bahwa  $x_k - x = (x_{j_1}^{(k)} - x_{j_1}) \in \ell^p$ .

Karena  $x = x_k + (x - x_k)$ , dimana  $x_k \in \ell^p$ ,  $(x - x_k) \in \ell^p$ , maka berdasarkan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\sum_{j_1=1}^{\infty} |x_{j_1}^{(k)} + (x_{j_1} - x_{j_1}^{(k)})|^p \leq \sum_{j_1=1}^{\infty} |x_{j_1}^{(k)}|^p + \sum_{j_1=1}^{\infty} |(x_{j_1} - x_{j_1}^{(k)})|^p < \infty \quad (15)$$

Jadi,  $x \in \ell^p$ . Dari (14) menunjukkan bahwa  $x_k \rightarrow x$ , karena  $(x_k)$  adalah sebarang barisan cauchy dalam ruang  $\ell^p$  dan  $x \in \ell^p$ , ini menunjukkan bahwa ruang  $\ell^p$  adalah ruang yang lengkap pada norm- $n$  dengan kata lain  $\ell^p$  merupakan ruang Banach- $n$ . ■

## 4. Penutup

### 4.1 Kesimpulan

Ruang  $\ell^p$  merupakan barisan  $(x_n)$  dari bilangan real sedemikian sehingga  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$  konvergen. Dari rumusan norm- $n$  pada  $\ell^2$ , didefinisikan norm- $n$  pada  $\ell^p$ , yaitu

$$\|x_1, \dots, x_n\|_p = \left( \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \left| \begin{array}{cccc} x_{1j_1} & x_{2j_1} & \dots & x_{nj_1} \\ x_{1j_2} & x_{2j_2} & \dots & x_{nj_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j_n} & x_{2j_n} & \dots & x_{nj_n} \end{array} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ruang  $\ell^p$  merupakan ruang yang lengkap pada ruang norm- $n$  atau ruang Banach- $n$  yang telah dibuktikan pada Teorema 3.2.6.

### 4.2 Saran

Dalam penulisan ini, hanya mengkaji kelengkapan ruang  $\ell^p$  pada norm- $n$ . Penulis menyarankan untuk mengkaji kelengkapan ruang  $C[a, b]$ ,  $L^2[a, b]$ , baik pada norm-2 maupun norm- $n$ .

## Daftar Pustaka

- [1] Astriana, Ria, (2012), *Ruang  $\ell^p$  Sebagai Ruang Banach-2 pada Ruang Norm-2*, Skripsi Universitas Hasanuddin Makassar.

- [2] Ekariani, Shelvi dan Hendra Gunawan, (2012), Teorema Titik Tetap pada Ruang Norm-n Standar, *JMP*. 4, 69 – 77.
- [3] Edwards, C.H dan David E. Penney, (1937), *Elementary Linear Algebra*, Prentice Hall, Inc : Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Gunawan, Hendra, (2001), The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm, *Bull.Austral. Math. Soc.* 64, 137-147.
- [5] Gunawan, H dan Mashadi, (2001), On n-norm Space. *Int. J. Math. Sci.* 27, 631-639.
- [6] Kreszyg, Erwin, (1978), *Introductory Function Analysis with Application*, John Wiley & Sons, Inc : New York.
- [7] Nur, M, (2011), *Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-n Standar*, Tesis Magister Matematika ITB.
- [8] Zulfaneti, (2011), Norm-n dan Fungsional linear-n terbatas d Ruang Hilbert, (Online), ([pasca.unand.ac.id/id/wp-content/uploads/2011/09/artikel2.pdf](http://pasca.unand.ac.id/id/wp-content/uploads/2011/09/artikel2.pdf) diunduh 5 Maret 2013).