PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KINCIR $Wd_{5,m}$

SKRIPSI

ST. MARYAM MAHASENG
H111 16 314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KINCIR $Wd_{5,m}$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ST. MARYAM MAHASENG

H111 16 314

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2020

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KINCIR $Wd_{5,m}$

Adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 09 Juni 2020

ST. MARYAM MAHASENG
H111 16 314

PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN TITIK GRAF KINCIR $Wd_{5,m}$

SKRIPSI

ST. MARYAM MAHASENG

H11116314

Telah Diperiksa dan Disetujui

Tanggal: 09 Juni 2020

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.	**Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**
NIP. 19700807 200003 1 002	NIP. 19680601 199512 2 001

LEMBAR PENGESAHAAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : ST. MARYAM MAHASENG

NIM : H111 16 314

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kincir $Wd_{5,m}$

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

1. Ketua : **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** (.............................)
2. Sekretaris : **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** (.............................)
3. Anggota : **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** (.............................)
4. Anggota : **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.** (.............................)

Ditetapkan : Makassar

Tanggal : 09 Juni 2020

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI SKRIPSI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: St. Maryam Mahaseng
NIM	: H111 16 314
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas royalti Non-eksklusif** ***(Non-exclusive Royalty Free Right)*** atas skripsi saya yang berjudul:

" Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kincir $Wd_{5,m}$"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data *(database)*, merawat dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal 9 Juni 2020

Yang menyatakan

ST. MARYAM MAHASENG

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbi'alamin. Puji syukur penulis haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi dengan judul "Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kincir $Wd_{5,m}$" dapat terselesaikan dengan baik. Salawat dan taslim semoga tetap tercurah kepada Rasulullah SAW yang menjadi suri tauladan bagi umat Islam dalam menjalani hidup yang sesungguhnya.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Ayahanda **Rudy Mahaseng, S.H. (Alm)** dan Ibunda **Rohmah** tercinta yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa dan materi kepada penulis dalam menuntut ilmu.
2. **Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** dan **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.** yang dengan sabar meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
3. **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** dan **Andi Galsan Mahie, S.Si., M.Si.** selaku penguji, terimakasih atas saran dan kritikannya demi perbaikan skripsi penulis.
4. Seluruh dosen di Departemen FMIPA Universitas Hasanuddin yang telah mendidik, mengajarkan, membimbing, dan mencurahkan ilmunya kepada penulis.
5. Adik saya **Aisyah Ramadhani Mahaseng** dan **Aini Nur Khairunnisa Mahaseng**, juga kepada tante saya **Dra. Nadirah Mahaseng, M.Ed.** yang sudah saya anggap sebagai ibu saya sendiri, serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, semangat, dan kasih sayang tanpa batas.
6. **Ibu Fatma** dan **Pak Wayan** sebagai guru Matematika penulis di SDN Sangir Makassar, **Ibu Cia** dan **Pak Ucu** sebagai guru Matematika penulis di SMAN 1 Makassar yang selalu mengajarkan Matematika dengan cara ang sangat menyenangkan kepada penulis sehingga penulis dapat enyukai Matematika hingga sekarang, serta kepada **Pak Ramli** dan **Ibu vni** sebagai wali kelas penulis di SMP Kartika Wrb I Makassar.

7. Terima kasih kepada **Inci, Ayu, Ulfa, Alda, Indah, Nisa** dan **Sukma** yang telah memberikan warna perkuliahan selama 4 tahun terakhir serta memberi semangat kepada penulis selama mengerjakan skripsi.
8. Teman-teman seperjuangan prodi **Matematika 2016** terkhusus **Agung, Suju, Haliah, Wiwi, Widya, Devi** atas rasa persaudaraan dan kebersamaan yang telah diberikan kepada penulis.
9. Kepada **teman-teman SMA** penulis terkhusus **Dian, Naufi, Balon, Nina, Nadya, Iis, Vidya** yang selalu memberikan semangat kepada penulis selama mengerjakan skripsi.
10. Teman-teman **KKN Desa Lemoape Kab. Bone** terkhusus **Soraya, Irma, Makhdi** dan **Rahmad** yang selalu memberikan semangat kepada penulis ketika mengerjakan skripsi.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menerima kritik dan saran demi tercapainya kesempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis. Aamiin Ya Robbal Alaamiin.

Makassar, 09 Juni 2020

St. Maryam Mahaseng

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Suatu pelabelan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ disebut pelabelan-k total tidak teratur titik pada graf G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda di V maka bobot titik x dan bobot titik y berbeda, yaitu $wt(x) \neq wt(y)$. Bobot titik x pada suatu pelabelan total adalah label titik x ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan titik x, yaitu $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu)$. Nilai total ketidakteraturan titik dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Skripsi ini membahas mengenai penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada graf Kincir $Wd_{5,m}$ $\left(tvs(Wd_{5,m})\right)$. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$tvs(Wd_{5,m}) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil, \text{ untuk } m \geq 2.$$

Kata Kunci: *Graf Kincir, Pelabelan Total Tidak Teratur Titik, Nilai Total Ketidakteraturan Titik.*

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A labeling $f: V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}$ is called a vertex irregular total k-labeling if for every two different vertices x and y in V their weights are distinct, that is $wt(x) \neq wt(y)$. The weight of vertex x in total labeling is the sum of its label and the labels of all edges incident with the given vertex x,that is $wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu)$. The total vertex irregularity strength of G, is the smallest positive integer k such that G has a vertex irregular total k-labeling, which is notated by $tvs(G)$.

In this paper, we determined the total vertex irregularity strength of *Windmill* graph $Wd_{5,m}$ $\left(tvs(Wd_{5,m})\right)$. In this paper we obtained that:

$$tvs(Wd_{5,m}) = \left\lceil \frac{4m+4}{5} \right\rceil, \text{ for } m \geq 2.$$

Keywords: *Windmill Graph, Total Vertex Irregular Labeling, Total Vertex Irregularity Strength.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

Lambang	**Keterangan**	**Pemakaian pertama kali pada halaman**
$G = (V, E)$	Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E	1
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik pada graf G	2
$Wd_{5,m}$	Graf Kincir	3
$V(G)$	Himpunan titik graf G	5
$E(G)$	Himpunan sisi graf G	5
$deg(v)$	Derajat titik v pada suatu graf	6
$\delta(G)$	Derajat titik minimum pada graf G	6
$\Delta(G)$	Derajat titik maksimum pada graf G	6
$f(v)$	Fungsi pelabelan titik v	12
$f(uv)$	Fungsi pelabelan sisi uv	12
$wt(v)$	Bobot titik v	12

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain, dimana matematika selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan karena kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih sangat muda bila dibandingkan dengan cabang matematika yang lain. Oleh karena itu saat ini banyak peneliti yang tertarik untuk mendalami teori graf.

Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736, melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Saat itu Euler memikirkan kemungkinan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Konigsberg, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dan solusi yang ditawarkan saat ini dikenal dengan teori graf. (Ardianty, S.B., 2018).

Secara matematis graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik *(vertex)* dan E adalah himpunan sisi *(edge)* yang menghubungkan sepasang titik. Definisi tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Pengaitan titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Biasanya titik digambarkan dengan titik-titik pada bidang dan sisi digambarkan dengan garis yang menghubungkan dua titik pada bidang. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf trivial. (Munir, R., 2010).

elabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf yang semakin ang. Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang an himpunan dari unsur-unsur suatu graf ke suatu himpunan bilangan (umumnya himpunan bilangan bulat positif atau non negatif) yang diperkenalkan oleh Sedl$\acute{a}\check{c}$ek (1963). Pelabelan dengan domain titik disebut pelabelan titik, pelabelan dengan domain sisi disebut pelabelan sisi, serta pelabelan dengan domain gabungan titik dan sisi disebut pelabelan total. (W.D. Wallis, 2001).

Pada tahun 1988 Chartrand dkk. telah memperkenalkan pelabelan tidak teratur *(irregular labeling)* pada graf G yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan sisi dari G ke himpunan bilangan bulat positif, sedemikian sehingga semua titiknya mempunyai bobot yang berbeda dan berbagai jenis pelabelan lainnya. Kemudian B$\breve{a}$ca dkk. mengkaji suatu jenis pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur *(irregular total labeling).* B$\breve{a}$ca dkk. meneliti pelabelan total tidak teratur ke dalam dua tipe, yaitu pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi.

Pelabelan total tidak teratur titik didefinisikan sebagai pemetaan yang memetakan himpunan titik dan sisi dari suatu graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Dalam hal ini yang dimaksud dengan bobot adalah penjumlahan dari label sisi-sisi yang terkait dengan suatu titik ditambah dengan label dari titik itu sendiri. Dalam perkembangannya juga akan diperkenalkan nilai total ketidakteraturan titik pada suatu graf G (*total vertex irregularity strength of graph)* yang dinotasikan dengan $tvs(G)$, yaitu suatu bilangan bulat positif terkecil k, sedemikian sehingga fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi dari suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif 1 sampai k menghasilkan bobot dari setiap titik pada graf tersebut berbeda. (Kurniawan, A.P., 2011).

Beberapa penelitian telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada beberapa graf. B$\breve{a}$ca, M. dkk (2007) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf bintang ($K_{1,n}$) untuk $n \geq 2$ dan graf lengkap (K_n) untuk $n \geq 2$. Ahmad, A. dkk (2011) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada *helm graph* (H_n) untuk $n \geq 4$, *friendship graph* ($f_{m,n}$) untuk $n \geq 4$ dan $m > 1$, serta *aph* (F_n) untuk $n \geq 4$. Wijaya, K. dkk (2005) telah menentukan nilai dakteraturan titik pada graf bipartit lengkap (*complete bipartite*) ($K_{n,n}$) ≥ 3. Kemudian Wijaya, K. dkk (2011) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *Cocktail Party* $(H_{2,n})$ untuk $n \geq 3$. Al-Mushayt, O. dkk (2013) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf *polytope* (A_n) untuk $n \geq 5$. Ahmad, A. dkk (2013) meneliti nilai total ketidakteraturan titik pada *Cubic Plane Graph* (D_n) untuk $n \geq 3$. Jeyanthi dan Sudha (2018) meneliti nilai total ketidakteraturan titik pada graf roda berkepala ganda (DW_n) untuk $n \geq 3$ dan pada graf buku segitiga *(triangular book graph)* (B_n) untuk $n \geq 2$. Besse, Y. dkk (2015) menentukan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf kincir $Wd_{3,m}$. Namun belum ada peneliti yang menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir *(windmill)* $Wd_{5,m}$. Sehingga penulis tertarik untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir *(windmill graph)* $Wd_{5,m}$ dan menuangkan dalam bentuk tulisan skripsi dengan judul "Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf Kincir $Wd_{5,m}$".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}$?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah penentuan batas bawah dan batas atas dari nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}$ dengan $m \geq 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengonstruksi fungsi pelabelan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

mbah pengetahuan penulis tentang graf dan pelabelan graf.

2. Menambah pengetahuan penulis tentang cara menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir.

3. Dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian terkait nilai total ketidakteraturan titik pada suatu graf.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terdiri dari lima bab, sebagai berikut:

a) Bab I Pendahuluan, yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan sistematika penulisan.

b) Bab II Tinjauan Pustaka, dalam bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar yang relevan dengan pelabelan total tidak teratur titik pada graf kincir, antara lain membahas tentang pengertian graf, terminologi graf, operasi gabungan graf, jenis-jenis graf dan pelabelan graf.

c) Bab III Metode Penelitian, yang berisi tentang metode penelitian dan langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}\left((tvs(Wd_{5,m}))\right)$.

d) Bab IV Pembahasan, dalam bab ini dibahas mengenai hasil-hasil yang diperoleh dalam menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf kincir $Wd_{5,m}\left((tvs(Wd_{5,m}))\right)$.

e) Bab V Penutup, bab ini berisi tentang kesimpulan dari pengerjaan tugas akhir secara keseluruhan dan juga terdapat saran yang ditujukan bagi peneliti lain agar bisa mengembangkan penelitian ini.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, terminologi graf, operasi gabungan graf, jenis-jenis graf, serta penjelasan mengenai pelabelan pada graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

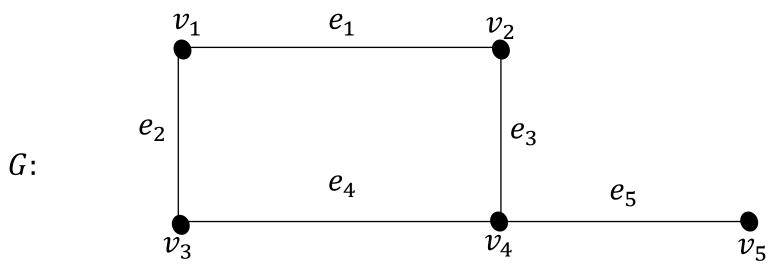
2.1 Pengertian graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan sisi. Secara formal definisi graf dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 *Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak terurut dari elemen-elemen V yang disebut sisi (edge).*

Himpunan titik dari graf G biasanya dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya unsur dari $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur dari $E(G)$ disebut *size* (ukuran) dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis $e = (u, v)$. Namun dalam tugas akhir ini, sisi $e = (u, v)$ hanya akan ditulis $e = uv$.

Contoh 2.1.1



Gambar 2.1.1 Graf G

n titik dan sisi dari graf G pada Gambar 2.1.1 masing-masing adalah:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_4$, $e_4 = v_3v_4$ dan $e_5 = v_4v_5$ sehingga *order* dan *size* dari graf G adalah 5.

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada bab pembahasan tugas akhir ini.

Definisi 2.2.1 *Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$. Jika $e = uv \in E(G)$, maka sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan titik v.*

Definisi 2.2.2 *Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (adjacent) bila keduanya dihubungkan oleh suatu sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika uv adalah sisi pada graf G.*

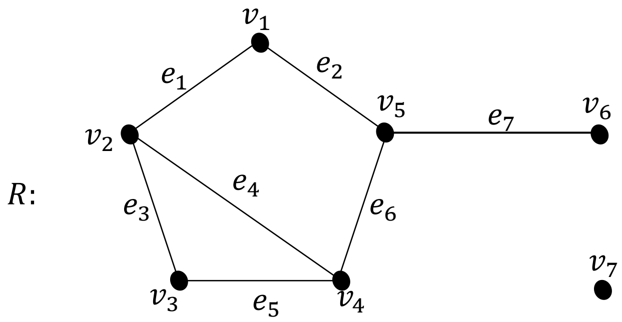
Definisi 2.2.3 *Jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda pada graf G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi bertetangga (adjacent edges).*

Definisi 2.2.4 *Misalkan v adalah suatu titik pada graf G. Derajat titik v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v, dan dinotasikan dengan deg(v). Notasi $\Delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat maksimum titik dari graf G dan $\delta(G)$ merupakan notasi derajat minimum titik dari graf G .*

Definisi 2.2.5 *Suatu jalan pada graf G adalah barisan titik dari G yaitu $u_0, u_1, \dots, u_l$ sedemikian sehingga u_i dan u_{i+1} bertetangga untuk $0 \leq i \leq l - 1$. Barisan tersebut dinotasikan dengan $W = \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$, sehingga W adalah suatu jalan $u_0 - u_l$, dimana u_0 adalah titik awal dari W dan u_l adalah titik ujung dari W. Karena jalan W memiliki l sisi yaitu $u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{l-1}u_l$ maka jalan W disebut memiliki panjang l. Suatu trail adalah suatu jalan yang setiap sisinya berbeda. Suatu lintasan adalah suatu jalan yang setiap titiknya berbeda.*

erdasarkan Definisi 2.2.5, panjang suatu jalan didefinisikan sebagai a sisi yang membentuk jalan.

Contoh 2.2.1:



Gambar 2.2.1 Graf R

Himpunan titik dan sisi dari graf R pada Gambar 2.2.1 masing-masing adalah:

$$V(R) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E(R) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

Berdasarkan graf R pada Gambar 2.2.1 diperoleh:

(i) Titik v_1 dan titik v_2 bertetangga, sedangkan titik v_1 dan v_3 tidak bertetangga.

(ii) Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait dengan titik v_1 dan v_2, sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4.

(iii) Derajat dari setiap titik graf R pada Gambar 2.2.1 adalah $deg(v_1) = deg(v_3) = 2$, $deg(v_2) = deg(v_4) = deg(v_5) = 3$, $deg(v_6) = 1$ dan $deg(v_7) = 0$. Sehingga derajat maksimum dari graf R adalah $\Delta(R) = 3$ dan derajat minimum dari graf R adalah $\delta(R) = 0$.

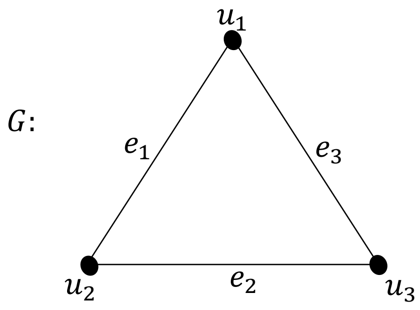
(iv) Pada Gambar 2.2.1 graf R memiliki suatu lintasan $v_1 - v_4: v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$ dengan panjang lintasan adalah 2. Lintasan lain pada graf R yaitu $v_2 - v_6$ adalah $v_2 - v_6: v_2,\ e_1, v_1, e_2, v_5, e_7, v_6$ dengan panjang lintasan adalah 3.

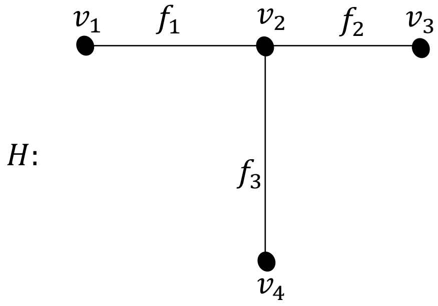
2.3 Operasi Union (Gabungan) Pada Graf

Pada sub bab ini akan didefinisikan operasi *union* (gabungan) pada suatu

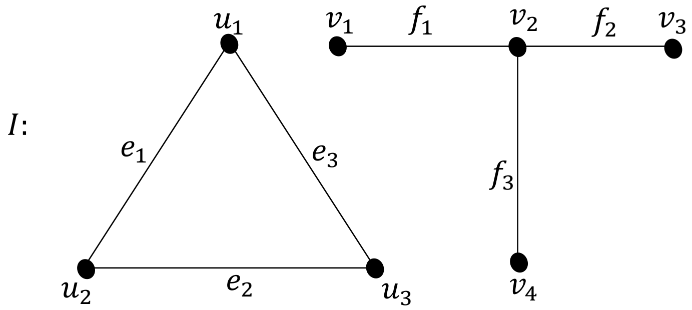
2.3.1 *Misalkan diberikan dua buah graf yaitu graf G_1 dengan himpunan himpunan sisi $V(G_1)$, $E(G_1)$ dan graf G_2 dengan himpunan titik dan sisi $V(G_2)$, $E(G_2)$. Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang* *dinotasikan dengan* $G = G_1 \cup G_2$ *mempunyai himpunan titik* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan himpunan sisi* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Contoh 2.3.1





Gambar 2.3.1 Graf J **Gambar 2.3.2** Graf H



Gambar 2.3.3 Graf $I = J \cup H$

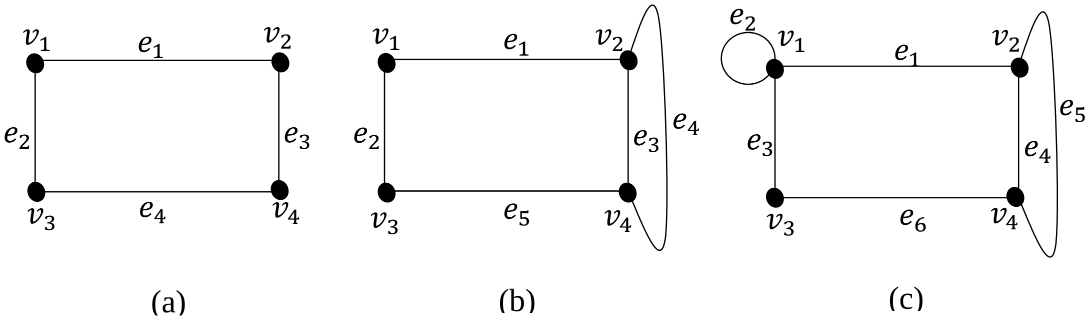
Gambar 2.3.1 merupakan gambar dari graf J dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing yaitu $V(J) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E(J) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Kemudian Gambar 2.3.2 menunjukkan gambar dari graf H dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing yaitu $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{f_1, f_2, f_3\}$. Sedangkan Gambar 2.3.3 menunjukkan gabungan dari graf J dan graf H yaitu graf I yang dinotasikan dengan $I = J \cup H$, dengan himpunan titik dan sisi masing-masing adalah $V(I) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(I) = \{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$.

2.4 Jenis-jenis Graf

eberapa graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus dari setiap graf. bab ini akan dipaparkan beberapa jenis graf yang berkaitan dengan ini.

Definisi 2.4.1 *Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang (loop) dan sisi ganda (multiple edges). Gelang (loop) adalah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, sedangkan sisi ganda (multiple edges) adalah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama. (Munir, R., 2010).*+

Contoh 2.4.1:

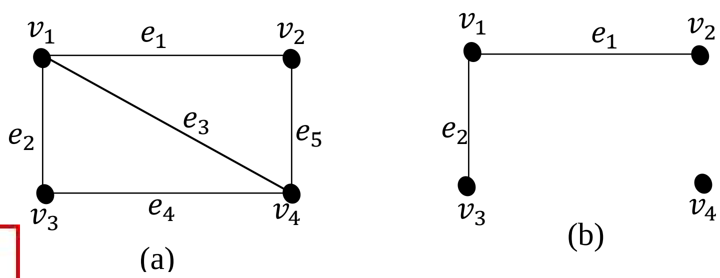


Gambar 2.4.1 (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, (c) Graf tak sederhana

Graf pada Gambar 2.4.1 (a) merupakan graf sederhana, karena dari gambar terlihat bahwa tidak terdapat loop dan sisi berganda pada graf tersebut. Sedangkan graf pada Gambar 2.4.1 (b) merupakan graf tak sederhana karena terdapat sisi berganda yaitu sisi e_3 dan sisi e_4 yang sama-sama menghubungkan titik v_2 dan titik v_4. Sementara itu graf pada Gambar 2.4.1 (c) juga merupakan graf tak sederhana karena terdapat *loop* (gelang) yaitu sisi e_2 yang berawal dan berakhir di titik yang sama yaitu titik v_1 serta terdapat sisi ganda yaitu sisi e_4 dan sisi e_5.

Definisi 2.4.2 *Misalkan* G *adalah suatu graf dan* $u, v \in V(G)$. *Graf* G *disebut graf terhubung (connected), jika setiap dua titik* u *dan* v *yang berbeda di* G *terdapat suatu lintasan dari* u *ke* v. *(Munir, R., 2010).*

Contoh 2.4.2:



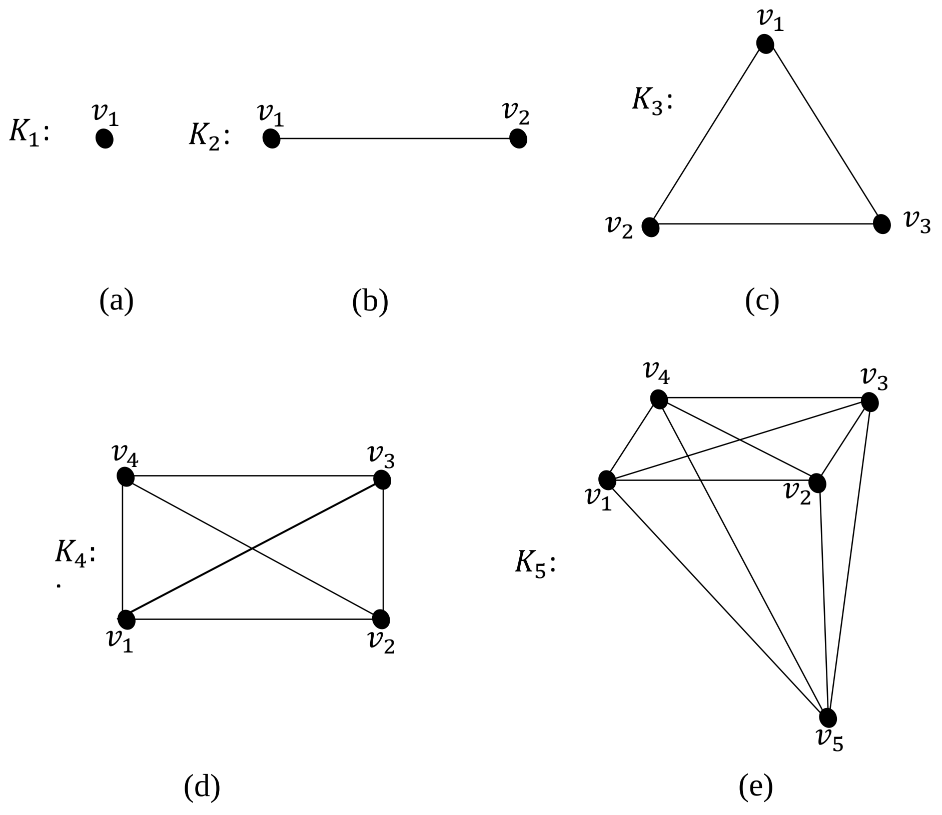
Gambar 2.4.2 (a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung

Graf pada Gambar 2.4.2 (a) merupakan graf terhubung, karena berdasarkan gambar terlihat bahwa untuk setiap dua titik pada graf tersebut, terdapat lintasan yang memuat kedua titik tersebut. Sedangkan graf pada Gambar 2.4.2 (b) merupakan graf tak terhubung karena terdapat dua titik yang berbeda pada graf tersebut yaitu titik v_2 dan titik v_4 tetapi tidak ada lintasan yang memuat kedua titik tersebut.

Definisi 2.4.3 *Graf lengkap (complete graph) dengan order n, yang dinotasikan dengan K_n, adalah graf yang setiap titiknya bertetangga (adjacent). (Chartrand, dkk., 2016).*

Setiap titik pada graf lengkap K_n memiliki derajat yang sama yaitu $n-1$. Sedangkan *size* graf lengkap K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Contoh 2.4.3:



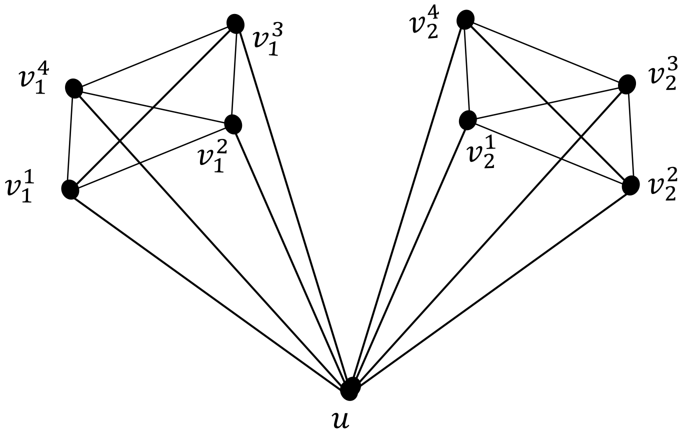
ambar 2.4.3 Graf Lengkap (a) K_1, (b) K_2, (c) K_3, (d) K_4, (e) K_5

erdasarkan Gambar 2.4.3 (a), (b), (c), (d) dan (e) terlihat bahwa $_3$, K_4 dan K_5 adalah graf lengkap karena setiap titik pada graf tersebut ga *(adjacent)* dengan semua titik yang lain.

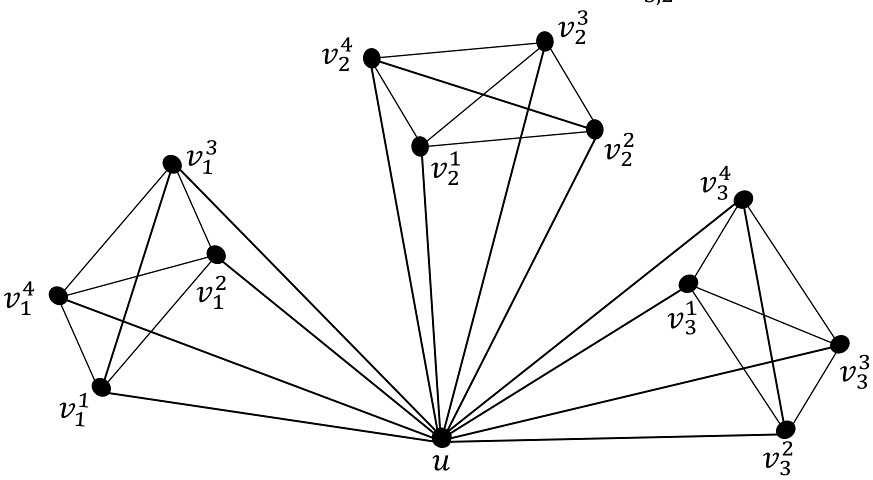
Definisi 2.4.4 *Graf Kincir (Windmill) yang dinotasikan dengan $Wd_{5,m}$ merupakan graf sederhana dengan order $4m + 1$ dan size $10m$, dimana $m \geq 2$. Graf Kincir (Windmill) $Wd_{5,m}$ merupakan graf yang dibangun dari gabungan m copy graf lengkap K_5 dengan satu titik yang sama. (Saputra, dkk., 2013).*

Graf kincir $Wd_{5,m}$ merupakan graf terhubung, hal ini dikarenakan setiap dua titik yang berbeda pada graf kincir $Wd_{5,m}$ terdapat lintasan yang memuat kedua titik tersebut. Graf $Wd_{5,m}$ terdiri dari $4m$ titik berderjat 4, dan satu titik berderat $4m$.

Contoh 2.4.4:



Gambar 2.4.4 Graf Kincir $Wd_{5,2}$



Gambar 2.4.5 Graf Kincir $Wd_{5,3}$

Gambar 2.4.4 merupakan graf kincir $Wd_{5,2}$ dengan banyaknya titik adalah ...$) = 9$ dan banyaknya sisi adalah $q(Wd_{5,2}) = 20$. Banyaknya titik ...t 4 adalah 8, dan satu titik berderajat 8 yaitu titik u. Graf $Wd_{5,2}$

merupakan gabungan dari 2 *copy* graf lengkap K_5 dengan 1 titik yang sama yaitu titik u. Sedangkan Gambar 2.4.5 merupakan graf kincir $Wd_{5,3}$ dengan banyaknya titik adalah $p(Wd_{5,3}) = 13$ dan banyaknya sisi adalah $q(Wd_{5,3}) = 30$. Banyaknya titik berderajat 4 adalah 12, dan satu titik berderajat 12 yaitu titik u. Graf $Wd_{5,3}$ merupakan gabungan dari 3 *copy* graf lengkap K_5 dengan 1 titik yang sama yaitu titik u.

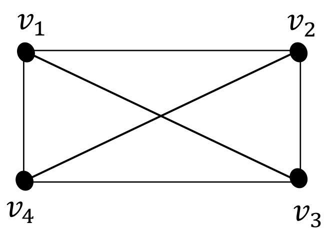
2.5 Pelabelan Graf

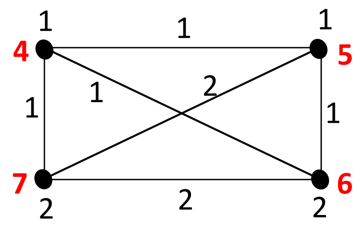
Dalam sub bab ini, akan dibahas definisi pelabelan graf dan bobot titik dari graf.

Definisi 2.5.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf (titik atau sisi) dengan suatu bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (vertex labeling). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (edge labeling) dan jika domain dari fungsi adalah gabungan himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total. (W.D. Wallis, 2001).*

Definisi 2.5.2 *Bobot titik v pada pelabelan total adalah label titik v ditambahkan dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v yaitu* $wt(v) = f(v) + \sum_{u \in V} f(uv)$.

Contoh 2.5.1:





Gambar 2.5.1 Pelabelan total pada graf lengkap K_4

Gambar 2.5.1 merupakan graf K_4 dengan $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $\{v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_1v_4,\ v_2v_3,\ v_2v_4,\ v_3v_4\}$ yang masing-masing titik dan iberi label bilangan bulat positif sehingga disebut pelabelan total. f adalah pelabelan total pada K_4 maka pelabelan titiknya adalah

$$f(v_1) = 1, f(v_2) = 1, f(v_3) = 2, f(v_4) = 2$$

sedangkan pelabelan sisinya adalah

$$f(v_1v_2) = 1, \quad f(v_1v_3) = 1, \quad f(v_1v_4) = 1$$
$$f(v_2v_3) = 1, \quad f(v_2v_4) = 2, \quad f(v_3v_4) = 2$$

sehingga bobot titik dari graf K_4 pada Gambar 2.5.1 adalah

$$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3) + f(v_1v_4) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$
$$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) + f(v_2v_4) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$
$$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_1v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$$
$$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_1v_4) + f(v_2v_4) + f(v_3v_4) = 2 + 1 + 2 + 2 = 7$$

2.6 Pelabelan Total Tidak Teratur Titik

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini cukup banyak dibahas yaitu pelabelan total tak teratur titik. Berikut ini diberikan definisi tentang pelabelan total tidak teratur titik.

Definisi 2.6.1 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana. Suatu pelabelan $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut pelabelan k-total tidak teratur titik (total vertex irregularity k-labeling) pada graf G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda pada V, berlaku*

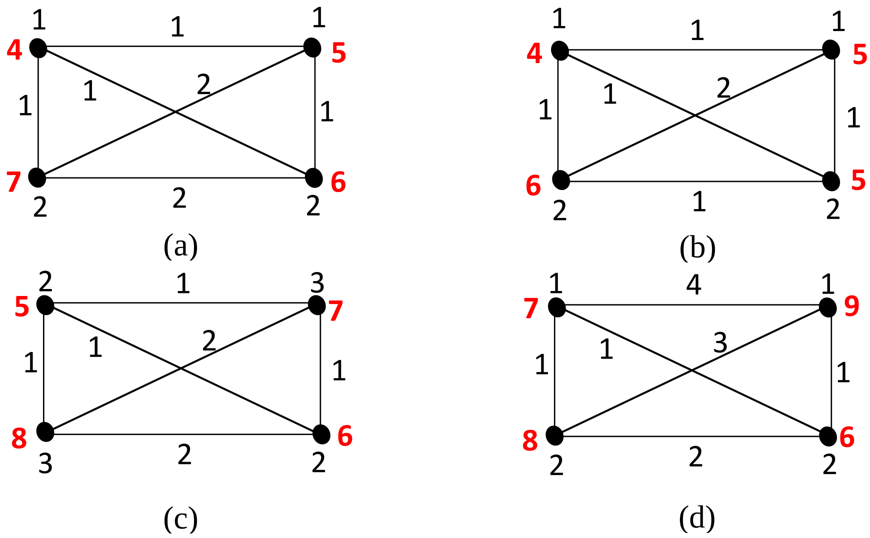
$$wt(x) \neq wt(y)$$

dimana

$$wt(x) = f(x) + \sum_{u \in V(G)} f(xu)$$

Definisi 2.6.2 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.*

2.6.1:



Gambar 2.6.1 Beberapa pelabelan total pada graf lengkap K_4

Gambar 2.6.1 (b) bukan merupakan pelabelan total ketidakteraturan titik pada K_4 karena terdapat dua titik yang memiliki bobot 5. Sedangkan Gambar 2.6.1 (a) merupakan pelabelan-2 total ketidakteraturan titik pada K_4, kemudian Gambar 2.6.1 (c) merupakan pelabelan-3 total ketidakteraturan titik pada K_4 dan Gambar 2.6.1 (d) merupakan pelabelan-4 total ketidakteraturan titik pada K_4. Namun K_4 tidak mempunyai pelabelan-1 total ketidakteraturan titik, sehingga diperoleh k terkecil adalah 2. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan titik pada K_4 adalah 2 ($tvs(K_4) = 2$).

Berikut ini beberapa penelitian tentang nilai total ketidakteraturan titik dari suatu graf yang diperoleh dari peneliti lainnya antara lain, B*ă*ca, M.dkk (2007) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf bintang $(K_{1,n})$ dan graf lengkap (K_n), Ahmad, A. dkk. (2011) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada *friendship graph* $(f_{m,n})$ dan *flower graph* (F_n) serta Jeyanthi dan Sudha (2018) menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf roda berkepala ganda (DW_n) dan pada graf buku segitiga *(triangular book graph)* (B_n), yaitu masing-masing $tvs(K_{1,n}) = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$, $tvs(K_n) = 2$, $tvs(f_{m,n}) = \left\lceil\frac{m(n-1)+2}{3}\right\rceil$, $= \left\lceil\frac{2n+2}{5}\right\rceil$, $tvs(DW_n) = \left\lceil\frac{2n+3}{4}\right\rceil$ dan $tvs(B_n) = \left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$.

Teorema 2.6.1 (Nurdin, dkk., 2010) *Misalkan* G *adalah suatu graf terhubung yang mempunyai* n_i *titik berderajat* i $(i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta)$, *dimana* δ *dan* Δ *adalah derajat minimum dan derajat maksimum dari* G, *maka*

$$tvs(G) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1}\right\rceil\right\}$$

Bukti:

Misalkan $t = \max\left\{\left\lceil\frac{\delta+n_\delta}{\delta+1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta+n_\delta+n_{\delta+1}}{\delta+2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta+\sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta+1}\right\rceil\right\}$.

Asumsikan bahwa $t = \left\lceil\frac{\delta+n_\delta+n_{\delta+1}+\cdots+n_r}{r+1}\right\rceil$ untuk suatu r. Karena bobot dari suatu titik tertentu dari G adalah jumlah dari label titik tersebut dan semua label sisi yang terkait dengan titik tersebut, maka bobot titik terkecil pada suatu graf G diantara titik berderajat $\delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, r$ tidak kurang dari $\delta + 1$ dan bobot titik terbesar dari semua titik tersebut tidak kurang dari $\delta + n_\delta + n_{\delta+1} + \cdots + n_r$. Nilai dari k akan minimum jika bobot titik terbesar berada pada titik berderajat r, oleh karena itu nilai minimum dari k tidak kurang dari t. Ini berarti bahwa:

$$tvs(G) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1}\right\rceil, \left\lceil\frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2}\right\rceil, \dots, \left\lceil\frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1}\right\rceil\right\}$$