

**ESTIMASI PARAMETER MODEL SPATIO TEMPORAL  
MENGUNAKAN ALGORITMA EKSPEKTASI-MAKSIMUM**

**SKRIPSI**



**MUH. IDIL ISLAMI**

**H 121 13 007**

**DEPARTEMEN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2020**



**ESTIMASI PARAMETER MODEL SPATIO TEMPORAL  
MENGUNAKAN ALGORITMA EKSPEKTASI-MAKSIMUM**

**SKRIPSI**

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada  
Program Studi Statistika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu  
Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar

**MUH. IDIL ISLAMI**  
**H121 13 007**

**DEPARTEMEN STATISTIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS HASANUDDIN**

**MAKASSAR**

**2020**



Optimization Software:  
[www.balesio.com](http://www.balesio.com)

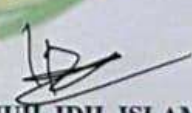
## LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh  
bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

**Estimasi Parameter Model Spatio Temporal Menggunakan Algoritma  
Ekspektasi-Maksimum**

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah  
dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 28 Agustus 2020

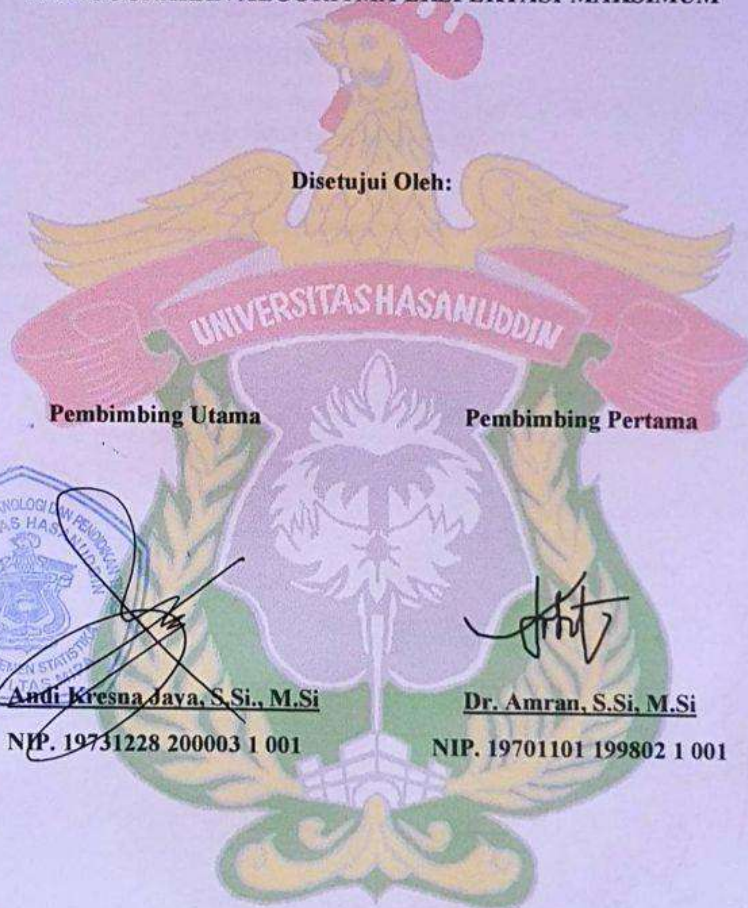
  
**MUH. IDIL ISLAMI**  
NIM. H121 13 007





**ESTIMASI PARAMETER MODEL SPATIO TEMPORAL  
MENGUNAKAN ALGORITMA EKSPEKTASI-MAKSIMUM**

**Disetujui Oleh:**



**Pembimbing Utama**

**Pembimbing Pertama**

Andi Kresna Java, S.Si., M.Si

NIP. 19731228 200003 1 001

Dr. Amran, S.Si, M.Si

NIP. 19701101 199802 1 001

**Pada Tanggal: 28 Agustus 2020**



## LEMBAR PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Muh. Idil Islami  
NIM : H 121 13 007  
Program Studi : STATISTIKA  
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Spatio Temporal Menggunakan Algoritma Ekspektasi-Maksimum

Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

UNIVERSITAS HASANUDDIN

### DEWAN PENGUJI

#### Tanda Tangan

1. Ketua : Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si (.....)
2. Sekretaris : Dr. Amran, S.Si., M.Si (.....)
3. Anggota : Dr. La Podje Talangko, M.Si (.....)
4. Anggota : Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si, M.Si. (.....)

Ditetapkan di : Makassar

: 28 Agustus 2020



## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah *Rabb* semesta alam, shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi Muhammad dan kepada para kerluaga serta sahabat beliau. Alhamdulillah berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul “**Estimasi Parameter Model Spatio Temporal menggunakan Algoritma Ekspektasi-Maksimum**” yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak luput dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-sebesarnya kepada kedua orang tua penulis, Ayahanda **Abd. Manni** dan Ibunda **Rahmatiah** atas didikan dan curahan limpahan kasih sayang, doa dan nasehat yang selalu setia diberikan sedari kecil sampai saat ini kepada penulis. Rasa terima kasih juga penulis ucapkan kepada ketiga kakak **Wiwin, Sisal, dan Pita** yang sangat peduli kepada penulis

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengna penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada:

1. **Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Ibu Dr. Eng. Amiruddin**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si, M.Si**, selaku ketua Departemen Statistika sekaligus sebagai anggota Tim Penguji dalam penulisan tugas akhir ini dan segenap dosen pengajar dan staf Departemen Statistika yang telah membekali ilmu dan kemudahan-kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.

... **Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si**, selaku dosen pembimbing utama dan

... **Dr. Amran, S.Si, M.Si**, selaku dosen pembimbing pertama yang telah





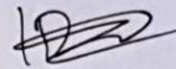
meluangkan waktunya memberikan bimbingan, saran serta meluangkan waktu untuk berdiskusi selama penyusunan tugas akhir ini.

5. **Bapak Dr. La Podje Talangko, M.Si**, selaku penasihat Akademik sekaligus sebagai Anggota Tim Penguji dalam penulisan tugas akhir ini. Terima kasih atas segala masukan, bantuan, basehat serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama menjalani Pendidikan di Departemen Statistika.
6. **Bapak Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si**, selaku Ketua Tim Penguji dan **Bapak Dr. Amran, S.Si, M.Si**, selaku Sekretaris Tim Penguji. Terima kasih telah memberikan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penyusunan tugas akhir ini serta waktu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Teman-temanku di grup “*something*”, **Adji, Atul, Fikri, Niar, Cakke dan Moe’**, yang selalu memberikan motivasi, semangat kepada penulis dengan segala pembahasan yang ada dalam grup.
8. Teman seperjuangan di Departemen Statistika terkhusus **Alim, Irfan, Rahmat, Boy, Fitri, Katrine, Nurwahida, Riska** di satu tahun terakhir ini perjuangan ini dan seluruh **Statistika 2013** yang tidak sempat disebutkan. Terima kasih atas kebersamaannya selama ini.
9. Teman di *wifi* **Iccang, Afif, Mufli, Ulla** dimana banyak masalah terpecahkan ditempat ini. Terima kasih atas kebersamaannya.
10. Teman-teman KKN Posko Desa Laringgi **Mufti, Ici, Maykel, Mita, Uni, Wincu** dan **Tante Timang** yang mempersilahkan penulis tinggal dirumahnya serta **Ambo** yang memberikan banyak pelajaran hidup. Terima kasih atas kenangan dan kebersamaannya di Desa Laringgi, semoga kita masih dipertemukan lagi.
11. Semua pihak yang telah berpartisipasi, baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan tugas akhir ini yang tidak sempat penulis sebutkan satu per satu.



Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam skripsi ini, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga tulisan ini memberikan manfaat untuk pembaca.

Makassar, 28 Agustus 2020



Muh. Idil Islami, S.Si.





**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK  
KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muh. Idil Islami  
NIM : H121 13 007  
Program Studi : Statistika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

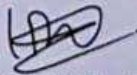
**“Estimasi Model Spatio Temporal menggunakan Algoritma Ekspektasi-  
Maksimum”**

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada tanggal, 28 Agustus 2020

Yang menyatakan,



Muh. Idil Islami, S.Si



## ABSTRAK

Data yang tergantung pada dimensi lokasi dan waktu atau dikenal sebagai data spasial-temporal, umumnya memiliki kompleksitas yang tinggi. Dalam penelitian ini digunakan model spasial-temporal untuk menganalisis pola data spasial-temporal. Kompleksitas hubungan antara variabel dan parameter dalam model spasial-temporal disederhanakan dengan pendekatan hierarki. Estimasi parameter model menggunakan metode Ekspektasi-Maksimisasi (EM). Metode EM tidak memiliki standar eror penaksiran parameter. Untuk mengatasi masalah tersebut dalam penelitian ini digunakan metode bootstrap. Implementasi model spasial-temporal pada data curah hujan di Provinsi Sulawesi Selatan dengan kovariat temperatur dan kelembaban udara menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara curah hujan dengan temperatur dan kelembaban.

Kata Kunci: Model Spasial-Temporal, Kalman Filter, Algoritma Ekspektasi-Maksimisasi, Bootstrap, Curah hujan.



## ABSTRACT

Data which depends on the location and time dimensions, also known as spatial-temporal data, generally has a high complexity. This research uses a spatial-temporal model to analyze the spatial-temporal data patterns. The complexity of the relationship between variables and parameters in the spatial-temporal model is simplified by a hierarchical approach. Estimation of model's parameters uses the Expectation-Maximization (EM) method. The EM method does not have a standard error of parameter estimation. To overcome this problem in this study a bootstrap method was used. The implementation of the spatial-temporal model on rainfall data in South Sulawesi Province with temperature and humidity covariates shows that there is a relationship between rainfall and temperature and humidity..

Keywords: Spatial-Temporal Model, Kalman Filter, Expectation-Maximization Algorithm, Bootstrap, Rainfall



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN .....	ii
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING .....	iii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	viii
ABSTRAK .....	ix
ABSTRACT .....	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	2
1.2 Manfaat Penelitian.....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
1.4 Data Spasial .....	3
2.2 Identitas Gaussian.....	3
2.3 Stasioner .....	6
2.4 Matriks Pembobot Spasial.....	7
2.2 Indeks Moran.....	10
2.4 Proses Markov .....	11
2.2 Proses Spatio-Temporal .....	12
2.2 Model Spatio-Temporal .....	14
Model State-Space.....	15
Estimasi Maksimum <i>Likelihood</i> .....	17
Kalman Filter.....	17





2.10	Algoritma Ekspektasi-Maksimasi (EM).....	18
2.13	Algoritma Newton-Raphson (NR) .....	20
2.10	Bootstrap .....	21
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN</b>		
1.2	Sumber Data .....	22
2.2	Identifikasi Peubah .....	23
1.4	Tahap-Tahap Penelitian.....	23
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>		
1.4	Kalman .....	30
4.1.1	Kalman Filter .....	32
4.1.2	Kalman Smoother.....	38
4.1.3	Lag-One Covariance Smoother.....	42
2.4	Estimasi Model Spatio-Temporal.....	49
4.1.1	Tahap Ekspektasi .....	51
4.1.2	Tahap Maksimum.....	53
2.3	Aplikasi Model Spatio Temporal .....	24
2.4	Simulasi Data .....	25
2.2	Uji Stasioner .....	25
2.4	Uji Autokorelasi Spasial.....	25
4.1.1	Matriks Pembobot Spasial.....	25
4.1.2	Indeks Moran .....	30
2.4	Uji Normalitas Parameter Estimasi .....	64
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b>		
1.2	Kesimpulan.....	70
2.2	Saran.....	71
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>72</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>		<b>74</b>



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Ketetangaan.....	9
Gambar 3.1	Titik Lokasi.....	19
Gambar 4.1	Lokasi observasi.....	61
Gambar 4.2	Plot interval kepercayaan parameter $\beta_0$ .....	66
Gambar 4.3	Plot interval kepercayaan parameter $\beta_1$ .....	66
Gambar 4.4	Plot interval kepercayaan parameter $\beta_2$ .....	67
Gambar 4.5	Plot interval kepercayaan parameter $g$ .....	67
Gambar 4.6	Plot interval kepercayaan parameter $\sigma_\eta^2$ .....	68
Gambar 4.7	Plot interval kepercayaan parameter $\mu_0$ .....	68
Gambar 4.8	Plot interval kepercayaan parameter $\sigma_\omega^2$ .....	69
Gambar 4.9	Plot interval kepercayaan parameter $\sigma_\epsilon^2$ .....	69
Gambar 4.10	Plot interval kepercayaan parameter $\theta$ .....	70
Gambar 4.11	Plot Distribusi QQ.....	71



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Ilustrasi Matriks Ketetangaan.....	9
Tabel 4.1	Data Pengamatan.....	58
Tabel 4.2	Matriks Ketetangaan.....	59
Tabel 4.4	P-value uji Shapiro-Wilk, Standar Error dan Interval Kepercayaan.....	66



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Hasil Uji <i>Augmented Dickley-Fuller</i> (ADF).....	77
Lampiran 2	Syntax index moran.....	78
Lampiran 3	Syntax estimasi parameter.....	80
Lampiran 4	Hasil Bootstrap 500 kali.....	82





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.4 Latar Belakang

Presipitasi adalah peristiwa turunnya uap air dari atmosfer ke permukaan bumi yang berupa kabut, embun, hujan, hujan salju, atau hujan es. Sedangkan menurut Sosrodarsono (1985), presipitasi adalah sebutan umum dari uap yang mengondensasi dan jatuh ke tanah dalam rangkaian proses siklus hidrologi. Uap air yang jatuh berbentuk padat disebut salju (*snow*) dan bentuk cair disebut hujan (*rainfall*). Wilayah Indonesia merupakan daerah tropis, presipitasi yang sering terjadi umumnya berbentuk hujan. Ukuran besarnya hujan yang terjadi dikenal sebagai curah hujan. Pengertian curah hujan ialah jumlah air yang terkumpul di permukaan datar tertentu yang tidak menguap, tidak mengalir dan tidak meresap. Satuan curah hujan ialah milimeter (*mm*).

Dinamika pola curah hujan dapat digambarkan dalam suatu model. Pola curah hujan sangat penting peranannya dalam kegiatan sosial-ekonomi masyarakat. Informasi pola curah hujan dapat digunakan untuk menentukan waktu pelaksanaan kegiatan social-ekonomi yang dapat memberikan keuntungan dan mencegah kerugian yang mungkin terjadi. Oleh karena itu pemahaman tentang pola curah hujan diperlukan dalam rangka untuk mengoptimalkan kegiatan sosial-ekonomi masyarakat. Pola curah hujan dapat dinyatakan dalam model spasial maupun model temporal atau model spasial dan temporal.

Model Spatio-Temporal (ST) adalah model yang merepresentasikan fenomena alam yang diobservasi dalam dimensi spasial dan temporal. Analisis datanya mempertimbangkan dependensi spasial antar wilayah pengamatan dan korelasi satu atau beberapa lag waktu. Observasi secara temporal memiliki kecenderungan yang tidak independen tapi membentuk sebuah runtun waktu. Model ST mulai dikembangkan oleh Bilonick & Nicholas (1983) meneliti data

hujan dengan 3 pendekatan yang berbeda yaitu, pertama fokus pada efek temporal dengan mengabaikan efek spasial, kedua fokus pada efek spasial dengan mengabaikan efek temporal dan analisis spasial temporal.



Analisis temporal digunakan oleh Bilonick dan Nicholas di 22 lokasi stasiun pengukuran New York yang diimplementasi menggunakan data konsentrasi hidrogen, sulfat, nitrat dan kalsium. Konsentrasi yang diukur masing-masing berbentuk data runtun waktu dengan satuan interval ialah bulanan. Model ini bertujuan untuk menentukan *trend* di setiap lokasi menggunakan analisis runtun waktu. Keempat data runtun waktu tersebut dimodelkan menggunakan model Box-Jenkins. Selain itu keempat data tersebut menggunakan analisis spasial yaitu metode kriging berdasarkan model semivariogram *spherical*, dan analisis spasial temporal menggunakan semivariogram spasial temporal.

Goodalla and Mardia (1994) meneliti model spasial-temporal dimana fungsi kovariannya memenuhi sifat *separable* yaitu fungsi kovarian spasial-temporalnya dapat dirumuskan sebagai hasil kali dari dua fungsi yaitu kovariansi spasial dan kovariansi temporal. Jika sifat *seperable* terpenuhi maka model ST dapat dinyatakan sebagai model *state-space*. Model ini telah banyak digunakan diantaranya Mardia (1998), Fassò and Cameletti (2009). Jika parameter model *state-space* diketahui maka lokasi yang tidak diobservasi dapat ditaksir menggunakan Kalman filter dan Kalman smoother (Cressie dan Wikle, 2002). Namun, kenyataannya sering kali parameter model tidak diketahui, sehingga pendekatan yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameternya ialah algoritma ekspektasi-maksimasi (Shumway dan Stoffer, 1982; Xu dan Wikle, 2007). Dalam penelitian ini data presipitasi yang diperoleh dari beberapa titik di Sulawesi Selatan dimodelkan menggunakan model hirarki Spatio-Temporal dengan kovariat adalah temperatur dan kecepatan angin.

### 2.3 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dikaji dalam penulisan tugas akhir ini adalah:

- a. Bagaimana estimasi peubah laten pada model *state space*.
- b. Bagaimanakah aplikasi metode EM untuk mengestimasi parameter model spatio-temporal.

#### Rumusan Masalah

Beberapa hal yang dibatasi pada penelitian ini adalah:



- a. Proses Spatio-Temporal (ST) memenuhi sifat stasioner lemah
- b. Data ST memenuhi sifat *separable*
- c. Proses spasial merupakan *isotropic*
- d. Fungsi kovariansi spasial menggunakan model ekponensial

### 2.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah:

- a. Memperoleh estimasi peubah laten pada model state space.
- b. Menerapkan metode EM pada model spatio-temporal.

### 2.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk menambah pemahaman praktis dan teoritis bagi peneliti dan pembaca mengenai model spatio-temporal.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.3 Data Spasial

Data spasial adalah data yang disajikan dalam posisi geografis dari suatu objek, berkaitan dengan lokasi dalam ruang bumi. Data spasial merupakan suatu data yang besarnya bergantung terhadap lokasi. Data spasial mengindikasikan adanya keterkaitan antara besaran pengukuran dengan lokasi pengukuran. Data spasial merupakan data yang memuat informasi lokasi, dengan nilai observasi di lokasi  $s_i ; i = 1, \dots$ , atau koordinat yang dinyatakan dengan vektor  $s$  (Cressie, 1993).

Analisis spasial dapat dibedakan berdasarkan tipe datanya, yang pertama adalah analisis spasial dengan tipe data diskrit yaitu lokasi dari besaran pengukuran memiliki batas atau sekat yang jelas contohnya jumlah penduduk di suatu daerah dengan batas demografi di daerah tersebut. Kedua adalah analisis spasial dengan tipe data kontinu yaitu besaran pengukuran diperoleh di setiap titik di daerah pengamatan. Analisis yang digunakan untuk data kontinu disebut

Analisis data geostatistika dilakukan untuk menaksis nilai peubah di suatu lokasi yang belum diobservasi ( $s_0$ ). Nilai dari suatu variable yang diamati dapat dinyatakan sebagai peubah acak spasial  $Z(s_i) ; i = 1, \dots, n$  dengan  $s$  merupakan vektor lokasi. Misalkan peubah acak  $X$  didefinisikan sebagai peubah acak spasial  $Z(s)$  di lokasi  $s$  dan peubah acak  $Y$  didefinisikan sebagai peubah acak spasial  $Z(s + h)$  di lokasi  $s + h$  dengan  $h$  merupakan jarak antara  $X$  dan  $Y$ . Jika  $h$  mendekati nol maka pengaruh antara  $X$  dan  $Y$  semakin kuat dan jika  $h$  membesar maka pengaruh  $X$  dan  $Y$  semakin lemah.

#### 2.2 Distribusi Gaussian

Distribusi normal atau distribusi Gaussian univariat memiliki fungsi kepadatan peluang yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$





dengan parameter *mean* ( $\mu$ ) dan variansi ( $\sigma$ ). Sedangkan distribusi Gaussian berdimensi  $n$  dinyatakan sebagai:

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

$$\text{dengan } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan  $\mathbf{y}_1$  adalah sebuah vektor berukuran ( $n_1 \times 1$ ) dengan *mean*  $\mu_1$  dan  $\mathbf{y}_2$  adalah sebuah vektor berukuran ( $n_2 \times 1$ ) dengan *mean*  $\mu_2$  maka matriks varian kovariansya diberikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} E[(\mathbf{y}_1 - \mu_1)(\mathbf{y}_1 - \mu_1)'] & E[(\mathbf{y}_1 - \mu_1)(\mathbf{y}_2 - \mu_2)'] \\ E[(\mathbf{y}_2 - \mu_2)(\mathbf{y}_1 - \mu_1)'] & E[(\mathbf{y}_2 - \mu_2)(\mathbf{y}_2 - \mu_2)'] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}$$

dengan fungsi kepadatan peluang bersamanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{y}_1 - \mu_1) \quad (\mathbf{y}_2 - \mu_2)] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_1 - \mu_1) \\ (\mathbf{y}_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}} \left| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \right|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{y}_1 - \mu_1)' \quad (\mathbf{y}_2 - \mu_2)'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_1 - \mu_1) \\ (\mathbf{y}_2 - \mu_2) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

invers  $\boldsymbol{\Sigma}$  dapat diperoleh melalui dekomposisi blok *lower diagonal upper* (LDU) sebagai berikut:

misalkan

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

agian kiri dan kanan matriks  $\boldsymbol{\Sigma}$  berturut-turut dengan matriks  $\mathbf{J}$  dan  
, diperoleh



$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D}
\end{aligned}$$

Selanjutnya  $\mathbf{D}$  disebut matriks diagonal

misalkan matriks  $\mathbf{A}$  sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned}$$

jadi

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'$$

sehingga  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}')^{-1} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix}$$

minan  $\boldsymbol{\Sigma}$  sebagai



$$\begin{aligned}
|\Sigma| &= |ADA'| \\
&= |A||D||A'| \\
&= |\Sigma_{11} \cdot \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}| \\
&= |\Sigma_{11}| \cdot |\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}|
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}} [|\Sigma_{11}| \cdot |\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}|]^{-\frac{1}{2}} \\
&\exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)' \quad (\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})^{-1} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \\ (\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

**Lemma 1** Misalkan  $\mathcal{G}_y[\boldsymbol{\mu}, \Sigma]$  merupakan fungsi kepadatan peluang Gaussian dengan *mean*  $\boldsymbol{\mu}$  dan kovariansi  $\Sigma$ . Diperoleh hubungan sebagai berikut,

$$\mathcal{G}_z[\mathbf{A}\mathbf{y}, \Sigma] = k_1(\mathbf{z})\mathcal{G}_y[(\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{z}, (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}] \quad 2.1$$

$$\mathcal{G}_y[\mathbf{a}, \mathbf{A}]\mathcal{G}_y[\mathbf{b}, \mathbf{B}] = \mathcal{G}_y[(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}), (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}]\mathcal{G}_a[\mathbf{b}, \mathbf{A} + \mathbf{B}] \quad 2.2$$

Misalkan  $\mathbf{x} = [\mathbf{y}, \mathbf{z}]$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\mu}_z]$  dan  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{bmatrix}$ , maka distribusi

marginalnya adalah

$$\mathbf{y} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_x[\boldsymbol{\mu}, \Sigma] dx = \mathcal{G}_y[\boldsymbol{\mu}_{yy}, \Sigma_{yy}]$$

dan distribusi bersyaratnya adalah

$$\mathbf{y}|\mathbf{z} \sim \frac{\mathcal{G}_x[\boldsymbol{\mu}, \Sigma]}{\mathcal{G}_z[\boldsymbol{\mu}_z, \Sigma_{zz}]} = \mathcal{G}_y[\boldsymbol{\mu}_y - \Sigma_{yz}(\Sigma_{zz})^{-1}(\boldsymbol{\mu}_z - \mathbf{z}), \Sigma_{yy} - \Sigma_{yz}(\Sigma_{zz})^{-1}\Sigma_{zy}]$$



$$E[\mathbf{y}|\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_z] = E[\mathbf{y}]$$

**Lemma 2** Diberikan matriks  $\mathbf{P} > 0$  berukuran  $d \times d$ , matriks  $\mathbf{\Sigma}_e > 0$  berukuran  $k \times k$ , matriks  $\mathbf{K} > 0$  berukuran  $k \times d$ , dimana  $P > 0 \rightarrow \mathbf{a}'\mathbf{P}\mathbf{a} > 0, \forall \mathbf{a} > 0$ , berarti nilai eigen yang positif maka persamaan berikut memenuhi, (Henderson, 1978).

$$(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{K}'\mathbf{\Sigma}_e^{-1}\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{K}'(\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{K}' + \mathbf{\Sigma}_e)^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P}$$

$$(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{K}'\mathbf{\Sigma}_e^{-1}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}'\mathbf{\Sigma}_e^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{K}'(\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{K}' + \mathbf{\Sigma}_e)^{-1}$$

## 2.2 Stasioner

Stasioner adalah kondisi yang menunjukkan tidak terjadinya pertumbuhan dan penurunan data. Artinya, fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak tergantung pada waktu dan varians dari fluktuasi tersebut. Kondisi stasioner terdiri atas dua hal, yaitu stasioner dalam *mean* dan stasioner dalam variansi. Suatu *time series* dikatakan stasioner dalam *mean* jika rata-rata deret data tersebut adalah *invariant* terhadap waktu atau jika tidak ada unsur *trend*, pola musiman dan *jump*.

Kestasioneran data dapat diuji menggunakan uji *Augmented Dickley-Fuller* (ADF). Uji ADF dilakukan untuk mengetahui adanya akar unit. Jika data stasioner maka tidak terdapat akar unit, maupun sebaliknya. Langkah-langkah uji ADF, adalah sebagai berikut:

### 1. Hipotesis

$$H_0 : \delta = 0 \text{ (data } time \text{ series tidak stasioner)}$$

$$H_1 : \delta \neq 0 \text{ (data } time \text{ series stasioner)}$$

### 2. Statistik uji

$$\tau_\delta = \frac{\hat{\delta}}{(SE(\hat{\delta}))}$$

### 3. Kriteria pengujian

Tolak  $H_0$  jika  $|\tau_\delta| \geq |\tau_{n,\alpha}|$  *Dickley-Fuller*, dengan  $\delta$  adalah parameter yang ditaksir,  $n$  adalah jumlah data,  $\alpha$  adalah taraf signifikan dan  $\tau$  adalah konstanta (Kharis, 2014).



## 2.2 Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial merupakan matriks yang menggambarkan hubungan antara satu wilayah dengan wilayah yang lain. Menurut Le Sage (1998), matriks pembobot spasial bersifat simetris berukuran  $(n \times n)$ , dan mempunyai diagonal utama yang selalu bernilai nol. Adapun pembobot dalam bentuk matriks adalah:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

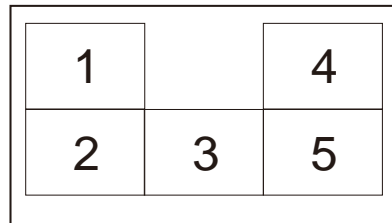
matriks  $W$  berdasarkan hubungan persinggungan batas wilayah (*contiguity*) menyatakan bahwa interaksi spasial terjadi antar wilayah yang bertetangga, yaitu interaksi yang memiliki persinggungan batas wilayah (*common boundary*).

Terdapat beberapa kemungkinan dalam hal pembuatan suatu matriks pembobot, antara lain sebagai berikut:

- a. *Linier contiguity* adalah persinggungan wilayah yang di kanan atau kiri berhubungan langsung dengan wilayah lain yang bertetangga atau bisa disebut sebagai persinggungan tepi.
- b. *Rook contiguity* adalah persinggungan sisi wilayah satu dengan sisi wilayah lain yang bertetangga.
- c. *Bishop contiguity* adalah persinggungan sudut wilayah satu dengan wilayah lain yang bertetangga.
- d. *Queen contiguity* adalah persinggungan sisi maupun sudut wilayah satu dengan lain yang saling bertetangga, atau dengan kata lain perpaduan antara *rook contiguity* dan *bishop contiguity*.

Pada dasarnya, tidak ada teori yang menjelaskan pemilihan matriks pembobot untuk model spasial dependen. Namun, pada penelitian ini, peneliti menggunakan matriks pembobot *rook contiguity*. Berikut adalah ilustrasi pembuatan matriks  $W$  dengan menggunakan *rook contiguity*.





Gambar 2.1 Ilustrasi Ketetangaan

Gambar 2.1 merupakan ilustrasi wilayah sebagai pengamatan pada peta dengan *rook contiguity*. Elemen matriks didefinisikan dengan nilai satu ( $w_{ij} = 1$ ) untuk wilayah yang bersisian dengan wilayah yang menjadi perhatian. Sedangkan wilayah lainnya didefinisikan dengan nilai nol ( $w_{ij} = 0$ ).

**Tabel 2.1 Ilustrasi Matriks Ketetangaan**

Daerah yang menjadi perhatian	Daerah yang bersisian
1	2
2	1,3
3	2,5
4	5
5	3,4

konstruksi matriks *rook contiguity* berdasarkan Gambar 2.1 dan ilustrasi pada tabel 2.1 adalah sebagai berikut:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ yang berdekatan} \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

sehingga diperoleh  $W$  yaitu:





$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

baris dan kolom menyatakan daerah yang ada pada peta. Matriks yang diperoleh akan dibentuk dalam bentuk matriks normalitas dengan menggunakan *row standarization* yang didasarkan pada jumlah tetangga pada satu baris yang sama pada matriks pembobot. Adapun normalisasi matriks *row standarization* atau normalisasi baris dimana jumlah baris dari setiap matriks bernilai satu kemudian dibagi dengan setiap elemen di dalam satu baris dengan total nilai disetiap baris tersebut (Le Sage, 1998).

Normalisasi baris matriks dinotasikan sebagai berikut:

$$\hat{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}} \quad ; i, j = 1, 2, \dots, n \quad 2.3$$

kemudian  $W$  dinormalisasi matriks berdasarkan persamaan 2.3 maka diperoleh matriks pembobot normalisasi baris sebagai berikut:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

#### 2.4 Indeks Moran

Indeks moran paling sering digunakan untuk mengukur autokorelasi spasial global dan mengkuantifikasi kesamaan dari peubah hasil antar wilayah (area) yang didefinisikan sebagai spasial terkait (Pfeiffer, 2008).

Menurut Banerjee (2004) perhitungan autokorelasi spasial menggunakan moran dengan matriks pembobot  $W$  berdasarkan perkalian silang adalah

$$I = \frac{n \sum_i \sum_j w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i \neq j} w_{ij} \sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad 2.4$$



Nilai yang dihasilkan dalam perhitungan Indeks Moran berkisar antara -1 sampai 1. Nilai Indeks Moran bernilai nol mengindikasikan tidak berkelompok. Nilai indeks moran positif mengindikasikan autokorelasi spasial yang positif. Ini berarti bahwa lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang mirip dan cenderung berkelompok. Nilai Indeks Moran yang negatif mengindikasikan autokorelasi spasial negatif, artinya lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda (Pfeiffer dkk, 2008).

Langkah pengujian menggunakan Indeks Moran adalah sebagai berikut :

1. Hipotesis

$H_0$  :  $I = 0$  (tidak ada autokorelasi antar lokasi)

$H_1$  :  $I \neq 0$  (ada autokorelasi antar lokasi)

2. Statistik uji

$$Z(I) = \frac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$$

dimana:

$$E(I) = I_0 = -\frac{1}{1-n}; \quad n \text{ adalah banyaknya lokasi pengamatan}$$

$$Var(I) = \frac{n^2 S_1 - n S_2 + 3 S_0^2}{(n^2 - 1) S_0^2} - [E(I)]^2$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_{ij} + w_{ji})^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} + \sum_{j=1}^n w_{ji} \right)^2$$

3. Kriteria pengujian

Apabila  $|E(I)| > Z_{1-\alpha}$  maka  $H_0$  ditolak.  $Z_{1-\alpha}$  diperoleh dari tabel distribusi normal (Wuryandari, 2014).



## 2.4 Proses Markov

Misalkan  $T$  adalah subset dari  $[0, \infty)$ . Himpunan peubah acak  $\{X_t\}_{t \in T}$  dengan index  $T$  disebut sebagai proses stokastik. Saat  $T = \mathbb{N}$  (atau  $T = \mathbb{N}_0$ ),  $\{X_t\}_{t \in T}$  disebut proses stokastik dengan waktu diskrit, dan saat  $T = [0, \infty)$ , disebut proses stokastik dengan waktu kontinu. Proses stokastik didefinisikan sebagai proses menyusun dan mengindeks sekumpulan peubah acak  $\{X_t, t \geq 0\}$ , dengan indeks  $t$  berada pada sekumpulan  $T$ , sehingga  $T$  dinamakan ruang parameter atau ruang indeks  $\forall t \in T$ , dengan  $t$  merupakan bilangan bulat tak negatif yang merepresentasikan karakteristik terukur yang diperhatikan pada waktu  $t$ .

Himpunan peubah acak  $X_t$  pada proses stokastik menggambarkan keadaan (*state*) sistem pada waktu  $t$ . *State* merupakan posisi keadaan yang akan ditentukan klasifikasinya. Misalkan  $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots, T\}$  adalah barisan peubah acak dengan ruang *state* himpunan bilangan berhingga (*finite*). Jika  $X_t = x, x \in \mathbb{N}$ , maka dapat dikatakan bahwa proses tersebut pada waktu  $t$  berada pada *state*  $x$  (Zucchini & Mac Donald, 2009).

Proses Markov adalah proses stokastik yang mempunyai sifat bahwa jika nilai  $X_t$  telah diketahui, maka  $X_{t+1}$  tidak dipengaruhi oleh  $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1\}$ . Dengan kata lain, Proses Markov merupakan fenomena dimana kejadian masa datang hanya dipengaruhi oleh masa sekarang dan tidak dipengaruhi masa lalu (Zucchini & Mac Donald, 2009).

$$P(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1) = P(X_{t+1} | X_t)$$

Definisi tersebut dapat diinterpretasikan bahwa untuk suatu rantai Markov, sebaran bersyarat dari sembarang keadaan yang akan datang  $\{X_{t+1}\}$  dengan syarat keadaan pada masa lalu  $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1\}$  dan keadaan sekarang  $X_t$ , adalah bebas terhadap semua keadaan yang lalu dan hanya bergantung dari keadaan sekarang didefinisikan  $X_t$  sebagai kejadian  $\{X_1, \dots, X_t\}$ . Sehingga dapat ditulis sebagai berikut (Zucchini & Mac Donald, 2009):

$$P(X_{t+1} | \mathbf{X}_t) = P(X_{t+1} | X_t)$$



Jika  $T = G$  adalah lokasi geografis, proses stokastik disebut runtun waktu spasial, sedangkan jika  $\{N, G\}$  dikenal istilah runtun waktu Spatio-Temporal (Rosadi, 2014).

#### 2.4 Proses Spatio-Temporal

Proses Spatio-Temporal  $z(s; t)$  yang terjadi dalam waktu  $t \in T$  di setiap lokasi  $s \in D(t)$  dinyatakan sebagai

$$\{z(s; t): s \in D(t), t \in T\} \quad 2.5$$

dengan domain waktu  $T \subset \mathbb{R}$  dan domain spasial yang tergantung waktu  $D(t) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $t \in T$ . diasumsikan sebagai suatu sampel proses stokastik sehingga

$$\{z(x; t): x \in D(t), t \in T\} \quad 2.6$$

**Definisi 2.1** (Stasioner lemah) Jika proses 2.6 memenuhi:

1.  $E\{Z(x, t)\} = \mu$ ,
2.  $cov\{Z(x + h, t + u), Z(x, t)\} = C(h, u) < \infty$  dimana  $h \in \mathbb{R}^d; u \in \mathbb{R}$

maka proses 2.6 adalah suatu proses spasio temporal stasioner lemah

Proses ST yang memenuhi definisi 2.6 sering disebut juga sebagai suatu proses ST stasioner orde dua. Kovariansi  $Z$  stasioner orde dua, hanya bergantung pada vektor jarak  $(h + u)$ . Misalkan  $s = (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Jika  $Z(s)$  stasioner order dua maka  $Cov\{Z(s_1), Z(s_2)\} = C(s_2 - s_1)$ , dimana  $C(\cdot)$  definit positif dan terdefinisi pada  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Stasioner lemah menggambarkan sifat *invariant* terhadap pergeseran.

**Definisi 2.2** (Stasioner kuat). Suatu proses  $Z(s)$  dikatakan stasioner kuat, jika semua fungsi distribusi (dimensi hingga) ialah *invariant* terhadap pergeseran, yaitu untuk suatu  $N$  dan domain  $D \times T$ , dengan  $\{s, s_1, \dots, s_N\} \in D \times T$  dan  $\{z_1, \dots, z_N\} \in \mathfrak{R}$ , berlaku.

$$P(Z(s_1 + s) \leq z_1, \dots, Z(s_N + s) \leq z_N) = P(Z(s_1) \leq z_1, \dots, Z(s_N) \leq z_N) \quad 2.7$$

la pembahasan selanjutnya digunakan istilah stasioner orde dua sebagai lemah



**Definisi 2.3** (Separabilitas). Jika kovariansi proses 2.8 dapat dituliskan sebagai

$$\text{Cov}\{Z(s_1), Z(s_2)\} = \text{Cov}\{Z(x_1, t_1), Z(x_2, t_2)\} = C_S(x_1, x_2)C_T(t_1, t_2) \quad 2.8$$

dengan  $C_S(\cdot)$  ialah kovariansi spasial dan  $C_T(\cdot)$  ialah kovariansi temporal, maka kovariansi dikatakan *separable*.

Selanjutnya proses ST disebut proses Spatio-Temporal separabel (PSTS). Jika data PSTS dituliskan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$Z = (Z(x_1, t_1), \dots, Z(x_n, t_1), \dots, Z(x_1, t_m), \dots, Z(x_n, t_m))' \quad 2.9$$

Maka matriks kovariansi PSTS dapat dituliskan sebagai hasil perkalian Kronecker dari matriks kovariansi spasial dan matriks kovariansi temporal,

$$\Sigma = \Sigma_S \otimes \Sigma_T, \quad 2.10$$

Matriks kovariansi separabel membuat proses komputasi menjadi lebih sederhana karena invers  $\Sigma$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$(\Sigma)^{-1} = (\Sigma_S \otimes \Sigma_T)^{-1} = (\Sigma_S)^{-1} \otimes (\Sigma_T)^{-1}, \quad 2.11$$

dan determinannya sebagai berikut:

$$|\Sigma| = |\Sigma_S \otimes \Sigma_T| = |\Sigma_S|^{n_s} \otimes |\Sigma_T|^{n_T} \quad 2.12$$

Dengan  $n_s$  dan  $n_T$  masing-masing adalah banyaknya lag spasial dan lag temporal. Dari definisi 2.3, diketahui bahwa suatu proses separabel dapat dikategorikan stasioner atau tidak stasioner. Jika suatu proses spasial temporal adalah separabel dan stasioner, maka berlaku

$$\text{Cov}\{Z(x_1, t_1), Z(x_2, t_2)\} = C_S(x_1 - x_2)C_T(t_1 - t_2) = C_S(h) \cdot C_T(u), \quad 2.13$$

dimana  $h = x_1 - x_2$  dan  $u = t_1 - t_2$ .

Ini berarti bahwa, sepasang *time series* dengan jarak spasial  $u$  ialah stasioner dan mempunyai struktur yang sama, dan juga sepasang proses spasial berjarak  $h$  ialah stasioner dan mempunyai pola yang sama. (Amran, 2011)



## 2.4 Model Spatio-Temporal

Model Spatio-Temporal yang digunakan dalam penelitian ini mengadopsi model yang diteliti oleh Fassò and Cameletti (2017). Misalkan  $Z(s, t)$  adalah proses Spatio-Temporal yang diamati pada waktu  $t$  di lokasi  $s$  dan  $Z_t = \{Z(s_1, t), \dots, Z(s_n, t)\}$  merupakan dataset pada waktu  $t$  sebanyak  $n$  lokasi  $s_1, \dots, s_n$ . Misalkan  $Y_t = \{Y_1(t), \dots, Y_p(t)\}$  adalah vektor berdimensi  $p$  dari proses temporal yang tidak terobservasi pada waktu  $t$  dengan  $p \leq n$ . Prosedur penaksiran parameter untuk  $t = 1, \dots, T$  dilakukan 3 tahap sebagai berikut:

$$Z_t = U_t + \varepsilon_t \quad 2.14$$

dimana,

$U_t$  : Versi smooth dari proses Spatio-Temporal  $Z_t$

$\varepsilon_t$  : eror *measurement*

$$U_t = X_t \beta + K Y_t + \omega_t \quad 2.15$$

dimana,

$U_t$  : proses Spatio-Temporal yang tidak teramati

$X_t$  : matriks kovariat yang diamati pada waktu  $t$  di lokasi  $n$

$\beta$  : parameter regresi

$Y_t$  : proses latent temporal dengan lokasi konstan

$K$  : matriks pembobot dari  $Y_t$  untuk setiap lokasi spasial  $s_i, i = 1, \dots, n$

$\omega_t$  : eror model

$$Y_t = G Y_{t-1} + \eta_t \quad 2.16$$

dimana,

$Y_t$  : proses *autoregressive* berdimensi  $p$

$G$  : matriks transisi

$\eta_t$  : eror inovasi

ga komponen eror  $\varepsilon_t, \omega_t, \eta_t$  masing-masing independen sepanjang waktu  
penden satu sama lain dengan *mean* nol.  $\varepsilon_t$  merupakan proses *white noise*  
matriks varian kovarian diberikan oleh  $\sigma_\varepsilon I_n$ , dimana  $I_n$  adalah matriks





identitas berukuran  $n \times n$ .  $\sigma_\varepsilon^2$  dianggap konstan sepanjang ruang dan waktu pada wilayah homogen.  $\eta_t$  merupakan proses *white noise* Gaussian berdimensi  $p$  dengan matriks varian kovarian  $\Sigma_\eta$  dan komponen error  $\omega_t$  pada persamaan 2.17 adalah proses spasial Gaussian berdimensi  $n$  dengan matriks varian kovarian diberikan oleh fungsi kovariansi spasial dengan waktu konstan:

$$\text{Cov}[\omega(s, t), \omega(s', t)] = \sigma_\omega^2 C_\theta(h) \quad 2.17$$

dengan  $h = \|s - s'\|$  adalah jarak Euclidean antara lokasi  $s$  dan  $s'$ . Karena fungsi kovariansi hanya bergantung di  $h$ , maka proses spasial tersebut stasioner order-2 dan *isotropic* artinya struktur korelasi spasial sama disemua arah, dalam kasus ini fungsi kovariansi hanya bergantung pada jarak  $h$  bukan arahnya. Fungsi  $C_\theta(h)$  bergantung pada parameter  $\theta$  yang diestimasi dan kontinu di  $h = 0$  dengan  $\lim_{h \rightarrow \infty} C_\theta(h) = 1$ . Salah satu model fungsi kovariansi adalah eksponensial diberikan sebagai berikut:

$$C_\theta(h) = \exp(-\theta h) \quad 2.18$$

## 2.4 Model State-Space

Substitusi persamaan 2.15 ke 2.14 akan didapatkan model hirarki 2 tahap sebagai berikut:

$$\begin{matrix} \mathbf{Z}_t & = & \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} & + & \mathbf{K} \mathbf{Y}_t & + & e_t \\ (d \times 1) & & (d \times r)(r \times 1) & & (d \times p)(p \times 1) & & d \times 1 \end{matrix} \quad 2.19$$

$$\begin{matrix} \mathbf{Y}_t & = & \mathbf{G} \mathbf{Y}_{t-1} & + & \eta_t \\ (p \times 1) & & (p \times p)(p \times 1) & & p \times 1 \end{matrix} \quad 2.20$$

yang disebut model *state-space* (Durbin dan Koopman, 2001), dimana persamaan 2.19 adalah persamaan *measurement* dan 2.20 adalah persamaan *state*. Jika semua parameter diketahui maka proses temporal yang tidak terobservasi  $Y_t$  untuk setiap waktu  $t$  dapat diestimasi menggunakan Kalman filter dan Kalman smoother dengan nilai awal  $Y_0$  diberikan oleh vektor Gaussian yang berdimensi  $p$  dengan *mean*  $\mu_0$

matriks varian kovarian  $\Sigma_0$ . Parameter  $\mu_0$  dan  $\Sigma_0$  merupakan nilai awal yang digunakan dalam algoritma Kalman filter

Pada persamaan 2.20 merupakan sebuah proses Markov sehingga:



$$p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{Y}_{t-2}, \dots, \mathbf{Y}_1) = p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \quad 2.21$$

artinya kejadian masa datang hanya dipengaruhi oleh kejadian masa sekarang dan tidak dipengaruhi masa lalu. Masing-masing komponen error *state* dan *measurement* diasumsikan sebagai proses *white noise* sehingga (Welling, 2010).

$$e_t \sim \mathcal{G}(0, \Sigma_e)$$

dimana,  $\Sigma_e = \sigma_\omega^2 \Gamma(\|s_i - s_j\|) ; i, j = 1, \dots, n$  dengan

$$\Gamma(h) = \begin{cases} 1 + \gamma & h = 0 \\ C_\theta(h) & h > 0 \end{cases}$$

dan  $\gamma = \sigma_\epsilon^3 / \sigma_\omega^2$

$$\eta_t \sim \mathcal{G}(0, \Sigma_\eta)$$

vektor error  $e_t$  dan  $\eta_t$  juga diasumsikan tidak berkorelasi dengan *state*  $\mathbf{Y}_t$  dan juga *measurement*  $\mathbf{Z}_t$  sehingga:

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_t, e_k) = 0 ; \forall t, \quad 2.22$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_t, \eta_k) = 0 ; \forall t \leq k \quad 2.23$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}_t, e_k) = 0 ; \forall t \leq k - 1 \quad 2.24$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}_t, \eta_k) = 0 ; \forall t \leq k \quad 2.25$$

$$\text{Cov}(e_k, \eta_k) = 0 ; \forall t, k \quad 2.26$$

$$\text{Cov}(e_k, e_k) = \begin{cases} 0, & t \neq k \\ \Sigma_e, & t = k \end{cases} \quad 2.27$$

$$\text{Cov}(\eta_k, \eta_k) = \begin{cases} 0, & t \neq k \\ \Sigma_\eta, & t = k \end{cases} \quad 2.28$$

## 2.10 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Misalkan dimiliki fungsi kepadatan peluang  $p(\mathbf{z} | \Psi)$  dengan parameter  $\Psi$  dan

n data berukuran  $T$  yaitu  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_T\}$  dimana masing-masing

data tersebut saling independen dengan distribusi  $p$  yang sama maka fungsi

peluang sampelnya adalah (Bilmes, 1998).



$$p(\mathbf{Z}|\Psi) = \prod_{t=1}^T p(\mathbf{z}_t|\Psi) = L(\Psi|\mathbf{Z}) \quad 2.29$$

$L(\Psi|\mathbf{Z})$  merupakan *likelihood* dari parameter diberikan oleh data.

Turunan fungsi *likelihood*, biasanya sulit dicari maka yang dilakukan adalah menentukan nilai maksimum dari logaritma natural fungsi *likelihood* tersebut atau disebut dengan fungsi *log-likelihood*. Bentuk distribusi peluang  $p(\mathbf{z}|\Psi)$  menentukan sulit tidaknya  $\Psi$  diestimasi. Contohnya, jika  $p(\mathbf{z}|\Psi)$  merupakan distribusi Gaussian univariat dimana  $\Psi = (\mu, \sigma^2)$  maka estimasi parameternya dilakukan dengan menurunkan *log-likelihood* masing-masing terhadap  $\mu$  dan  $\sigma^2$  dan menyamakannya dengan nol. Namun, sering ditemukan, solusi *log-likelihood* tidak dapat diselesaikan dengan analitik sehingga harus menggunakan numerik seperti yang dikerjakan oleh Bartolucci pada tahun 2012 dimana estimasi parameter model dengan data tidak lengkap dilakukan dengan algoritma EM.

### 2.13 Kalman Filter

Kalman Filter pertama kali diperkenalkan oleh Rudolp Kalman pada tahun 1960. Kalman filter terdiri dari sejumlah persamaan untuk menaksir *state* dari suatu proses dengan cara mengasimilasi informasi terbaru yang diperoleh. Informasi baru diperoleh setelah kita melakukan pengamatan terhadap peubah *state* dari proses (Vazquez & Syversveen, 2006).

Kalman filter adalah sebuah algoritma untuk memproses data rekursif optimal yang sederhana (*optimal recursive data processing algorithm*). Salah satu alasan mengapa Kalman filter optimal karena Kalman filter memasukkan semua informasi yang disediakan yaitu memproses semua pengamatan yang ada, dengan memperhatikan ketelitiannya untuk menduga nilai dari peubah penting, deskripsi statistik dari gangguan sistem dan semua informasi yang tersedia mengenai kondisi awal dari peubah-peubah penting (Maybeck, 1979).

### Algoritma Ekspektasi-Maksimasi (EM)

Algoritma ini dapat dua kegunaan utama dari algoritma EM, pertama untuk memperoleh parameter dari sebuah data. Kedua digunakan saat penyelesaian fungsi *likelihood*



secara analitik tidak dapat dilakukan sehingga digunakan EM dengan mengasumsikan keberadaan parameter yang hilang atau tersembunyi.

Pada persamaan 2.29 data  $\mathbf{Z}$  diasumsikan berasal dari sebuah distribusi dimana  $\mathbf{Z}$  dianggap data yang tidak lengkap dan asumsikan terdapat himpunan data lengkap  $\bar{\mathbf{Z}} = (\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$  dengan fungsi kepadatan peluang bersama (Bilmes, 1998):

$$p(\mathbf{z}|\Psi) = p(\mathbf{z}, \mathbf{y}|\Psi) = p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \Psi)p(\mathbf{z}|\Psi) \quad 2.30$$

fungsi 2.30 dibentuk dari fungsi kepadatan marginal  $p(\mathbf{z}|\Theta)$ , maka dapat didefinisikan fungsi *likelihood* baru yang disebut *likelihood* data lengkap

$$p(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}|\Psi) = L(\Psi|\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) = L(\Psi|\bar{\mathbf{Z}}) \quad 2.31$$

fungsi *likelihood* data lengkap tersebut merupakan peubah acak dengan  $\mathbf{Z}$ ,  $\Theta$  konstan dan  $\mathbf{Y}$  tidak diketahui yang diasumsikan berasal dari suatu distribusi.

Model *State-Space* terdiri dari himpunan  $\mathbf{Z}_t$  dari data yang diamati, peubah laten  $\mathbf{Y}_t$  yang tidak teramati atau data yang hilang, dan vektor parameter  $\Psi$  yang tidak diketahui, serta fungsi *likelihood*  $L(\Psi; \mathbf{Z}_t, \mathbf{Y}_t) = p(\mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t|\theta)$ . Estimasi maksimum *likelihood* (MLE) dari parameter yang tidak diketahui ditentukan oleh *likelihood* marjinal dari data yang diamati dengan persamaan 2.32 sebagai berikut (Bilmes, 1998):

$$L(\Psi; \mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t) = p(\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t|\Psi) = \prod p(\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t|\Psi) \quad 2.32$$

namun jumlahan ini sulit dilakukan sehingga untuk mengatasinya digunakan algoritma EM.

Algoritma EM bekerja dengan mendapatkan MLE dari marjinal *likelihood*, secara iteratif menerapkan dua tahap berikut:

#### 1. Tahap-E

Menghitung nilai ekspektasi bersyarat dari fungsi *log-likelihood*, sehubungan dengan distribusi bersyarat dari  $\mathbf{Y}_t$  jika diketahui  $\mathbf{Z}_t$  dibawah estimasi parameter saat ini  $\Psi^{(k)}$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$Q(\Psi|\Psi^{(k)}) = E[\ln L(\Psi; \mathbf{z}_t, \mathbf{y}_t)|\mathbf{z}_t, \Psi^{(g)}]$$

#### Tahap-M



Tahap-M menemukan parameter yang memaksimalkan kuantitas di bawah ini:

$$\Psi^{(k+1)} = \underset{\Psi}{\operatorname{argmax}} Q(\Psi|\Psi^{(k)})$$

Algoritma EM bekerja dengan meningkatkan  $Q(\Psi|\Psi^{(k)})$  seiring meningkatnya iterasi. Untuk setiap peluang  $Y$  tak nol,  $p(Y|Z, \Psi)$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$= \ln p(Z|\Psi) = \ln p(Z, Y|\Psi) - \ln p(Y|Z, \Psi)$$

mengambil ekspektasi terhadap  $Y$  dan parameter  $\Psi^{(k)}$  dengan mengalikan kedua sisi dengan  $p(Y|Z, \Psi^{(k)})$  dan mengintegrasikan terhadap  $Y$  diperoleh,

$$\begin{aligned} &= \int_Y p(Y|Z, \Psi^{(k)}) p(Z|\Psi) = \int_Y p(Y|Z, \Psi^{(k)}) \ln p(Z, Y|\Psi) \\ &\quad - \int_Y p(Y|Z, \Psi^{(k)}) \ln p(Y|Z, \Psi) \\ &= E_Y[\ln p(Z|\Psi)] = E_Y[\ln p(Z, Y|\Psi)] - E_Y[\ln p(Y|Z, \Psi)] \\ &\quad \ln p(Z|\Psi) = E_Y[\ln p(Z, Y|\Psi^{(k)})] - E_Y[\ln p(Y|Z, \Psi^{(k)})] \\ &\quad \ln p(z|\Psi) = E_Y[\ln p(z, Y|\Psi)] - E_Y[\ln p(Y|z, \Psi)] \end{aligned}$$

misalkan,

$$\begin{aligned} Q(\Psi|\Psi^{(k)}) &= E_Y[\ln p(z, Y|\Psi)] \\ H(\Psi|\Psi^{(k)}) &= -E_Y[\ln p(Y|z, \Psi)] \end{aligned}$$

maka,

$$= \ln p(z|\Psi) = Q(\Psi|\Psi^{(k)}) + H(\Psi|\Psi^{(k)})$$

untuk  $\Psi = \Psi^{(k)}$  diperoleh,

$$\ln p(z|\Psi^{(k)}) = Q(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)}) + H(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)})$$



$$\ln p(\mathbf{z}|\Psi) - \ln p(\mathbf{z}|\Psi^{(k)}) = Q(\Psi|\Psi^{(k)}) + H(\Psi|\Psi^{(k)}) \\ - [Q(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)}) + H(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)})]$$

$$\ln p(\mathbf{z}|\Psi) - \ln p(\mathbf{z}|\Psi^{(k)}) \\ = Q(\Psi|\Psi^{(k)}) - Q(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)}) + H(\Psi|\Psi^{(k)}) - H(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)})$$

dengan pertidaksamaan Jensen diketahui  $H(\Psi|\Psi^{(k)}) \geq H(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)})$  sehingga disimpulkan,

$$\ln p(\mathbf{z}|\Psi) - \ln p(\mathbf{z}|\Psi^{(k)}) \geq Q(\Psi|\Psi^{(k)}) - Q(\Psi^{(k)}|\Psi^{(k)})$$

artinya dengan memilih  $\Psi$  yang memaksimalkan fungsi  $Q(\Psi|\Psi^{(k)})$  sehingga membuat fungsi  $\ln p(\mathbf{z}|\Psi)$  maksimal. (Little & Rubin, 1987)

## 2.10 Algoritma Newton-Raphson (NR)

Estimasi dengan metode Newton-Raphson merupakan metode iteratif untuk menemukan akar-akar persamaan fungsi yang diturunkan, untuk menyelesaikan persamaan secara iteratif seperti persamaan *likelihood* yang mencari lokasi yang memaksimalkan suatu fungsi. Metode ini memiliki laju konvergensi kuadratik, sehingga metode ini lebih cepat untuk konvergen menuju akar pendekatan daripada metode lain yang memiliki laju konvergensi linear. (Rochmad, 2013)

Format iteratif dari metode ini adalah:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - (D^k)^{-1}G^{(k)}$$

dengan :

$\hat{\theta}^{(k)}$  : parameter taksiran pada iterasi ke- $k$

$\hat{\theta}^{(k+1)}$  : parameter taksiran pada iterasi ke- $k + 1$

$G^{(k)}$  : turunan pertama fungsi *likelihood*, sehingga entri dari  $G^{(k)}$  adalah  $\frac{\partial l}{\partial \theta^i}$

$D^k$  : turunan kedua fungsi *likelihood*, sehingga entri dari  $D^k$  adalah  $\frac{\partial^2 l}{\partial (\theta^i)^2}$

lakukan sampai didapatkan nilai yang konvergen  $\hat{\theta}^{(k+1)} \cong \hat{\theta}^{(k)}$





## 2.10 Bootstrap

Metode bootstrap adalah metode dengan konsep sampel bootstrap. Misalkan peubah acak  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  memiliki peluang  $1/n$  untuk setiap  $x_i$  dengan distribusi empirik  $\hat{F}$ . Sampel bootstrap didefinisikan sebagai sampel acak dengan ukuran  $n$  yang diambil dari  $\hat{F}$ , sehingga diperoleh  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

$$\hat{F} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

notasi  $\star$  pada  $\mathbf{x}^*$  mengindikasikan versi *resample* dari peubah acak  $\mathbf{x}$  bukan data observasi  $\mathbf{x}$  atau data bootstrap  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  dapat dikatakan sebagai sampel acak dengan ukuran  $n$  yang diambil dengan pengembalian dari sebuah populasi sebanyak  $n$  objek  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sehingga pada saat dilakukan *resample* mungkin saja diperoleh  $x_1^* = x_7, x_2^* = x_3, x_2^* = x_3, x_3^* = x_3, x_4^* = x_{22}, \dots, x_n^* = x_7$  (Efron & J. Tibshirani, 1993).

