

**CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM
MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL
BERHINGGA**

SKRIPSI



RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG

H011181012

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

FEBRUARI 2022

**CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM
MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL
BERHINGGA**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG

H011181012

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

FEBRUARI 2022

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM : H011181012
Program Studi : MATEMATIKA
Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulis saya berjudul:

**Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil
Berhingga**

adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa skripsi yang saya tulis ini benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 4 Februari 2022



Rayhand Rafael Wongady Sosang

H011181012

**CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS
BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA**



4 Februari 2022

HALAMAN PENGESAHAN

CIRI-CIRI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS BARISAN BILANGAN RIIL BERHINGGA

Disusun dan diajukan oleh

RAYHAND RAFAEL WONGADY SOSANG

H011181012

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 4 Februari 2022 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama



Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.

NIP. 196808031992021001

Pembimbing Pertama



Dra. Nur Erawaty, M.Si.

NIP. 196909121993032001

Ketua Program Studi Matematika



Prof. Dr. Nurdin, S.Si, M.Si

NIP. 197008072000031002



HALAMAN PENGESAHAN


Skripsi ini diajukan oleh


Nama : Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM : H011181012
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Ketua : Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. ()

Sekretaris : Dra. Nur Erawaty, M.Si. ()

Anggota : Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. ()

Anggota : Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. ()

Ditetapkan di : Makassar
Tanggal : 4 Februari 2022

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “**Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil Berhingga**”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan hingga pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang tulus kepada:

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr Eng Amiruddin, S.Si., M.Si.** Selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika serta segenap dosen pengajar dan staf Departemen yang telah membekali ilmu dan memberikan kemudahan-kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama dan Ibu **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku dosen pembimbing pertama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** selaku penasehat akademik sekaligus anggota penguji dan Bapak **Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.** selaku anggota penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Bapak **Saharuddin Sosang** dan Ibu **Mince** selaku orang tua penulis yang telah mendidik, memotivasi, mendukung, dan mendoakan penulis serta

George Gabriel Wongady Sosang dan **Claudya Angela Wongady Sosang**
selaku adik kandung penulis.

7. Teman-teman seperjuangan Matematika 2018 yang banyak membantu selama perkuliahan sampai dalam penyusunan skripsi ini.
8. Kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis senantiasa mengharapkan kritik dan saran yang dapat membantu dalam penyempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan memberi kontribusi untuk ilmu pengetahuan.

Makassar, 4 Februari 2022



Rayhand Rafael Wongady Sosang

**PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK
KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Rayhand Rafael Wongady Sosang
NIM : H011181012
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**Ciri-Ciri Pusat Gelanggang Polinom Miring Atas Barisan Bilangan Riil
Berhingga**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini, saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar Pada tanggal 4 Februari 2022

Yang menyatakan,



Rayhand Rafael Wongady Sosang

ABSTRAK

Dimisalkan R merupakan sebuah gelanggang dengan elemen satuan, σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang pada R , dan δ merupakan suatu σ -derivatif. Gelanggang polinom miring atas R dengan peubah tak diketahui x disimbolkan dengan $R[x; \sigma, \delta]$ memiliki aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ yang menyebabkan gelanggang ini menjadi nonkomutatif. Meskipun gelanggang polinom miring nonkomutatif, namun di dalamnya terdapat suatu himpunan bagian yang anggotanya komutatif dengan setiap anggota gelanggang polinom miring lainnya yang dikenal sebagai pusat.

Di dalam penelitian ini akan ditemukan pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil. Langkah pertama dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi gelanggang barisan bilangan riil berhingga yang disimbolkan dengan R^S dan menemukan σ dan δ pada R^S . Setelah itu dengan menggunakan R^S bersama dengan σ dan δ untuk mengkonstruksi gelanggang polinom miring atas R^S yang dinotasikan dengan $R^S[x; \sigma, \delta]$. Kemudian akan ditentukan rumus $x^k a$ dengan $a \in R^S$ yang akan digunakan untuk memudahkan tahap selanjutnya yaitu menentukan pusat dari $R^S[x; \sigma, \delta]$.

Kata Kunci: Pusat, Gelanggang Polinom Miring, Barisan Bilangan Riil Berhingga, Hasil Kali Cauchy.

ABSTRACT

Let R be a ring with unity, σ be a ring endomorphism on R , and δ be a σ -derivative on R . Skew polynomial ring over R with indeterminate x denoted by $R[x; \sigma, \delta]$ has multiplication rule $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ that caused this ring to become noncommutative. Even though the skew polynomial ring is noncommutative, there is a subset inside the skew polynomial ring with its elements commutative with other elements of the skew polynomial rings known as a center.

In this research, the center of the skew polynomial ring over finite sequence of real numbers will be determined. The first step in this research is to construct the ring of finite sequence of real numbers which is denoted by R^S and find σ and δ on R^S . Afterward with using R^S together with σ and δ to construct the skew polynomial ring over R^S which is denoted by $R^S[x; \sigma, \delta]$. Then the formula of $x^k a$ with $a \in R^S$ will be determined which will be used to facilitate the next step, which is to determine the center of $R^S[x; \sigma, \delta]$.

Keywords: Center, Skew Polynomial Ring, Finite Sequence of Real Number, Cauchy Product.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN KEOTENTIKAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	vi
PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	viii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Batasan Masalah.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Operasi Biner.....	5
2.2 Grup.....	5
2.3 Gelanggang.....	6
2.4 Homomorfisma Gelanggang	7
2.5 Gelanggang Polinom Miring.....	9

2.6	Barisan.....	12
BAB III METODOLOGI PENELITIAN		15
3.1	Metode Penelitian.....	15
3.2	Lokasi dan Waktu Penelitian.....	15
3.3	Prosedur Penelitian.....	15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		17
4.1	Gelanggang Barisan Bilangan Riil Berhingga	17
4.2	Endomorfisma Gelanggang σ dan δ (σ -Derivatif) pada $(R^S, +, *)$	26
4.3	Gelanggang Polinom Miring atas Gelanggang $(R^S, +, *)$	33
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		84
5.1	Kesimpulan.....	84
5.1	Saran.....	85
DAFTAR PUSTAKA		86

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah penelitian, tujuan, batasan masalah, dan manfaat dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Dalam aljabar abstrak atau sering juga disebut sebagai aljabar modern dipelajari mengenai struktur aljabar seperti grup, gelanggang, dan lainnya. Di dalam grup dibahas mengenai sebuah himpunan yang dipasangkan dengan suatu operasi biner, sedangkan di dalam gelanggang dibahas mengenai sebuah himpunan yang dipasangkan dengan dua buah operasi biner. Dua operasi biner yang umum digunakan pada gelanggang berupa operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian (\cdot).

Pada teori gelanggang dikenal konsep gelanggang komutatif, yaitu gelanggang yang setiap operasi perkalian dua anggota gelanggang tersebut bersifat komutatif (Shahriari, 2017). Apabila terdapat operasi perkalian dua anggota gelanggang yang tidak bersifat komutatif, maka gelanggang tersebut disebut dengan gelanggang nonkomutatif. Salah satu contoh gelanggang nonkomutatif adalah gelanggang polinom miring yang diperkenalkan pertama kali oleh Ore pada tahun 1933. Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang berbasis himpunan polinom-polinom yang operasi perkaliannya tidak komutatif. Aturan perkalian pada gelanggang polinom miring adalah $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, di mana σ merupakan endomorfisma gelanggang dan δ merupakan σ -derivatif. Gelanggang polinom miring dengan tumpuan gelanggang R disertai dengan σ dan δ disimbolkan dengan $R[x; \sigma, \delta]$.

Salah satu contoh pengaplikasian gelanggang polinom miring adalah di bidang teori koding oleh Siap, Abualrub, Aydin, dan Seneviratne (2011). Dalam jurnalnya yang berjudul “*Skew Cyclic Codes of Arbitrary Length*”, gelanggang polinom miring dimanfaatkan untuk mempelajari kode siklik miring dengan

panjang sembarang yang merupakan jenis khusus dari kode linear yang dikonstruksi menggunakan gelanggang polinom miring.

Gelanggang tumpuan sangat penting dalam mengkaji gelanggang polinom miring, sehingga banyak penelitian mengenai gelanggang polinom miring dengan berbagai macam gelanggang tumpuan. Seperti oleh Akalan, Aydoğdu, Marubayashi, Saraç, dan Ueda (2016) yang menggunakan gelanggang Herediter, Noether, dan Prim (HNP) sebagai gelanggang tumpuan. Pada kajian yang dilakukan oleh Amir, Djuddin, Bahri, Erawaty, dan Abdal (2017), diteliti struktur gelanggang polinom miring dengan menggunakan quaternion sebagai gelanggang tumpuannya. Di kesempatan lain, Amir, Erawaty, Bahri, Fadillah, dan Gormantara (2018) menggunakan coquaternion sebagai gelanggang tumpuan dalam kajiannya. Gelanggang nilpoten secara lokal juga telah digunakan sebagai gelanggang tumpuan oleh Chen, Hagan, dan Wang (2019).

Banyak macam gelanggang lain dengan berbagai jenis himpunan dan operasi dapat digunakan sebagai gelanggang tumpuan. Himpunannya dapat berupa berbagai macam objek matematika seperti bilangan riil, bilangan kompleks, matriks, dan lain-lainnya. Barisan merupakan salah satu objek matematika yang umum dijumpai. Barisan dapat dipandang sebagai kumpulan objek yang disusun dengan urutan tertentu. Salah satu manfaat dari barisan adalah pada bidang pengolahan sinyal digital, di mana barisan dapat digunakan untuk merepresentasikan sinyal diskrit. Barisan bilangan riil berhingga merupakan contoh dari barisan. Himpunan barisan bilangan riil berhingga dengan dua operasi biner yang sesuai dapat membentuk suatu gelanggang yang bisa digunakan sebagai gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring.

Di dalam gelanggang polinom miring yang merupakan gelanggang nonkomutatif, terdapat himpunan bagian yang anggotanya bersifat komutatif dengan setiap anggota dari gelanggang polinom miring tersebut yang dikenal sebagai pusat. Pusat dari suatu gelanggang polinom miring menjadi salah satu topik pembahasan yang menarik dan penting perannya dalam membantu mengkaji gelanggang polinom miring tersebut secara keseluruhan (Amir, 2009). Oleh karena struktur dari suatu gelanggang polinom miring sangat dipengaruhi oleh

gelanggang tumpuan, σ yaitu endomorfisma gelanggang, dan juga δ yaitu σ -derivatif, sehingga pusat dari suatu gelanggang polinom miring juga akan sangat dipengaruhi oleh tiga hal tersebut. Maka gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang berbeda akan berkemungkinan memiliki pusat yang berbeda.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuannya berupa gelanggang barisan, namun akan dibatasi pada barisan bilangan riil berhingga dengan fokus kajian pada pusat dari gelanggang polinom miring tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga?
2. Bagaimana pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menemukan persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga.
2. Untuk menemukan pusat dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan elemen gelanggang barisan bilangan riil berhingga, serta pusat dari gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang digunakan berupa gelanggang yang terbentuk dari himpunan barisan bilangan riil berhingga dengan operasi penjumlahan barisan dan operasi hasil kali Cauchy barisan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan bidang ilmu matematika dan khususnya di bidang aljabar.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa materi yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam mengkaji karakteristik daerah komutatif pada gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga. Materinya berupa definisi dan konsep dari operasi biner, grup, gelanggang, gelanggang polinom miring, dan juga barisan.

2.1 Operasi Biner

Operasi biner sangat penting dalam membahas struktur aljabar seperti grup dan gelanggang. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1

Misal G merupakan suatu himpunan, maka operasi biner pada G adalah sebuah fungsi dari $G \times G$ ke G (Shahriari, 2017).

2.2 Grup

Grup merupakan dasar struktur aljabar lain yang lebih kompleks. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai definisi dari grup.

Definisi 2.2

Grup (G, \circ) adalah sebuah himpunan tidak kosong G dengan operasi biner \circ terdefinisi pada G sedemikian sehingga:

- a) Jika $a, b \in G$, maka $a * b \in G$,*
- b) $(a \circ b) * c = a \circ (b \circ c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$,*
- c) Terdapat sebuah elemen identitas $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$ untuk setiap $a \in G$,*

- d) Untuk setiap $a \in G$ terdapat sebuah elemen invers $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (Shahriari, 2017)

2.3 Gelanggang

Gelanggang merupakan struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup. Berbeda dengan grup yang merupakan struktur aljabar yang memiliki satu operasi biner, di dalam gelanggang terdapat dua operasi biner. Pada sub bab ini akan dibahas beberapa definisi terkait gelanggang.

Definisi 2.3

Gelanggang $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan tidak kosong R dengan dua operasi biner $+$ dan \cdot terdefinisi pada R sedemikian sehingga:

- a) *Jika $a, b \in R$, maka $a + b \in R$,*
- b) *$a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in R$,*
- c) *$(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$,*
- d) *Terdapat sebuah elemen $0_R \in R$ sedemikian sehingga $a + 0_R = 0_R + a = a$ untuk setiap $a \in R$,*
- e) *Untuk setiap $a \in R$ maka terdapat $-a \in R$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0_R$,*
- f) *Jika $a, b \in R$, maka $a \cdot b \in R$,*
- g) *$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, untuk setiap $a, b, c \in R$,*
- h) *$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$. (Shahriari, 2017).*

Definisi 2.4

Sebuah gelanggang $(R, +, \cdot)$ disebut sebagai gelanggang komutatif jika memenuhi $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in R$ (Shahriari, 2017).

Definisi 2.5

Sebuah gelanggang $(R, +, \cdot)$ disebut sebagai gelanggang dengan elemen satuan jika terdapat sebuah elemen 1_R sedemikian sehingga memenuhi $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ untuk setiap $a \in R$ (Shahriari, 2017).

Contoh 2.1

Himpunan bilangan riil \mathbb{R} dengan operasi $+$ (penjumlahan) dan \cdot (perkalian) membentuk gelanggang. Karena berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ maka $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan gelanggang komutatif. Diketahui juga terdapat elemen satuan terhadap operasi \cdot yaitu 1 di dalam \mathbb{R} sedemikian sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, maka $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ juga merupakan gelanggang dengan elemen satuan.

Definisi 2.6

Misal R adalah sebuah gelanggang. Maka pusat dari R dilambangkan dengan $Z(R)$ didefinisikan sebagai $Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}$ (Amir et al., 2020).

2.4 Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma gelanggang merupakan suatu pemetaan antara dua buah gelanggang. Pada sub bab ini akan dibahas beberapa definisi terkait gelanggang beserta contohnya.

Definisi 2.7

Pemetaan f dari gelanggang R ke gelanggang S merupakan homomorfisma gelanggang dari R ke S jika untuk setiap $a, b \in R$ memenuhi

- a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
- b) $f(ab) = f(a)f(b)$. (Shahriari, 2017)

Definisi 2.8

Endomorfisma gelanggang merupakan homomorfisma gelanggang dari suatu gelanggang ke dirinya sendiri (Shahriari, 2017).

Contoh 2.2

Himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dengan operasi penjumlahan matriks (+) dan perkalian matriks (\cdot) membentuk gelanggang. Misalkan suatu pemetaan $\sigma: M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2} \rightarrow M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Akan ditunjukkan σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa σ merupakan suatu homomorfisma gelanggang. Ambil sebarang $x, y \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$, dengan $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma(x + y) &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a + e & -(b + f) \\ -(c + g) & d + h \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a + e & -b - f \\ -c - g & d + h \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ -g & h \end{bmatrix} \\
 &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \sigma \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \sigma(x) + \sigma(y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sigma(x \cdot y) &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \sigma \left(\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} ae + bg & -(af + bh) \\ -(ce + dg) & cf + dh \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ae + bg & -af - bh \\ -ce - dg & cf + dh \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & -f \\ -g & h \end{bmatrix} \\
 &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot \sigma \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \sigma(x) \cdot \sigma(y).
 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh bahwa σ merupakan homomorfisma. Karena σ merupakan homomorfisma gelanggang dan memetakan $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ ke dirinya sendiri, maka σ adalah endomorfisma gelanggang.

2.5 Gelanggang Polinom Miring

Gelanggang polinom miring merupakan salah satu contoh gelanggang nonkomutatif yang diperkenalkan pertama kali oleh Ore (1933). Pada sub bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep terkait dengan gelanggang polinom miring.

Definisi 2.9

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan dan σ merupakan endomorfisma gelanggang, maka pemetaan $\delta: R \rightarrow R$ disebut sebagai σ -derivatif dari R jika untuk semua $a, b \in R$ memenuhi

- a) $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$,
- b) $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$. (Farahat & Al-Bogamy, 2021)

Contoh 2.3

Himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dengan operasi penjumlahan matriks (+) dan perkalian matriks (\cdot) membentuk gelanggang. Diberikan σ yang merupakan endomorfisma gelanggang dan didefinisikan sebagai $\sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Misalkan suatu pemetaan $\delta: M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2} \rightarrow M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ yang didefinisikan dengan $\delta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Akan ditunjukkan

δ merupakan suatu σ -derivatif dari $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Ambil sebarang $x, y \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$, dengan

$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \text{a) } \delta(x + y) &= \delta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\ &= \delta \left(\begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(b + f) \\ -(c + g) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b - f \\ -c - g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ -g & 0 \end{bmatrix} \\ &= \delta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \delta \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\ &= \delta(x) + \delta(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \delta(x \cdot y) &= \delta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\ &= \delta \left(\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(af + bh) \\ -(ce + dg) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -af - bh \\ -ce - dg & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) \cdot \delta(y) + \delta(x) \cdot y &= \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot \delta \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \delta \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -f \\ -g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bg & -af \\ -dg & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -bg & -bh \\ -ce & -cf \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -af - bh \\ -dg - ce & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\delta(x \cdot y) = \sigma(x) \cdot \delta(y) + \delta(x) \cdot y$. Jadi δ merupakan σ -derivatif pada $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$.

Definisi 2.10

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan 1 , σ merupakan endomorfisma gelanggang pada R , dan δ merupakan σ -derivatif. Gelanggang polinom miring atas R dengan peubah tak diketahui x dinotasikan dengan

$$R[x; \sigma, \delta] = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in R, 0 \leq i \leq n\}$$

dan memiliki aturan $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a \in R$ (McConnel & Robson, 2001).

Contoh 2.4

Misalkan Gelanggang $(M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}, +, \cdot)$ di mana $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil, diberikan σ yang merupakan endomorfisma gelanggang pada $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Selanjutnya diberikan juga pemetaan δ yang merupakan σ -derivatif dan didefinisikan sebagai $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$. Maka gelanggang $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}$ dengan σ dan δ membentuk gelanggang polinom miring yang disimbolkan dengan $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$. Misalkan diambil $f(x), g(x) \in M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$ dengan $f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x^2$ dan $g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$, akan diperlihatkan bahwa perkalian pada $M_{(\mathbb{R})}^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$ tidak komutatif.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x^2\right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right) \left(x \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right) \left(\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x + \delta\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) x \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right) \left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) x \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x\right) \left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\sigma \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x + \delta \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) x^2 \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\sigma \left(\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x + \delta \left(\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^3 + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
 &\quad + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x. \\
 g(x)f(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\sigma \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) x + \delta \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) \right) x^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right) x^3 + \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
 &= \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} x^2. \\
 \therefore f(x)g(x) &\neq g(x)f(x).
 \end{aligned}$$

2.6 Barisan

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi dari barisan serta beberapa operasi pada barisan.

Definisi 2.11

Misal X merupakan suatu himpunan. Barisan dalam X adalah sebuah fungsi $a: N \rightarrow X$, di mana $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ untuk suatu $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dalam kata lain barisan adalah sebuah fungsi dengan nilai di dalam X dengan domainnya berupa seluruh bilangan bulat dimulai dengan n_0 (biasanya $n_0 = 0$ atau 1). Jika a merupakan sebuah barisan, maka biasanya tidak dinotasikan dengan $a(n)$ melainkan digunakan (a_n) (Hsu, 2020).

Jika $X = \mathbb{R}$ yaitu himpunan seluruh bilangan riil dan $a: N \rightarrow \mathbb{R}$, maka barisan (a_n) merupakan barisan bilangan riil.

Definisi 2.12

Barisan berhingga merupakan barisan yang memiliki domain yang berhingga.. Sedangkan jika suatu barisan memiliki domain yang tidak berhingga maka barisan tersebut disebut dengan barisan tak hingga (Warner, 2012).

Definisi 2.13

Jumlah barisan (a_n) dan (b_n) adalah sebuah barisan (k_n) yang didefinisikan sebagai $k_n = a_n + b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dan ditulis dengan $(k_n) = (a_n + b_n)$ (Anderson & Hall, 2012).

Contoh 2.5

Misalkan diberikan dua barisan berhingga $(2,4,6,8,10)$ dan $(0,1,1,2,3)$, maka

$$(2, 4, 6, 8, 10) + (0, 1, 1, 2, 3) = (2 + 0, 4 + 1, 6 + 1, 8 + 2, 10 + 3)$$

$$= (2,5,7,10,13).$$
Definisi 2.14

Hasil kali Cauchy dari dua barisan (a_n) dan (b_n) didefinisikan sebagai $(a_n) * (b_n) = (c_n)$ di mana $c_n = \sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}$ dengan $n \geq 0$ (Falcó & Grosse-Erdmann, 2020).

Contoh 2.6

Misalkan diberikan dua barisan berhingga $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 4, 6, 8, 10)$ dan $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 1, 1, 2, 3)$, maka

$$\begin{aligned}
 (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) * (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) &= \left(a_0 b_0, \sum_{d=0}^1 a_d b_{1-d}, \sum_{d=0}^2 a_d b_{2-d}, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{d=0}^3 a_d b_{3-d}, \sum_{d=0}^4 a_d b_{4-d} \right) \\
 &= (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 \\
 &\quad + a_2 b_0, a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\
 &\quad + a_3 b_0, a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\
 &\quad + a_4 b_0) \\
 &= (2(0), 2(1) + 4(0), 2(1) + 4(1) \\
 &\quad + 6(0), 2(2) + 4(1) + 6(1) \\
 &\quad + 8(0), 2(3) + 4(2) + 6(1) + 8(1) \\
 &\quad + 10(0)) \\
 &= (0, 2, 6, 14, 28).
 \end{aligned}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup metode penelitian, lokasi dan waktu penelitian, serta prosedur penelitian.

3.1 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan bersifat pengembangan teori keilmuan terkhususnya di bidang Matematika Aljabar dengan menggunakan metode studi literatur.

3.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Lokasi penelitian ini bertempat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin kota Makassar dengan waktu penelitian direncanakan berlangsung mulai dari Agustus 2021.

3.3 Prosedur Penelitian

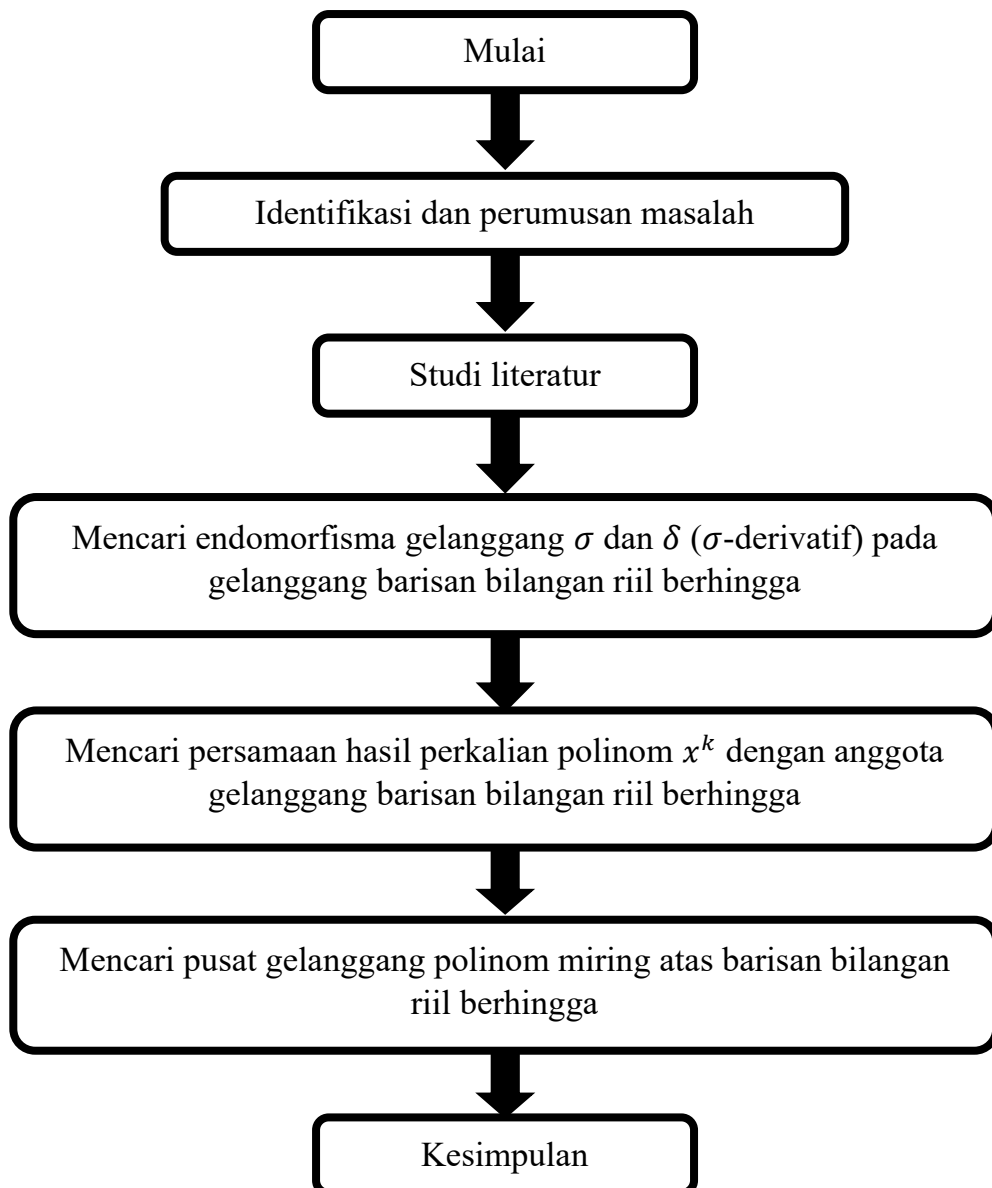
Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- i. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah yang menjadi fokus penelitian.
- ii. Melakukan studi literatur terhadap referensi-referensi jurnal penelitian yang berkaitan dengan topik yang diteliti sebagai tahap melengkapi pengetahuan dasar peneliti untuk keperluan pelaksanaan penelitian.
- iii. Meneliti dan mencari endomorfisma gelanggang σ dan δ (σ -derivatif) pada gelanggang barisan bilangan riil berhingga.

Kemudian akan dicari persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga serta pusat dari gelanggang polinom miring atas gelanggang barisan bilangan riil berhingga

- iv. Setelah melewati langkah penelitian, maka hasil dari penelitian tersebut akan dibuat kesimpulan berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian

Langkah- langkah kerja dalam penelitian ini dapat digambarkan dalam diagram alur berikut:



Gambar 3.1 Diagram alur penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diuraikan hasil dan pembahasan dari penelitian yang dilakukan.

4.1 Gelanggang Barisan Bilangan Riil Berhingga

Pada subbab ini akan dibahas mengenai gelanggang barisan bilangan riil berhingga yang akan menjadi gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring.

Teorema 4.1

Misalkan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ serta didefinisikan operasi penjumlahan

$$(a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S} = (a_n + b_n)_{n \in S},$$

dan operasi hasil kali Cauchy barisan

$$(a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S} = \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}.$$

Maka R^S bersama dengan kedua operasi tersebut membentuk gelanggang komutatif dengan elemen satuan.

Bukti:

Pertama akan dibuktikan bahwa $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang. Ambil sebarang $a, b, c \in R^S$ dengan $a = (a_n)_{n \in S}$, $b = (b_n)_{n \in S}$, dan $c = (c_n)_{n \in S}$.

1. Akan dibuktikan bahwa jika $a, b \in R^S$, maka $a + b \in R^S$.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S} \\ &= (a_n + b_n)_{n \in S} \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_t + b_t). \end{aligned}$$

Karena $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i \in S$, maka $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i \in S$.

Sehingga $(a_n + b_n)_{n \in S} \in R^S$.

\therefore Untuk setiap $a, b \in R^S$, maka $a + b \in R^S$.

2. Akan dibuktikan bahwa $a + b = b + a$.

$$a + b = (a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S} = (a_n + b_n)_{n \in S}.$$

Karena $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, maka berdasarkan sifat komutatif penjumlahan bilangan riil maka $a_i + b_i = b_i + a_i$ untuk setiap $i \in S$. Sehingga

$$\begin{aligned} a + b &= (a_n + b_n)_{n \in S} \\ &= (b_n + a_n)_{n \in S} \\ &= (b_n)_{n \in S} + (a_n)_{n \in S} \\ &= b + a \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = b + a.$$

3. Akan dibuktikan bahwa $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= ((a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S}) + (c_n)_{n \in S} \\ &= (a_n + b_n)_{n \in S} + (c_n)_{n \in S} \\ &= ((a_n + b_n) + c_n)_{n \in S} \\ &= (a_n + (b_n + c_n))_{n \in S} \\ &= (a_n)_{n \in S} + (b_n + c_n)_{n \in S} \\ &= (a_n)_{n \in S} + ((b_n)_{n \in S} + (c_n)_{n \in S}) \\ &= a + (b + c). \end{aligned}$$

$$\therefore (a + b) + c = a + (b + c).$$

4. Akan dibuktikan bahwa terdapat elemen identitas di dalam R^S terhadap operasi penjumlahan (+). Ambil barisan $(0_n)_{n \in S} = (0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0_t)$ di mana 0_t merupakan 0 yang berada pada suku ke- t dan jelas bahwa $(0_n)_{n \in S} \in R^S$. Maka

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in S} + (0_n)_{n \in S} &= (a_n + 0_n)_{n \in S} \\ &= (a_0 + 0, a_1 + 0, \dots, a_t + 0_t) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_t) \\ &= (a_n)_{n \in S}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0_n)_{n \in S} + (a_n)_{n \in S} &= (0_n + a_n)_{n \in S} \\ &= (0 + a_0, 0 + a_1, \dots, 0_t + a_t) \end{aligned}$$

$$= (a_0, a_1, \dots, a_t)$$

$$= (a_n)_{n \in S}.$$

\therefore Terdapat elemen identitas di dalam R^S terhadap operasi penjumlahan (+) yaitu $(0_n)_{n \in S}$ sedemikian sehingga $(a_n)_{n \in S} + (0_n)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S} + (a_n)_{n \in S} = (a_n)_{n \in S}$ untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$.

5. Akan dibuktikan untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$ maka terdapat elemen invers di dalam R^S terhadap operasi penjumlahan (+). Untuk sebarang barisan $(a_n)_{n \in S} \in R^S$, karena $a_i \in \mathbb{R}$ maka terdapat $-a_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i \in S$. Sehingga terdapat suatu barisan $(-a_n)_{n \in S} \in R^S$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in S} + (-a_n)_{n \in S} &= (a_n + (-a_n))_{n \in S} \\ &= (0_n)_{n \in S}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-a_n)_{n \in S} + (a_n)_{n \in S} &= (-a_n + a_n)_{n \in S} \\ &= (0_n)_{n \in S}. \end{aligned}$$

\therefore Terdapat elemen invers di dalam R^S terhadap operasi penjumlahan (+) untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$.

6. Akan dibuktikan jika $a, b \in R^S$, maka $a * b \in R^S$.

$$a * b = (a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S} = \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}.$$

Karena $\sum_{d=0}^m a_d b_{m-d} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $m \in S$, sehingga $(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d})_{n \in S} \in R^S$.

\therefore Untuk setiap $a, b \in R^S$, maka $a * b \in R^S$.

7. Akan diperlihatkan bahwa $a * (b * c) = (a * b) * c$.

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a_n)_{n \in S} * ((b_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}) \\ &= (a_n)_{n \in S} * \left(\sum_{d=0}^n b_d c_{n-d} \right)_{n \in S}, \end{aligned}$$

misalkan

$$\left(\sum_{d=0}^n b_d c_{n-d} \right)_{n \in S} = (x_n)_{n \in S},$$

sehingga

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a_n)_{n \in S} * (x_n)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{g=0}^n a_g x_{n-g} \right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{g=0}^n \left[a_g \sum_{d=0}^{n-g} b_d c_{n-g-d} \right] \right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{g=0}^n \left[\sum_{d=0}^{n-g} a_g b_d c_{n-g-d} \right] \right)_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= ((a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S}) * (c_n)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d'=0}^n a_{d'} b_{n-d'} \right)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}, \end{aligned}$$

misalkan

$$\left(\sum_{d'=0}^n a_{d'} b_{n-d'} \right)_{n \in S} = (y_n)_{n \in S},$$

sehingga

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (y_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n y_i c_{n-i} \right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} \right] \right)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} = \omega_{i,d'}$, maka

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} \right] = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'} \right].$$

Kemudian penguraian dari

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'} \right],$$

dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.1 Penguraian $\sum_{i=0}^n [\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'}]$

$i \backslash d'$	0	1	2	...	n	$\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'}$
0	$\omega_{0,0}$	—	—	...	—	$\sum_{d'=0}^0 \omega_{0,d'}$
1	$\omega_{1,0}$	$\omega_{1,1}$	—	...	—	$\sum_{d'=0}^1 \omega_{1,d'}$
2	$\omega_{2,0}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$...	—	$\sum_{d'=0}^2 \omega_{2,d'}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\omega_{n,0}$	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$...	$\omega_{n,n}$	$\sum_{d'=0}^n \omega_{n,d'}$
$\sum_{i=d'}^n \omega_{i,d'}$	$\sum_{i=0}^n \omega_{i,0}$	$\sum_{i=1}^n \omega_{i,1}$	$\sum_{i=2}^n \omega_{i,2}$...	$\sum_{i=n}^n \omega_{i,n}$	

Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=0}^n \omega_{i,0} + \sum_{i=1}^n \omega_{i,1} + \sum_{i=2}^n \omega_{i,2} + \dots + \sum_{i=n}^n \omega_{i,n} = \sum_{d'=0}^n \left[\sum_{i=d'}^n \omega_{i,d'} \right],$$

dan

$$\sum_{d'=0}^0 \omega_{0,d'} + \sum_{d'=0}^1 \omega_{1,d'} + \sum_{d'=0}^2 \omega_{2,d'} + \dots + \sum_{d'=0}^n \omega_{n,d'} = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'} \right],$$

oleh karena penjumlahannya komutatif, maka disimpulkan

$$\sum_{d'=0}^n \left[\sum_{i=d'}^n \omega_{i,d'} \right] = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i \omega_{i,d'} \right],$$

atau

$$\sum_{d'=0}^n \left[\sum_{i=d'}^n a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} \right] = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{d'=0}^i a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} \right].$$

Sehingga

$$(a * b) * c = \left(\sum_{d'=0}^n \left[\sum_{i=d'}^n a_{d'} b_{i-d'} c_{n-i} \right] \right)_{n \in S}.$$

Misal $p = i - d'$ maka

$$(a * b) * c = \left(\sum_{d'=0}^n \left[\sum_{p=0}^{n-d'} a_{d'} b_p c_{n-d'-p} \right] \right)_{n \in S}.$$

Jika dimisalkan $d' = g$ dan $p = d$ maka diperoleh

$$(a * b) * c = \left(\sum_{g=0}^n \left[\sum_{d=0}^{n-g} a_g b_d c_{n-g-d} \right] \right)_{n \in S}. \quad (4.2)$$

∴ Berdasarkan (4.1) dan (4.2) maka diperoleh bahwa $a * (b * c) = (a * b) * c$.

8. Akan diperlihatkan bahwa $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

$$a * (b + c) = (a_n)_{n \in S} * ((b_n)_{n \in S} + (c_n)_{n \in S})$$

$$= (a_n)_{n \in S} * (b_n + c_n)_{n \in S},$$

misal $(b_n + c_n)_{n \in S} = (w_n)_{n \in S}$ maka

$$a * (b + c) = (a_n)_{n \in S} * (w_n)_{n \in S}$$

$$= \left(\sum_{d=0}^n a_d w_{n-d} \right)_{n \in S}$$

$$= \left(\sum_{d=0}^n a_d (b_{n-d} + c_{n-d}) \right)_{n \in S}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} + a_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} + \sum_{d=0}^n a_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S} + \left(\sum_{d=0}^n a_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= ((a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S}) + ((a_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}) \\
 &= (a * b) + (a * c).
 \end{aligned}$$

$$\therefore a * (b + c) = (a * b) + (a * c).$$

Akan ditunjukkan bahwa $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$.

$$\begin{aligned}
 (a + b) * c &= ((a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S}) * (c_n)_{n \in S} \\
 &= (a_n + b_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S},
 \end{aligned}$$

misal $(a_n + b_n)_{n \in S} = (v_n)_{n \in S}$ maka

$$\begin{aligned}
 (a + b) * c &= (v_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n v_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n (a_d + b_d) c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d c_{n-d} + b_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d c_{n-d} + \sum_{d=0}^n b_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n a_d c_{n-d} \right)_{n \in S} + \left(\sum_{d=0}^n b_d c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= ((a_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}) + ((b_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}) \\
 &= (a * c) + (b * c).
 \end{aligned}$$

$$\therefore (a + b) * c = (a * c) + (b * c).$$

∴ Karena semua aksioma terpenuhi, maka $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang.

Kemudian akan dibuktikan $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang komutatif. Ambil sebarang $a, b \in R^S$ dengan $a = (a_n)_{n \in S}$ dan $b = (b_n)_{n \in S}$.

$$\begin{aligned} a * b &= (a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)_{n \in S} \\ &= (b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_{n-1} a_1 + b_n a_0)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{p=0}^n b_p a_{n-p} \right)_{n \in S} \\ &= (b_n)_{n \in S} * (a_n)_{n \in S} \\ &= b * a \end{aligned}$$

∴ Karena diperoleh bahwa $a * b = b * a$, maka gelanggang $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang komutatif.

Kemudian akan dibuktikan $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang dengan elemen satuan. Terdapat barisan $(I_n)_{n \in S} \in R^S$, di mana

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 0, \\ 0, & \text{untuk } n \neq 0, \end{cases}$$

sedemikian sehingga untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$ maka

$$\begin{aligned} (I_n)_{n \in S} * (a_n)_{n \in S} &= \left(\sum_{d=0}^n I_d a_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= (I_0 a_n + I_1 a_{n-1} + I_2 a_{n-2} + \cdots + I_n a_0)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Oleh karena

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 0, \\ 0, & \text{untuk } n \neq 0, \end{cases}$$

maka

$$(I_n)_{n \in S} * (a_n)_{n \in S} = (a_n)_{n \in S}.$$

Sebab $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang komutatif maka

$$(I_n)_{n \in S} * (a_n)_{n \in S} = (a_n)_{n \in S} * (I_n)_{n \in S} = (a_n)_{n \in S}.$$

\therefore Terdapat elemen invers terhadap operasi $*$ untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$ sedemikian sehingga $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang dengan elemen satuan.

$\therefore (R^S, +, *)$ merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan. ■

Contoh 4.1

Misalkan $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(2^n)_{n \in S}, \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} \in R^S$. Akan dicari $(2^n)_{n \in S} + \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S}$ dan

$$(2^n)_{n \in S} * \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S}.$$

$$\begin{aligned} (2^n)_{n \in S} + \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} &= \left(2^n + \frac{n}{2}\right)_{n \in S} \\ &= \left(2^0 + \frac{0}{2}, 2^1 + \frac{1}{2}, 2^2 + \frac{2}{2}, 2^3 + \frac{3}{2}, 2^4 + \frac{4}{2}\right) \\ &= \left(1, \frac{5}{2}, 5, \frac{19}{2}, 18\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2^n)_{n \in S} * \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} &= \left(\sum_{d=0}^n 2^d \binom{n-d}{2}\right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n 2^{d-1}n - 2^{d-1}d\right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^0 2^{d-1}(0) - 2^{d-1}d, \sum_{d=0}^1 2^{d-1}(1) - 2^{d-1}d, \right. \\ &\quad \left. \sum_{d=0}^2 2^{d-1}(2) - 2^{d-1}d, \sum_{d=0}^3 2^{d-1}(3) - 2^{d-1}d, \right. \\ &\quad \left. \sum_{d=0}^4 2^{d-1}(4) - 2^{d-1}d\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, 2, \frac{11}{2}, 13\right). \end{aligned}$$

Contoh 4.2

Misalkan $S = \{0,1,2, \dots, 5\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(n^2)_{n \in S}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \in R^S$. Akan dicari $(n^2)_{n \in S} + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}$ dan $(n^2)_{n \in S} * \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}$.

$$\begin{aligned} (n^2)_{n \in S} + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} &= \left(n^2 + \frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \\ &= \left((0)^2 + \frac{1}{(0)+1}, (1)^2 + \frac{1}{(1)+1}, (2)^2 + \frac{1}{(2)+1}, \right. \\ &\quad \left.(3)^2 + \frac{1}{(3)+1}, (4)^2 + \frac{1}{(4)+1}, (5)^2 + \frac{1}{(5)+1}\right) \\ &= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{13}{3}, \frac{37}{4}, \frac{81}{5}, \frac{151}{6}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n^2)_{n \in S} * \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} &= \left(\sum_{d=0}^n d^2 \left(\frac{1}{(n-d)+1}\right)\right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n \frac{d^2}{n-d+1}\right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^0 \frac{d^2}{(0)-d+1}, \sum_{d=0}^1 \frac{d^2}{(1)-d+1}, \sum_{d=0}^2 \frac{d^2}{(2)-d+1}, \right. \\ &\quad \left.\sum_{d=0}^3 \frac{d^2}{(3)-d+1}, \sum_{d=0}^4 \frac{d^2}{(4)-d+1}, \sum_{d=0}^5 \frac{d^2}{(5)-d+1}\right) \\ &= \left(0, 1, \frac{9}{2}, \frac{34}{3}, \frac{265}{12}, \frac{186}{5}\right). \end{aligned}$$

4.2 Endomorfisma Gelanggang σ dan δ (σ -Derivatif) pada $(R^S, +, *)$

Pada subbab ini akan dibahas mengenai Endomorfisma Gelanggang σ dan δ (σ -Derivatif) pada gelanggang barisan bilangan riil berhingga yang akan digunakan untuk membangun gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga.

Lemma 4.1

Diberikan $(R^S, +, *)$ yang merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Didefinisikan pemetaan

$$\sigma: R^S \rightarrow R^S$$

dengan $\sigma((a_n)_{n \in S}) = ((-1)^n a_n)_{n \in S}$, maka σ merupakan endomorfisma gelanggang pada $(R^S, +, *)$.

Bukti:

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa σ merupakan homomorfisma gelanggang.

Ambil sebarang $a, b \in R^S$, di mana $a = (a_n)_{n \in S}$ dan $b = (b_n)_{n \in S}$.

1. Akan dibuktikan bahwa $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$.

$$\begin{aligned} \sigma(a + b) &= \sigma((a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S}) \\ &= \sigma((a_n + b_n)_{n \in S}) \\ &= ((-1)^n (a_n + b_n))_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) + \sigma(b) &= \sigma((a_n)_{n \in S}) + \sigma((b_n)_{n \in S}) \\ &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} + ((-1)^n b_n)_{n \in S} \\ &= ((-1)^n a_n + (-1)^n b_n)_{n \in S} \\ &= ((-1)^n (a_n + b_n))_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

\therefore Berdasarkan (4.3) dan (4.4) diperoleh bahwa $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\sigma(a * b) = \sigma(a) * \sigma(b)$.

$$\begin{aligned} \sigma(a * b) &= \sigma((a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S}) \\ &= \sigma\left(\left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}\right)_{n \in S}\right) \\ &= \left((-1)^n \left[\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}\right]\right)_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) * \sigma(b) &= \sigma((a_n)_{n \in S}) * \sigma((b_n)_{n \in S}) \\ &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} * ((-1)^n b_n)_{n \in S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{d=0}^n [(-1)^d a_d][(-1)^{n-d} b_{n-d}] \right)_{n \in S} \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n (-1)^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \left((-1)^n \left[\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right] \right)_{n \in S}. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

∴ Berdasarkan (4.5) dan (4.6) diperoleh bahwa $\sigma(a * b) = \sigma(a) * \sigma(b)$.

Sehingga diperoleh bahwa σ merupakan homomorfisma gelanggang. Oleh karena σ memetakan gelanggang R^S ke dirinya sendiri maka σ merupakan endomorfisma gelanggang pada gelanggang $(R^S, +, *)$. ■

Contoh 4.3

Misal $S = \{0,1,2,3,4\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(2^n)_{n \in S}, \binom{n}{2}_{n \in S} \in R^S$, akan dicari $\sigma((2^n)_{n \in S})$ dan $\sigma\left(\binom{n}{2}_{n \in S}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \sigma((2^n)_{n \in S}) &= ((-1)^n 2^n)_{n \in S} \\
 &= ((-2)^n)_{n \in S} \\
 &= ((-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4) \\
 &= (1, -2, 4, -8, 16).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma\left(\binom{n}{2}_{n \in S}\right) &= \left((-1)^n \binom{n}{2} \right)_{n \in S} \\
 &= \left((-1)^0 \binom{0}{2}, (-1)^1 \binom{1}{2}, (-1)^2 \binom{2}{2}, (-1)^3 \binom{3}{2}, (-1)^4 \binom{4}{2} \right) \\
 &= \left(0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 2 \right).
 \end{aligned}$$

Contoh 4.4

Misal $S = \{0,1,2, \dots, 5\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(n^2)_{n \in S}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \in R^S$, akan dicari $\sigma((n^2)_{n \in S})$ dan

$$\sigma\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}\right).$$

$$\begin{aligned} \sigma((n^2)_{n \in S}) &= ((-1)^n n^2)_{n \in S} \\ &= ((-1)^0(0)^2, (-1)^1(1)^2, (-1)^2(2)^2, (-1)^3(3)^2, (-1)^4(4)^2, \\ &\quad (-1)^5(5)^2) \\ &= (0, -1, 4, -9, 16, -25). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}\right) &= \left((-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n \in S} \\ &= \left((-1)^0 \left(\frac{1}{0+1}\right), (-1)^1 \left(\frac{1}{1+1}\right), (-1)^2 \left(\frac{1}{2+1}\right), \right. \\ &\quad \left. (-1)^3 \left(\frac{1}{3+1}\right), (-1)^4 \left(\frac{1}{4+1}\right), (-1)^5 \left(\frac{1}{5+1}\right)\right) \\ &= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Setelah membahas mengenai σ yaitu sebuah endomorfisma gelanggang pada gelanggang $(R^S, +, *)$, selanjutnya sehubungan dengan σ dari **Lemma 4.1** akan dibahas mengenai δ yaitu sebuah σ -derivatif pada gelanggang $(R^S, +, *)$.

Lemma 4.2

Diberikan $(R^S, +, *)$ yang merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0,1,2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Didefinisikan pemetaan

$$\delta: R^S \rightarrow R^S$$

dengan $\delta((a_n)_{n \in S}) = (\bar{a}_n)_{n \in S}$, di mana

$$\overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka δ merupakan σ -derivatif pada gelanggang $(R^S, +, *)$.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in R^S$, di mana $a = (a_n)_{n \in S}$ dan $b = (b_n)_{n \in S}$.

Akan dibuktikan bahwa $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$

$$\begin{aligned} 1. \quad \delta(a + b) &= \delta((a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S}) \\ &= \delta((a_n + b_n)_{n \in S}) \\ &= (\overline{a_n + b_n})_{n \in S}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

dengan

$$\overline{a_n + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ a_n + b_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(a) + \delta(b) &= \delta((a_n)_{n \in S}) + \delta((b_n)_{n \in S}) \\ &= (\overline{a_n})_{n \in S} + (\overline{b_n})_{n \in S} \\ &= (\overline{a_n} + \overline{b_n})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Untuk n genap maka

$$\overline{a_n} + \overline{b_n} = 0 + 0 = 0.$$

Untuk n ganjil maka

$$\overline{a_n} + \overline{b_n} = a_n + b_n.$$

Sehingga

$$\overline{a_n} + \overline{b_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ a_n + b_n, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Jadi $\overline{a_n} + \overline{b_n} = \overline{a_n + b_n}$ dan

$$\delta(a) + \delta(b) = (\overline{a_n + b_n})_{n \in S}. \tag{4.8}$$

\therefore Berdasarkan (4.7) dan (4.8) diperoleh bahwa $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\delta(a * b) = \sigma(a) * \delta(b) + \delta(a) * b$.

$$\delta(a * b) = \delta((a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S})$$

$$= \delta \left(\left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S} \right)$$

$$= \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}, \quad (4.9)$$

dengan

$$\overline{\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ \sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) * \delta(b) + \delta(a) * b &= \sigma((a_n)_{n \in S}) * \delta((b_n)_{n \in S}) + \delta((a_n)_{n \in S}) * (b_n)_{n \in S} \\ &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} * (\overline{b_n})_{n \in S} + (\overline{a_n})_{n \in S} * (b_n)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n (-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} \right)_{n \in S} + \left(\sum_{d=0}^n \overline{a_d} b_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n (-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \sum_{d=0}^n \overline{a_d} b_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= \left(\sum_{d=0}^n (-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} \right)_{n \in S}, \quad (4.10) \end{aligned}$$

dengan

$$\overline{b_{n-d}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n-d \text{ genap} \\ b_{n-d}, & \text{jika } n-d \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\overline{a_d} = \begin{cases} 0, & \text{jika } d \text{ genap} \\ a_d, & \text{jika } d \text{ ganjil} \end{cases}$$

Dengan melihat genap atau ganjilnya n dan d pada $(-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d}$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

- jika n genap dan d ganjil:
 $(-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} = (-1) a_d b_{n-d} + a_d b_{n-d} = 0,$
- jika n genap dan d genap:
 $(-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} = a_d(0) + (0) b_{n-d} = 0,$
- jika n ganjil dan d genap:
 $(-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} = a_d b_{n-d} + (0) b_{n-d} = a_d b_{n-d},$
- jika n ganjil dan d ganjil:
 $(-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} = (-1) a_d(0) + a_d b_{n-d} = a_d b_{n-d}.$

Sehingga

$$\sum_{d=0}^n (-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ \sum_{d=0}^n a_d b_{n-d}, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\left(\sum_{d=0}^n (-1)^d a_d \overline{b_{n-d}} + \overline{a_d} b_{n-d} \right)_{n \in S} = \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}.$$

Akibatnya,

$$\sigma(a) * \delta(b) + \delta(a) * b = \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}. \quad (4.11)$$

∴ Berdasarkan (4.9) dan (4.11) diperoleh bahwa $\delta(a * b) = \sigma(a) * \delta(b) + \delta(a) * b$.

∴ δ merupakan σ -derivatif pada gelanggang $(R^S, +, *)$. ■

Contoh 4.5

Misal $S = \{0,1,2,3,4\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(2^n)_{n \in S}, \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} \in R^S$, akan dicari $\delta((2^n)_{n \in S})$ dan $\delta\left(\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S}\right)$.

$$\begin{aligned} \delta((2^n)_{n \in S}) &= (\overline{2^n})_{n \in S} \\ &= (0, 2, 0, 8, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\left(\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S}\right) &= \left(\frac{\overline{n}}{2}\right)_{n \in S} \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Contoh 4.6

Misal $S = \{0,1,2, \dots, 5\}$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$. Ambil $(n^2)_{n \in S}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \in R^S$, akan dicari $\delta((n^2)_{n \in S})$ dan $\delta\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}\right)$.

$$\begin{aligned}\delta((n^2)_{n \in S}) &= (\overline{n^2})_{n \in S} \\ &= (0, 1, 0, 9, 0, 25).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}\right) &= \left(\overline{\frac{1}{n+1}}\right)_{n \in S} \\ &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}\right).\end{aligned}$$

4.3 Gelanggang Polinom Miring atas Gelanggang $(R^S, +, *)$

Pada subbab ini akan dibahas mengenai gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil, persamaan hasil perkalian polinom x^k dengan anggota gelanggang barisan bilangan riil berhingga serta pusat dari gelanggang polinom miring atas gelanggang barisan bilangan riil berhingga.

Akibat 4.1

Diberikan $(R^S, +, *)$ yang merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan, di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, σ berupa endomorfisma gelanggang yang didefinisikan dengan $\sigma((a_n)_{n \in S}) = ((-1)^n a_n)_{n \in S}$, dan δ yaitu sebuah σ -derivatif yang didefinisikan dengan $\delta((a_n)_{n \in S}) = (\overline{a_n})_{n \in S}$ di mana

$$\overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Maka $R^S[x; \sigma, \delta]$ merupakan gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga.

Bukti:

Dari **Teorema 4.1** diperoleh bahwa $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang dengan elemen satuan, pada **Lemma 4.1** diperoleh bahwa σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang pada $(R^S, +, *)$, dan pada **Lemma 4.2** telah dibuktikan bahwa δ merupakan sebuah σ -derivatif pada gelanggang $(R^S, +, *)$. Sehingga berdasarkan **Definisi 2.10** dapat disimpulkan bahwa gelanggang $(R^S, +, *)$

dipasangkan dengan σ dan δ akan membentuk suatu gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga yang dinotasikan dengan $R^S[x; \sigma, \delta]$. ■

Contoh 4.7

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ambil $(2^n)_{n \in S}x, \binom{n}{2}_{n \in S} x \in R^S[x; \sigma, \delta]$, akan diperlihatkan

$$\begin{aligned} & [(2^n)_{n \in S}x] \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] \neq \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] [(2^n)_{n \in S}x]. \\ [(2^n)_{n \in S}x] \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] &= (2^n)_{n \in S} \left[x \binom{n}{2}_{n \in S} \right] x \\ &= (2^n)_{n \in S} \left[\sigma \left(\binom{n}{2}_{n \in S} \right) x + \delta \left(\binom{n}{2}_{n \in S} \right) \right] x \\ &= (2^n)_{n \in S} \left[\left((-1)^n \binom{n}{2}_{n \in S} \right) x + \binom{\bar{n}}{2}_{n \in S} \right] x \\ &= \left[(2^n)_{n \in S} * \left((-1)^n \binom{n}{2}_{n \in S} \right) \right] x^2 \\ &\quad + \left[(2^n)_{n \in S} * \binom{\bar{n}}{2}_{n \in S} \right] x \\ &= \left(\sum_{d=0}^n 2^d (-1)^{n-d} \binom{n-d}{2}_{n \in S} \right) x^2 \\ &\quad + \left(\sum_{d=0}^n 2^d \binom{\bar{n}-d}{2}_{n \in S} \right) x. \end{aligned}$$

Karena

$$\overline{\frac{n-d}{2}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n-d \text{ genap,} \\ \frac{n-d}{2}, & \text{jika } n-d \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

- untuk $n = 0$

$$\sum_{d=0}^0 2^d \binom{\overline{0-d}}{2} = 2^0(0) = 0.$$

- untuk $n = 1$

$$\sum_{d=0}^1 2^d \binom{1-d}{2} = 2^0 \binom{1-0}{2} + 2^1 \binom{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

- untuk $n = 2$

$$\sum_{d=0}^2 2^d \binom{2-d}{2} = 2^0 \binom{2-0}{2} + 2^1 \binom{2-1}{2} + 2^2 \binom{0}{2} = 1.$$

- untuk $n = 3$

$$\sum_{d=0}^3 2^d \binom{3-d}{2} = 2^0 \binom{3-0}{2} + 2^1 \binom{3-1}{2} + 2^2 \binom{3-2}{2} + 2^3 \binom{0}{2} = \frac{7}{2}.$$

- untuk $n = 4$

$$\sum_{d=0}^4 2^d \binom{4-d}{2} = 2^0 \binom{4-0}{2} + 2^1 \binom{4-1}{2} + 2^2 \binom{4-2}{2} + 2^3 \binom{4-3}{2} + 2^4 \binom{0}{2} = 7.$$

Sehingga

$$\left(\sum_{d=0}^n 2^d \binom{n-d}{2} \right)_{n \in \mathcal{S}} = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}, 7 \right).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} [(2^n)_{n \in \mathcal{S}} x] \left[\binom{n}{2}_{n \in \mathcal{S}} x \right] &= \left(\sum_{d=0}^0 2^d (-1)^{0-d} \binom{0-d}{2}, \sum_{d=0}^1 2^d (-1)^{1-d} \binom{1-d}{2}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{d=0}^2 2^d (-1)^{2-d} \binom{2-d}{2}, \sum_{d=0}^3 2^d (-1)^{3-d} \binom{3-d}{2}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{d=0}^4 2^d (-1)^{4-d} \binom{4-d}{2} \right) x^2 + \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}, 7 \right) x \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -1 \right) x^2 + \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}, 7 \right) x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\binom{n}{2}_{n \in \mathcal{S}} x \right] [(2^n)_{n \in \mathcal{S}} x] &= \binom{n}{2}_{n \in \mathcal{S}} [x(2^n)_{n \in \mathcal{S}}] x \\ &= \binom{n}{2}_{n \in \mathcal{S}} [\sigma((2^n)_{n \in \mathcal{S}}) x + \delta((2^n)_{n \in \mathcal{S}})] x \\ &= \binom{n}{2}_{n \in \mathcal{S}} [((-1)^n 2^n)_{n \in \mathcal{S}} x + (\overline{2^n})_{n \in \mathcal{S}}] x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\binom{n}{\frac{n}{2}}_{n \in S} * ((-1)^n 2^n)_{n \in S} \right] x^2 + \left[\binom{n}{\frac{n}{2}}_{n \in S} * (\overline{2^n})_{n \in S} \right] x \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \binom{d}{\frac{d}{2}} (-1)^{n-d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^2 \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{n-d}} \right)_{n \in S} x.
 \end{aligned}$$

Karena

$$\overline{2^{n-d}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n - d \text{ genap,} \\ 2^{n-d}, & \text{jika } n - d \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

- untuk $n = 0$

$$\sum_{d=0}^0 \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{0-d}} = \binom{0}{\frac{0}{2}} (0) = 0.$$

- untuk $n = 1$

$$\sum_{d=0}^1 \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{1-d}} = \binom{0}{\frac{0}{2}} 2^{1-0} + \binom{1}{\frac{1}{2}} (0) = 0.$$

- untuk $n = 2$

$$\sum_{d=0}^2 \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{2-d}} = \binom{0}{\frac{0}{2}} (0) + \binom{1}{\frac{1}{2}} 2^{2-1} + \binom{2}{\frac{2}{2}} (0) = 1.$$

- untuk $n = 3$

$$\sum_{d=0}^3 \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{3-d}} = \binom{0}{\frac{0}{2}} 2^{3-0} + \binom{1}{\frac{1}{2}} (0) + \binom{2}{\frac{2}{2}} 2^{3-2} + \binom{3}{\frac{3}{2}} (0) = 2.$$

- untuk $n = 4$

$$\sum_{d=0}^4 \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{4-d}} = \binom{0}{\frac{0}{2}} (0) + \binom{1}{\frac{1}{2}} 2^{4-1} + \binom{2}{\frac{2}{2}} (0) + \binom{3}{\frac{3}{2}} 2^{4-3} + \binom{4}{\frac{4}{2}} (0) = 7.$$

Sehingga

$$\left(\sum_{d=0}^n \binom{d}{\frac{d}{2}} \overline{2^{n-d}} \right)_{n \in S} = (0, 0, 1, 2, 7).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] [(2^n)_{n \in S} x] &= \left(\sum_{d=0}^0 \binom{d}{2} (-1)^{0-d} 2^{0-d}, \sum_{d=0}^1 \binom{d}{2} (-1)^{1-d} 2^{1-d}, \right. \\
 &\quad \sum_{d=0}^2 \binom{d}{2} (-1)^{2-d} 2^{2-d}, \sum_{d=0}^3 \binom{d}{2} (-1)^{3-d} 2^{3-d}, \\
 &\quad \left. \sum_{d=0}^4 \binom{d}{2} (-1)^{4-d} 2^{4-d} \right) x^2 + (0, 0, 1, 2, 7)x \\
 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -1 \right) x^2 + (0, 0, 1, 2, 7)x.
 \end{aligned}$$

$$\therefore [(2^n)_{n \in S} x] \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] \neq \left[\binom{n}{2}_{n \in S} x \right] [(2^n)_{n \in S} x].$$

Contoh 4.8

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan $S = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Ambil $(n^2)_{n \in S} x, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} x \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Akan diperlihatkan

$$[(n^2)_{n \in S} x] \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} x^2 \right] \neq \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} x^2 \right] [(n^2)_{n \in S} x].$$

$$\begin{aligned}
 [(n^2)_{n \in S} x] \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} x^2 \right] &= (n^2)_{n \in S} \left[x \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \right] x^2 \\
 &= (n^2)_{n \in S} \left[\sigma \left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \right) x + \delta \left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \right) \right] x^2 \\
 &= (n^2)_{n \in S} \left[\left((-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in S} x \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \right] x^2 \\
 &= \left[(n^2)_{n \in S} * \left((-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in S} \right] x^3 \\
 &\quad + \left[(n^2)_{n \in S} * \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \right] x^2 \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n d^2 (-1)^{n-d} \left(\frac{1}{n-d+1}\right) \right)_{n \in S} x^3
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\sum_{d=0}^n d^2 \left(\frac{1}{n-d+1} \right) \right)_{n \in S} x^2$$

Karena

$$\left(\frac{1}{n-d+1} \right) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n-d \text{ genap,} \\ 1, & \text{jika } n-d \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

- untuk $n = 0$

$$\sum_{d=0}^0 d^2 \left(\frac{1}{0-d+1} \right) = 0^2 \left(\frac{1}{0-d+1} \right) = 0.$$

- untuk $n = 1$

$$\sum_{d=0}^1 d^2 \left(\frac{1}{1-d+1} \right) = 0^2 \left(\frac{1}{1-0+1} \right) + 1^2(0) = 0.$$

- untuk $n = 2$

$$\sum_{d=0}^2 d^2 \left(\frac{1}{2-d+1} \right) = 0^2(0) + 1^2 \left(\frac{1}{2-1+1} \right) + 2^2(0) = \frac{1}{2}.$$

- untuk $n = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^3 d^2 \left(\frac{1}{3-d+1} \right) &= 0^2 \left(\frac{1}{3-0+1} \right) + 1^2(0) + 2^2 \left(\frac{1}{3-2+1} \right) + 3^2(0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

- untuk $n = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^4 d^2 \left(\frac{1}{4-d+1} \right) &= 0^2(0) + 1^2 \left(\frac{1}{4-1+1} \right) + 2^2(0) + 3^2 \left(\frac{1}{4-3+1} \right) \\ &\quad + 4^2(0) \\ &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

- untuk $n = 5$

$$\sum_{d=0}^5 d^2 \left(\frac{1}{5-d+1} \right) = 0^2 \left(\frac{1}{5-0+1} \right) + 1^2(0) + 2^2 \left(\frac{1}{5-2+1} \right) + 3^2(0)$$

$$\begin{aligned}
 &+4^2 \left(\frac{1}{5-4+1} \right) + 5^2(0) \\
 &= 9.
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\left(\sum_{d=0}^n d^2 \left(\frac{1}{n-d+1} \right) \right)_{n \in S} = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 2, 4, 9 \right).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 [(n^2)_{n \in S} x] \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] &= \left(\sum_{d=0}^0 d^2 (-1)^{0-d} \left(\frac{1}{0-d+1} \right), \right. \\
 &\quad \sum_{d=0}^1 d^2 (-1)^{1-d} \left(\frac{1}{1-d+1} \right), \\
 &\quad \sum_{d=0}^2 d^2 (-1)^{2-d} \left(\frac{1}{2-d+1} \right), \\
 &\quad \sum_{d=0}^3 d^2 (-1)^{3-d} \left(\frac{1}{3-d+1} \right), \\
 &\quad \sum_{d=0}^4 d^2 (-1)^{4-d} \left(\frac{1}{4-d+1} \right), \\
 &\quad \left. \sum_{d=0}^5 d^2 (-1)^{5-d} \left(\frac{1}{5-d+1} \right) \right) x^3 \\
 &\quad + \left(0, 0, \frac{1}{2}, 2, 4, 9 \right) x^2 \\
 &= \left(0, 1, \frac{7}{2}, \frac{22}{3}, \frac{151}{12}, \frac{96}{5} \right) x^3 + \left(0, 0, \frac{1}{2}, 2, 4, 9 \right) x^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] [(n^2)_{n \in S} x] &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x [x(n^2)_{n \in S}] x \\
 &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x [\sigma((n^2)_{n \in S}) x + \delta((n^2)_{n \in S})] x \\
 &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x \left[((-1)^n (n^2))_{n \in S} x + (\overline{n^2})_{n \in S} \right] x \\
 &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \left[x((-1)^n (n^2))_{n \in S} \right] x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \left[x(\overline{n^2})_{n \in S} \right] x \\
 = & \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \left[\sigma \left(((-1)^n(n^2))_{n \in S} \right) x \right. \\
 & \left. + \delta \left(((-1)^n(n^2))_{n \in S} \right) \right] x^2 \\
 & + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \left[\sigma \left((\overline{n^2})_{n \in S} \right) x + \delta \left((\overline{n^2})_{n \in S} \right) \right] x \\
 = & \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \left[((-1)^n(-1)^n(n^2))_{n \in S} x \right. \\
 & \left. + (\overline{(-1)^n(n^2)})_{n \in S} \right] x^2 \\
 & + \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \left[((-1)^n \overline{n^2})_{n \in S} x + (\overline{\overline{n^2}})_{n \in S} \right] x \\
 = & \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} * ((-1)^n(-1)^n(n^2))_{n \in S} \right] x^3 \\
 & + \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} * (\overline{(-1)^n(n^2)})_{n \in S} \right] x^2 \\
 & + \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} * ((-1)^n \overline{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
 & + \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} * (\overline{\overline{n^2}})_{n \in S} \right] x
 \end{aligned}$$

Karena

$$\overline{(-1)^n(n^2)} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ -n^2, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

$$(-1)^n \overline{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ -n^2, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{n^2}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ n^2, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

$$\overline{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ n^2, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

$$\overline{((-1)^n(n^2))}_{n \in S} = ((-1)^n \overline{n^2})_{n \in S} = (-\overline{n^2})_{n \in S},$$

$$(\overline{\overline{n^2}})_{n \in S} = (\overline{n^2})_{n \in S}.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] [(n^2)_{n \in S} x] &= \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (n^2)_{n \in S} \right] x^3 \\
 &+ \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (-\overline{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
 &+ \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (-\overline{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
 &+ \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (\overline{n^2})_{n \in S} \right] x \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) (n-d)^2 \right)_{n \in S} x^3 \\
 &+ \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * \left[(-\overline{n^2})_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + (-\overline{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
 &+ \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} x \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) (n-d)^2 \right)_{n \in S} x^3 \\
 &+ \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (-2\overline{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
 &+ \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} x \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) (n-d)^2 \right)_{n \in S} x^3 \\
 &+ \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) (-2) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} x^2 \\
 &+ \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} x \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) (n-d)^2 \right)_{n \in S} x^3
 \end{aligned}$$

$$+ \left((-2) \left[\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right] \right)_{n \in S} x^2$$

$$+ \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} x$$

Untuk

$$\left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S},$$

karena

$$\overline{(n-d)^2} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n-d \text{ genap,} \\ (n-d)^2, & \text{jika } n-d \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

- untuk $n = 0$

$$\sum_{d=0}^0 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(0-d)^2} = \left(\frac{1}{0+1} \right) (0) = 0.$$

- untuk $n = 1$

$$\sum_{d=0}^1 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(1-d)^2} = \left(\frac{1}{0+1} \right) (1-0)^2 + \left(\frac{1}{1+1} \right) (0) = 1.$$

- untuk $n = 2$

$$\sum_{d=0}^2 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(2-d)^2} = \left(\frac{1}{0+1} \right) (0) + \left(\frac{1}{1+1} \right) (2-1)^2 + \left(\frac{1}{2+1} \right) (0) = \frac{1}{2}.$$

- untuk $n = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^3 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(3-d)^2} &= \left(\frac{1}{0+1} \right) (3-0)^2 + \left(\frac{1}{1+1} \right) (0) + \left(\frac{1}{2+1} \right) (3-2)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{3+1} \right) (0) \\ &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

- untuk $n = 4$

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^4 \binom{1}{d+1} \overline{(4-d)^2} &= \binom{1}{0+1} (0) + \binom{1}{1+1} (4-1)^2 + \binom{1}{2+1} (0) \\ &\quad + \binom{1}{3+1} (4-3)^2 + \binom{1}{4+1} (0) \\ &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

- untuk $n = 5$

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^5 \binom{1}{d+1} \overline{(5-d)^2} &= \binom{1}{0+1} (5-0)^2 + \binom{1}{1+1} (0) + \binom{1}{2+1} (5-2)^2 \\ &\quad + \binom{1}{3+1} (0) + \binom{1}{4+1} (5-4)^2 + \binom{1}{5+1} (0) \\ &= \frac{141}{5}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\left(\sum_{d=0}^n \binom{1}{d+1} \overline{(n-d)^2} \right)_{n \in S} = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{28}{3}, \frac{19}{4}, \frac{141}{5} \right).$$

Sedangkan untuk

$$\left((-2) \left[\sum_{d=0}^n \binom{1}{d+1} \overline{(n-d)^2} \right] \right)_{n \in S},$$

karena

$$\overline{(n-d)^2} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n-d \text{ genap,} \\ (n-d)^2, & \text{jika } n-d \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka

- untuk $n = 0$

$$(-2) \left[\sum_{d=0}^0 \binom{1}{d+1} \overline{(0-d)^2} \right] = (-2) \left[\binom{1}{0+1} (0) \right] = 0.$$

- untuk $n = 1$

$$\begin{aligned} (-2) \left[\sum_{d=0}^1 \binom{1}{d+1} \overline{(1-d)^2} \right] &= (-2) \left[\binom{1}{0+1} (1-0)^2 + \binom{1}{1+1} (0) \right] \\ &= -2. \end{aligned}$$

- untuk $n = 2$

$$\begin{aligned} (-2) \left[\sum_{d=0}^2 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(2-d)^2} \right] &= (-2) \left[\left(\frac{1}{0+1} \right) (0) + \left(\frac{1}{1+1} \right) (2-1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2+1} \right) (0) \right] \\ &= -1. \end{aligned}$$

- untuk $n = 3$

$$\begin{aligned} (-2) \left[\sum_{d=0}^3 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(3-d)^2} \right] &= (-2) \left[\left(\frac{1}{0+1} \right) (3-0)^2 + \left(\frac{1}{1+1} \right) (0) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2+1} \right) (3-2)^2 + \left(\frac{1}{3+1} \right) (0) \right] \\ &= -\frac{56}{3}. \end{aligned}$$

- untuk $n = 4$

$$\begin{aligned} (-2) \left[\sum_{d=0}^4 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(4-d)^2} \right] &= (-2) \left[\left(\frac{1}{0+1} \right) (0) + \left(\frac{1}{1+1} \right) (4-1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2+1} \right) (0) + \left(\frac{1}{3+1} \right) (4-3)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4+1} \right) (0) \right] \\ &= -\frac{19}{2}. \end{aligned}$$

- untuk $n = 5$

$$\begin{aligned} (-2) \left[\sum_{d=0}^5 \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(5-d)^2} \right] &= (-2) \left[\left(\frac{1}{0+1} \right) (5-0)^2 + \left(\frac{1}{1+1} \right) (0) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2+1} \right) (5-2)^2 + \left(\frac{1}{3+1} \right) (0) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4+1} \right) (5-4)^2 + \left(\frac{1}{5+1} \right) (0) \right] \\ &= -\frac{282}{5}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\left((-2) \left[\sum_{d=0}^n \left(\frac{1}{d+1} \right) \overline{(n-d)^2} \right] \right)_{n \in S} = \left(0, -2, -1, -\frac{56}{3}, -\frac{19}{2}, -\frac{282}{5} \right).$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] [(n^2)_{n \in S} x] &= \left(\sum_{d=0}^0 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{0-d} (0-d)^2, \right. \\ &\quad \sum_{d=0}^1 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{1-d} (1-d)^2, \\ &\quad \sum_{d=0}^2 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{2-d} (2-d)^2, \\ &\quad \sum_{d=0}^3 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{3-d} (3-d)^2, \\ &\quad \sum_{d=0}^4 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{4-d} (4-d)^2, \\ &\quad \left. \sum_{d=0}^5 \left(\frac{1}{d+1} \right) (-1)^{5-d} (5-d)^2 \right) x^3 \\ &\quad + \left(0, -2, -1, -\frac{56}{3}, -\frac{19}{2}, -\frac{282}{5} \right) x^2 \\ &\quad + \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{28}{3}, \frac{19}{4}, \frac{141}{5} \right) x \\ &= \left(0, -1, \frac{7}{2}, -\frac{22}{3}, \frac{151}{12}, -\frac{96}{5} \right) x^2 \\ &\quad + \left(0, -2, -1, -\frac{56}{3}, -\frac{19}{2}, -\frac{282}{5} \right) x^2 \\ &\quad + \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{28}{3}, \frac{19}{4}, \frac{141}{5} \right) x. \\ \therefore [(n^2)_{n \in S} x] \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] &\neq \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] [(n^2)_{n \in S} x]. \end{aligned}$$

Dalam meninjau struktur dari gelanggang polinom miring, perkalian antara dua anggota gelanggang polinom miring merupakan hal yang akan sering

dijumpai. Namun dengan adanya aturan $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ pada gelanggang polinom miring, maka perkalian dua anggota gelanggang polinom miring tersebut akan membutuhkan proses yang cukup panjang. Hal ini dapat dilihat pada **Contoh 4.8** di mana untuk mencari hasil dari $x^2(n^2)_{n \in S}$ membutuhkan proses yang cukup panjang. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas mengenai rumus hasil kali dari $x^k a$ dengan $a \in R^S$ dan $k \geq 1$ untuk membantu dalam mencari pusat dari $R^S[x; \sigma, \delta]$.

Teorema 4.2

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas gelanggang $(R^S, +, *)$, di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Untuk setiap $(a_n)_{n \in S} \in R^S$ dan $k \geq 1$ maka

$$x^k(a_n)_{n \in S} = ((-1)^{nk} a_n)_{n \in S} x^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m,$$

dengan

$$(-1)^m \binom{k}{m} \overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^m \binom{k}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti:

Akan digunakan induksi matematika untuk membuktikannya.

1. Untuk $k = 1$

$$\begin{aligned} x(a_n)_{n \in S} &= \sigma((a_n)_{n \in S})x + \delta((a_n)_{n \in S}) \\ &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} x + (\overline{a_n})_{n \in S}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(a_n)_{n \in S} &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} x + \sum_{m=0}^{1-1} \left((-1)^m \binom{1}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m \\ &= ((-1)^n a_n)_{n \in S} x + (\overline{a_n})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Sehingga pernyataan benar untuk $k = 1$.

2. Asumsikan pernyataan benar untuk $k = p$, yaitu

$$x^p(a_n)_{n \in S} = ((-1)^{np} a_n)_{n \in S} x^p + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m.$$

3. Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $k = p + 1$, yaitu

$$x^{p+1}(a_n)_{n \in S} = ((-1)^{n(p+1)}a_n)_{n \in S}x^{p+1} + \sum_{m=0}^p \left((-1)^m \binom{p+1}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^{p+1}(a_n)_{n \in S} &= x^p(x(a_n)_{n \in S}) \\ &= x^p(((-1)^n a_n)_{n \in S} x + (\overline{a_n})_{n \in S}) \\ &= x^p((-1)^n a_n)_{n \in S} x + x^p(\overline{a_n})_{n \in S} \\ &= \left\{ ((-1)^{np} (-1)^n a_n)_{n \in S} x^p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{(-1)^n a_n} \right)_{n \in S} x^m \right\} x \\ &\quad + ((-1)^{np} \overline{a_n})_{n \in S} x^p + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{\overline{a_n}} \right)_{n \in S} x^m \\ &= ((-1)^{n(p+1)} a_n)_{n \in S} x^{p+1} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{(-1)^n a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} \\ &\quad + ((-1)^{np} \overline{a_n})_{n \in S} x^p + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{\overline{a_n}} \right)_{n \in S} x^m \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$(-1)^m \binom{p}{m} \overline{(-1)^n a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^{m+1} \binom{p}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$(-1)^{m+1} \binom{p}{m} \overline{\overline{a_n}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^{m+1} \binom{p}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$(-1)^{np} \overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^p a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$(-1)^p \overline{\overline{a_n}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^p a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$(-1)^m \binom{p}{m} \overline{\overline{a_n}} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^m \binom{p}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

$$(-1)^m \binom{p}{m} \overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^m \binom{p}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh,

$$\left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{(-1)^n a_n} \right)_{n \in S} = \left((-1)^{m+1} \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S},$$

$$\left((-1)^{np} \overline{a_n} \right)_{n \in S} = \left((-1)^p \overline{a_n} \right)_{n \in S},$$

$$\left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{\overline{a_n}} \right)_{n \in S} = \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S}.$$

Maka

$$\begin{aligned} x^{p+1}(a_n)_{n \in S} &= \left((-1)^{n(p+1)} a_n \right)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^{m+1} \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} \\ &\quad + \left((-1)^p \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m \\ &= \left((-1)^{n(p+1)} a_n \right)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=0}^{p-1} \left((-1)^{m+1} \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} \\ &\quad + \left((-1)^p \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p + \sum_{m=1}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m \\ &\quad + \left(\overline{a_n} \right)_{n \in S} \\ &= \left((-1)^{n(p+1)} a_n \right)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=0}^{p-2} \left((-1)^{m+1} \binom{p}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} \\ &\quad + \left((-1)^p \binom{p}{p-1} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p + \left((-1)^p \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p \\ &\quad + \sum_{m=0}^{p-2} \left((-1)^{m+1} \binom{p}{m+1} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} + \left(\overline{a_n} \right)_{n \in S} \end{aligned}$$

Oleh karena,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!r(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!(n-r+1)} \\
 &= \frac{n!(n-r+1) + n!r}{(r-1)!r(n-r)!(n-r+1)} \\
 &= \frac{n!(n-r+1+r)}{(r-1)!r(n-r)!(n-r+1)} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(r-1)!r(n-r)!(n-r+1)} \\
 &= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!} \\
 &= \binom{n+1}{r},
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 x^{p+1}(a_n)_{n \in S} &= ((-1)^{n(p+1)}a_n)_{n \in S} x^{p+1} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{p-2} \left((-1)^{m+1} \binom{p+1}{m+1} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^{m+1} \\
 &\quad + \left((-1)^p \left[\binom{p}{p-1} + 1 \right] \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p + (\overline{a_n})_{n \in S} \\
 &= ((-1)^{n(p+1)}a_n)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=1}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p+1}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m \\
 &\quad + ((-1)^p [p+1] \overline{a_n})_{n \in S} x^p + (\overline{a_n})_{n \in S} \\
 &= ((-1)^{n(p+1)}a_n)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=1}^{p-1} \left((-1)^m \binom{p+1}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m \\
 &\quad + \left((-1)^p \binom{p+1}{p} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^p + (\overline{a_n})_{n \in S} \\
 &= ((-1)^{n(p+1)}a_n)_{n \in S} x^{p+1} + \sum_{m=0}^p \left((-1)^m \binom{p+1}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m.
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa pernyataan benar untuk $k = p + 1$.

∴ Pernyataan benar untuk setiap $k \geq 1$. ■

Contoh 4.9

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas $(R^S, +, *)$, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ambil $(2^n)_{n \in S}, \left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} \in R^S$. Akan dicari $x^4(2^n)_{n \in S}$ dan $x^5\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S}$.

$$\begin{aligned} x^4(2^n)_{n \in S} &= ((-1)^{4n} 2^n)_{n \in S} x^4 + \sum_{m=0}^3 \left((-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^m \\ &= (2^n)_{n \in S} x^4 + \left((-1)^0 \binom{4}{0} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^0 + \left((-1)^1 \binom{4}{1} \overline{2^n} \right)_{n \in S} \\ &\quad + \left((-1)^2 \binom{4}{2} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^2 + \left((-1)^3 \binom{4}{3} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^3 \\ &= (2^n)_{n \in S} x^4 + (\overline{2^n})_{n \in S} + ((-4) \overline{2^n})_{n \in S} x + ((6) \overline{2^n})_{n \in S} x^2 \\ &\quad + ((-4) \overline{2^n})_{n \in S} x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in S} &= \left((-1)^{5n} \left(\frac{n}{2}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \sum_{m=0}^4 \left((-1)^m \binom{5}{m} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^m \\ &= \left((-1)^n \left(\frac{n}{2}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \left((-1)^0 \binom{5}{0} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^0 \\ &\quad + \left((-1)^1 \binom{5}{1} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x + \left((-1)^2 \binom{5}{2} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^2 \\ &\quad + \left((-1)^3 \binom{5}{3} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^3 + \left((-1)^4 \binom{5}{4} \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^4 \\ &= \left((-1)^n \left(\frac{n}{2}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \left(\overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} + \left((-5) \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x \\ &\quad + \left((10) \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^2 + \left((-10) \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^3 + \left((5) \overline{\left(\frac{n}{2}\right)} \right)_{n \in S} x^4. \end{aligned}$$

Contoh 4.10

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas $(R^S, +, *)$, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan $S = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$.

Ambil $(n^2)_{n \in S}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} \in R^S$. Akan dicari $x^2(n^2)_{n \in S}$ dan $x^5\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S}$.

$$\begin{aligned} x^2(n^2)_{n \in S} &= ((-1)^{2n}n^2)_{n \in S}x^2 + \sum_{m=0}^1 \left((-1)^m \binom{2}{m} \overline{n^2} \right)_{n \in S} x^m \\ &= (n^2)_{n \in S}x^2 + \left((-1)^0 \binom{2}{0} \overline{n^2} \right)_{n \in S} x^0 + \left((-1)^1 \binom{2}{1} \overline{n^2} \right)_{n \in S} x \\ &= (n^2)_{n \in S}x^2 + (\overline{n^2})_{n \in S} + \left((-2)\overline{n^2} \right)_{n \in S} x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in S} &= \left((-1)^{5n} \left(\frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \sum_{m=0}^4 \left((-1)^m \binom{5}{m} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^m \\ &= \left((-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \left((-1)^0 \binom{5}{0} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^0 \\ &\quad + \left((-1)^1 \binom{5}{1} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x + \left((-1)^2 \binom{5}{2} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^2 \\ &\quad + \left((-1)^3 \binom{5}{3} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^3 \\ &\quad + \left((-1)^4 \binom{5}{4} \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^4 \\ &= \left((-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \right)_{n \in S} x^5 + \left(\overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} \\ &\quad + \left((-5) \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x + \left((10) \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^2 \\ &\quad + \left((-10) \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^3 + \left((5) \overline{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right)_{n \in S} x^4. \end{aligned}$$

Teorema 4.3

Diberikan $R^S[x; \sigma, \delta]$ yaitu gelanggang polinom miring atas $(R^S, +, *)$, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$, $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Jika t merupakan bilangan bulat non-negatif genap maka

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\},$$

sedangkan jika t merupakan bilangan bulat non-negatif ganjil maka

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\},$$

di mana

$$\widetilde{a}_{k,n} = \begin{cases} a_{k,t}, & \text{jika } n = t, \\ 0, & \text{jika } n \neq t, \end{cases}$$

$$\widehat{a}_{0,n} = \begin{cases} a_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif genap maka $Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}$.

Pada bagian pertama dalam pembuktian ini, akan dibuktikan bahwa untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif genap maka

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\},$$

Di dalam bagian pertama pembuktian ini ada dua langkah pembuktian, pada langkah pertama akan dibuktikan

$$\left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]),$$

kemudian pada langkah kedua akan dibuktikan bahwa

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif genap maka

$$\left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]).$$

Misal

$$p_1(x) \in \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\},$$

dengan

$$p_1(x) = \sum_{k=1}^l (\widetilde{b}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{b}_{0,n})_{n \in S},$$

di mana $b_{k,n}, b_{0,n} \in \mathbb{R}$ dan

$$\widetilde{b}_{k,n} = \begin{cases} b_{k,t}, & \text{jika } n = t, \\ 0, & \text{jika } n \neq t, \end{cases}$$

$$\widehat{b}_{0,n} = \begin{cases} b_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Akan diperlihatkan bahwa $p_1(x)q(x) = q(x)p_1(x)$, $\forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Tanpa mengurangi keumuman, dalam pembuktian akan digunakan dua kasus. Pada kasus pertama akan digunakan $q_1(x) = (c_n)_{n \in S}$ dengan $(c_n)_{n \in S}$ berupa elemen sembarang pada gelanggang $(R^S, +, *)$ dan pada kasus kedua akan digunakan $q_2(x) = x$.

Pada kasus pertama $q_1(x) = (c_n)_{n \in S}$.

$$\begin{aligned} p_1(x)q_1(x) &= \left[\sum_{k=1}^l (\widetilde{b}_{k,n})_{n \in S} x^k + (\widehat{b}_{0,n})_{n \in S} \right] (c_n)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l (\widetilde{b}_{k,n})_{n \in S} [x^k (c_n)_{n \in S}] + (\widehat{b}_{0,n})_{n \in S} * (c_n)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l (\widetilde{b}_{k,n})_{n \in S} \left[((-1)^{nk} c_n)_{n \in S} x^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{c}_n \right)_{n \in S} x^m \right] + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b}_{0,d} c_{n-d} \right)_{n \in S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^l \left[(\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} * ((-1)^{nk} c_n)_{n \in S} \right] x^k \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left[(\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{c_n} \right)_{n \in S} \right] x^m \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b_{0,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^{(n-d)k} c_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^m \binom{k}{m} \overline{c_{n-d}} \right)_{n \in S} x^m \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b_{0,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 \widetilde{b_{k,d}} &= \begin{cases} b_{k,t}, & \text{jika } d = t, \\ 0, & \text{jika } d \neq t, \end{cases} \\
 \overline{c_{n-d}} &= \begin{cases} 0, & \text{jika } n - d \text{ genap,} \\ c_{n-d}, & \text{jika } n - d \text{ ganjil,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

dan t adalah bilangan genap. Dengan melihat $\widetilde{b_{k,d}}$, maka $\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^m \binom{k}{m} \overline{c_{n-d}}$ memiliki nilai hanya pada $d = t$. Namun karena jika $d = t$ maka $n = t$. Sehingga untuk $d = t$, akan mengakibatkan $n - d = 0$. Maka $\overline{c_{n-d}} = 0$ pada saat $d = t$. Jadi diperoleh bahwa

$$\left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^m \binom{k}{m} \overline{c_{n-d}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 p_1(x)q_1(x) &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^{(n-d)k} c_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b_{0,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
 q_1(x)p_1(x) &= (c_n)_{n \in S} \left[\sum_{k=1}^l (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^l \left[(c_n)_{n \in S} * (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} \right] x^k + (c_n)_{n \in S} * (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} \\
 &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n c_d \widetilde{b_{k,n-d}} \right)_{n \in S} x^k + \left(\sum_{d=0}^n c_d \widehat{b_{0,n-d}} \right)_{n \in S} \\
 &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} x^k + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b_{0,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
 \widetilde{b_{k,d}} c_{n-d} &= \begin{cases} b_{k,t} c_0, & \text{jika } d = t, \\ 0, & \text{jika } d \neq t, \end{cases} \\
 \widetilde{b_{k,d}} (-1)^{(n-d)k} c_{n-d} &= \begin{cases} b_{k,t} c_0, & \text{jika } d = t, \\ 0, & \text{jika } d \neq t, \end{cases}
 \end{aligned}$$

maka

$$\left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} = \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^{(n-d)k} c_{n-d} \right)_{n \in S} .$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 q_1(x)p_1(x) &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widetilde{b_{k,d}} (-1)^{(n-d)k} c_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{b_{0,d}} c_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Jadi berdasarkan (4.12) dan (4.13) diperoleh bahwa bahwa $p_1(x)q_1(x) = q_1(x)p_1(x)$.

Pada kasus kedua $q_2(x) = x$.

$$p_1(x)q_2(x) = \left[\sum_{k=1}^l (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} \right] x$$

$$= \sum_{k=1}^l (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^{k+1} + (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} x. \quad (4.14)$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} q_2(x)p_1(x) &= x \left[\sum_{k=1}^l (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} \right] \\ &= \sum_{k=1}^l [x(\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S}] x^k + [x(\widehat{b_{0,n}})_{n \in S}] \\ &= \sum_{k=1}^l [((-1)^n \widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x + (\overline{\widetilde{b_{k,n}}})_{n \in S}] x^k \\ &\quad + [((-1)^n \widehat{b_{0,n}})_{n \in S} x + (\overline{\widehat{b_{0,n}}})_{n \in S}] \\ &= \sum_{k=1}^l ((-1)^n \widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^{k+1} + (\overline{\widetilde{b_{k,n}}})_{n \in S} x^k \\ &\quad + ((-1)^n \widehat{b_{0,n}})_{n \in S} x + (\overline{\widehat{b_{0,n}}})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} (-1)^n \widetilde{b_{k,n}} &= \begin{cases} b_{k,t}, & \text{jika } n = t, \\ 0, & \text{jika } n \neq t, \end{cases} \\ \overline{\widetilde{b_{k,n}}} &= 0, \\ (-1)^n \widehat{b_{0,n}} &= \begin{cases} b_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases} \\ \overline{\widehat{b_{0,n}}} &= 0, \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} ((-1)^n \widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} &= (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S}, \\ (\overline{\widetilde{b_{k,n}}})_{n \in S} &= (0_n)_{n \in S}, \\ ((-1)^n \widehat{b_{0,n}})_{n \in S} &= (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S}, \\ (\overline{\widehat{b_{0,n}}})_{n \in S} &= (0_n)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$q_2(x)p_1(x) = \sum_{k=1}^l (\widetilde{b_{k,n}})_{n \in S} x^{k+1} + (\widehat{b_{0,n}})_{n \in S} x. \quad (4.15)$$

Jadi berdasarkan (4.14) dan (4.15) diperoleh bahwa bahwa $p_1(x)q_2(x) = q_2(x)p_1(x)$.

Dengan dibuktikannya $p_1(x)(c_n)_{n \in S} = (c_n)_{n \in S}p_1(x)$ dan $p_1(x)x = xp_1(x)$ untuk sebarang $(c_n)_{n \in S} \in R^S$, maka

$$\begin{aligned} p_1(x)(c_n)_{n \in S}x &= (c_n)_{n \in S}p_1(x)x \\ &= (c_n)_{n \in S}xp_1(x), \end{aligned}$$

Sehingga lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned} p_1(x) \sum_{D=0}^L (c_{n,D})_{n \in S} x^L &= \sum_{D=0}^L p_1(x)(c_{n,D})_{n \in S} x^L \\ &= \sum_{D=0}^L (c_{n,D})_{n \in S} x^L p_1(x). \end{aligned}$$

Jadi untuk sebarang polinom pada $R^S[x; \sigma, \delta]$, maka perkalian $p_1(x)$ dengan polinom tersebut akan komutatif. Sehingga disimpulkan bahwa $p_1(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ dan

$$\left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]).$$

b) Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif genap maka

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ambil $p_2(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$, sedemikian sehingga $p_2(x)q(x) = q(x)p_2(x), \forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Tulis

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^l (h_{k,n})_{n \in S} x^k. \quad (4.16)$$

Untuk kasus pertama akan dipilih $q_2(x) = x$ maka,

$$p_2(x)q_2(x) = \left[\sum_{k=0}^l (h_{k,n})_{n \in S} x^k \right] x$$

$$= \sum_{k=0}^l (h_{k,n})_{n \in S} x^{k+1}. \quad (4.17)$$

Di sisi lain

$$\begin{aligned} q_2(x)p_2(x) &= x \left[\sum_{k=0}^l (h_{k,n})_{n \in S} x^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^l [x(h_{k,n})_{n \in S}] x^k \\ &= \sum_{k=0}^l [((-1)^n h_{k,n})_{n \in S} x + (\overline{h_{k,n}})_{n \in S}] x^k \\ &= \sum_{k=0}^l ((-1)^n h_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} + (\overline{h_{k,n}})_{n \in S} x^k. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Karena $p_2(x)q_2(x) = q_2(x)p_2(x)$, maka dengan menyamakan persamaan (4.17) dan (4.18) diperoleh

$$\sum_{k=0}^l (h_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} = \sum_{k=0}^l ((-1)^n h_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} + (\overline{h_{k,n}})_{n \in S} x^k.$$

Sehingga diperoleh perbandingan-perbandingan berikut

$$(0_n)_{n \in S} = (\overline{h_{0,n}})_{n \in S}, \quad (4.19)$$

$$(h_{0,n})_{n \in S} x = ((-1)^n h_{0,n})_{n \in S} x + (\overline{h_{1,n}})_{n \in S} x, \quad (4.20)$$

$$(h_{1,n})_{n \in S} x^2 = ((-1)^n h_{1,n})_{n \in S} x^2 + (\overline{h_{2,n}})_{n \in S} x^2, \quad (4.21)$$

⋮

$$(h_{l-1,n})_{n \in S} x^l = ((-1)^n h_{l-1,n})_{n \in S} x^l + (\overline{h_{l,n}})_{n \in S} x^l, \quad (4.22)$$

$$(h_{l,n})_{n \in S} x^{l+1} = ((-1)^n h_{l,n})_{n \in S} x^{l+1}. \quad (4.23)$$

Pada persamaan (4.19), karena

$$(\overline{h_{0,n}})_{n \in S} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ h_{0,n}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka $h_{0,n} = 0$ untuk n ganjil.

Pada persamaan (4.20), karena $h_{0,n} = 0$ untuk n ganjil, maka

$$((-1)^n h_{0,n})_{n \in S} = (h_{0,n})_{n \in S}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (h_{0,n})_{n \in S} x &= (h_{0,n})_{n \in S} x + (\overline{h_{1,n}})_{n \in S} x \\ &= (h_{0,n} + \overline{h_{1,n}})_{n \in S} x, \end{aligned}$$

di mana

$$h_{0,n} + \overline{h_{1,n}} = \begin{cases} h_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ h_{1,n}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh bahwa $h_{1,n} = 0$ untuk n ganjil.

Dengan cara yang sama untuk perbandingan pada koefisien x^2, x^3, \dots , dan x^l , maka akan diperoleh bahwa untuk n ganjil $h_{k,n} = 0$ dengan $0 \leq k \leq l$.

Sehingga persamaan (4.16) menjadi

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^l (\widehat{h_{k,n}})_{n \in S} x^k, \quad (4.24)$$

di mana

$$\widehat{h_{k,n}} = \begin{cases} h_{k,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Untuk kasus kedua akan dipilih $q_3(x) = (L_n)_{n \in S}$, dengan

$$L_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 1, \\ 0, & \text{jika } n \neq 1. \end{cases}$$

Maka

$$\begin{aligned} p_2(x)q_3(x) &= \left[\sum_{k=0}^l (\widehat{h_{k,n}})_{n \in S} x^k \right] (L_n)_{n \in S} \\ &= \left[\sum_{k=1}^l (\widehat{h_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{h_{0,n}})_{n \in S} \right] (L_n)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l (\widehat{h_{k,n}})_{n \in S} [x^k (L_n)_{n \in S}] + (\widehat{h_{0,n}})_{n \in S} * (L_n)_{n \in S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^l (\widehat{h}_{k,n})_{n \in S} \left[((-1)^{nk} L_n)_{n \in S} x^k \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{L}_n \right)_{n \in S} x^m \right] + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{0,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned}$$

Karena

$$L_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 1, \\ 0, & \text{jika } n \neq 1, \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned}
 ((-1)^{nk} L_n)_{n \in S} &= ((-1)^k L_n)_{n \in S}, \\
 \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{L}_n \right)_{n \in S} &= \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S} .
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 p_2(x)q_3(x) &= \sum_{k=1}^l (\widehat{h}_{k,n})_{n \in S} \left[((-1)^k L_n)_{n \in S} x^k \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S} x^m \right] + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{0,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \sum_{k=1}^l \left[(\widehat{h}_{k,n})_{n \in S} * ((-1)^k L_n)_{n \in S} \right] x^k \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left[(\widehat{h}_{k,n})_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S} \right] x^m \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{0,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} \\
 &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{k,d} (-1)^k L_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{k,d} (-1)^m \binom{k}{m} L_{n-d} \right)_{n \in S} x^m \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{0,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} .
 \end{aligned}$$

Perhatikan karena

$$L_{n-d} = \begin{cases} 1, & \text{jika } n - d = 1, \\ 0, & \text{jika } n - d \neq 1, \end{cases}$$

dan

$$\widehat{h}_{k,d} = \begin{cases} h_{k,d}, & \text{jika } d \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } d \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{k,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} &= (\widehat{h}_{k,0} L_n + \widehat{h}_{k,1} L_{n-1} + \cdots + \widehat{h}_{k,n-1} L_1 + \widehat{h}_{k,n} L_0)_{n \in S} \\ &= (\widehat{h}_{k,n-1})_{n \in S}, \end{aligned}$$

atau

$$\sum_{d=0}^n \widehat{h}_{k,d} L_{n-d} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ h_{k,n-1}, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} p_2(x)q_3(x) &= \sum_{k=1}^l ((-1)^k \widehat{h}_{k,n-1})_{n \in S} x^k \\ &+ \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \widehat{h}_{k,n-1} \right)_{n \in S} x^m \\ &+ (\widehat{h}_{0,n-1})_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Perhatikan pada bagian berikut dari persamaan (4.25)

$$\sum_{k=1}^l ((-1)^k \widehat{h}_{k,n-1})_{n \in S} x^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \widehat{h}_{k,n-1} \right)_{n \in S} x^m.$$

Untuk $k = 1$:

$$\begin{aligned} &((-1) \widehat{h}_{1,n-1})_{n \in S} x + \sum_{m=0}^0 \left((-1)^m \binom{1}{m} \widehat{h}_{1,n-1} \right)_{n \in S} x^m \\ &= ((-1) \widehat{h}_{1,n-1})_{n \in S} x + \left((-1)^0 \binom{1}{0} \widehat{h}_{1,n-1} \right)_{n \in S} \\ &= \sum_{r_1=0}^1 \left((-1)^{r_1} \binom{1}{r_1} \widehat{h}_{1,n-1} \right)_{n \in S} x^{r_1}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Untuk $k = 2$:

$$\begin{aligned}
 & ((-1)^2 \widehat{h_{2,n-1}})_{n \in S} x^2 + \sum_{m=0}^1 \left((-1)^m \binom{2}{m} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} x^m \\
 &= ((-1)^2 \widehat{h_{2,n-1}})_{n \in S} x^2 + \left((-1)^0 \binom{2}{0} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} \\
 &\quad + \left((-1) \binom{2}{1} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} x \\
 &= \sum_{r_2=0}^2 \left((-1)^{r_2} \binom{2}{r_2} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_2}. \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

⋮

Untuk $k = l$:

$$\begin{aligned}
 & ((-1)^l \widehat{h_{l,n-1}})_{n \in S} x^l + \sum_{m=0}^{l-1} \left((-1)^m \binom{l}{m} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^m \\
 &= ((-1)^l \widehat{h_{l,n-1}})_{n \in S} x^l + \left(\widehat{h_{l,d}} (-1)^0 \binom{l}{0} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} \\
 &\quad + \left((-1) \binom{l}{1} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x + \dots \\
 &\quad + \left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} \\
 &= \sum_{r_l=0}^l \left((-1)^{r_l} \binom{l}{r_l} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_l}. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Sehingga dengan mensubstitusi (4.26), (4.27), dan (4.28) ke (4.25) diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_2(x)q_3(x) &= \sum_{r_1=0}^1 \left((-1)^{r_1} \binom{1}{r_1} \widehat{h_{1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_1} \\
 &\quad + \sum_{r_2=0}^2 \left((-1)^{r_2} \binom{2}{r_2} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_2} + \dots \\
 &\quad + \sum_{r_{l-1}=0}^{l-1} \left((-1)^{r_{l-1}} \binom{l-1}{r_{l-1}} \widehat{h_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_{l-1}} \\
 &\quad + \sum_{r_l=0}^l \left((-1)^{r_l} \binom{l}{r_l} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^{r_l} \\
 &\quad + \left(\widehat{h_{0,n-1}} \right)_{n \in S} \\
 &= \left((-1)^l \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^l + \left[\left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{h_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} \right] x^{l-1} + \dots \\
 &\quad + \left[\left(\binom{l}{2} \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\binom{l-1}{2} \widehat{h_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\binom{2}{2} \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} \right] x^2 + \left[\left((-l) \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left(-(l-1) \widehat{h_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} + \dots + \left(-2 \widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left((-1) \widehat{h_{1,n-1}} \right)_{n \in S} \right] + \left[\left(\widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{h_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\widehat{h_{2,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{h_{1,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{h_{0,n-1}} \right)_{n \in S} \right] \\
 &= \left((-1)^l \widehat{h_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^l \\
 &\quad + \sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{h_{g_{l-1},n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} + \dots \\
 &\quad + \sum_{g_2=2}^l \left(\binom{g_2}{2} \widehat{h_{g_2,n-1}} \right)_{n \in S} x^2 \\
 &\quad + \sum_{g_1=1}^l \left((-g_1) \widehat{h_{g_1,n-1}} \right)_{n \in S} x + \sum_{g_0=0}^l \left(\widehat{h_{g_0,n-1}} \right)_{n \in S}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{T=0}^l \sum_{g_T=T}^l \left((-1)^T \binom{g_T}{T} \widehat{h_{g_T, n-1}} \right)_{n \in S} x^T. \quad (4.29)$$

Pada sisi lain,

$$\begin{aligned} q_3(x)p_2(x) &= (L_n)_{n \in S} \left[\sum_{k=0}^l (\widehat{h_{k, n}})_{n \in S} x^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^l \left[(L_n)_{n \in S} * (\widehat{h_{k, n}})_{n \in S} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^l \left[(\widehat{h_{k, n}})_{n \in S} * (L_n)_{n \in S} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^l \left(\sum_{d=0}^n \widehat{h_{k, d}} L_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\ &= \sum_{k=0}^l (\widehat{h_{k, n-1}})_{n \in S} x^k. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Karena $p_2(x)q_3(x) = q_3(x)p_2(x)$, maka dengan menyamakan persamaan (4.29) dan persamaan (4.30) akan diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\sum_{g_0=0}^l (\widehat{h_{g_0, n-1}})_{n \in S} = (\widehat{h_{0, n-1}})_{n \in S}, \quad (4.31)$$

$$\sum_{g_1=1}^l \left((-g_1) \widehat{h_{g_1, n-1}} \right)_{n \in S} x = (\widehat{h_{1, n-1}})_{n \in S} x, \quad (4.32)$$

⋮

$$\sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{h_{g_{l-1}, n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} = (\widehat{h_{l-1, n-1}})_{n \in S} x^{l-1} \quad (4.33)$$

$$\left((-1)^l \widehat{h_{l, n-1}} \right)_{n \in S} x^l = (\widehat{h_{l, n-1}})_{n \in S} x^l. \quad (4.34)$$

Pada persamaan (4.34), karena $p_2(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ sedemikian sehingga $p_2(x)q(x) = q(x)p_2(x), \forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Maka dari itu, $p_2(x)q(x) = q(x)p_2(x)$ untuk setiap $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, akibatnya

$$\left((-1)^l \widehat{h_{l,n-1}}\right)_{n \in S} = \left(\widehat{h_{l,n-1}}\right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

dan

$$h_{l,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t - 1$. Selanjutnya pada persamaan (4.33) diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1} &= \sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{h_{g_{l-1},n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1} \\ &= \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1} \\ &\quad + \left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{h_{l,n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1}. \end{aligned}$$

Karena

$$\left(\widehat{h_{l,n-1}}\right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

maka

$$\left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{h_{l,n-1}}\right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S}.$$

Akibatnya

$$\left(\widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1} = \left((-1)^{l-1} \widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} x^{l-1}.$$

Oleh karena $p_2(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ sedemikian sehingga $p_2(x)q(x) = q(x)p_2(x)$, $\forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Maka $p_2(x)q(x) = q(x)p_2(x)$ untuk setiap $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, akibatnya

$$\left(\widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} = \left((-1)^{l-1} \widehat{h_{l-1,n-1}}\right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

dan

$$h_{l-1,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t - 1$. Dengan cara yang sama pada perbandingan koefisien $x^{l-2}, x^{l-3}, \dots, x^2$, dan x , maka akan diperoleh

$$\left(\widehat{h_{k,n-1}}\right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

Untuk $1 \leq k \leq l$, serta

$$h_{l,n} = h_{l-1,n} = h_{l-2,n} = \dots = h_{2,n} = h_{1,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t - 1$. Namun untuk persamaan (4.31) diperoleh

$$\begin{aligned} (\widehat{h_{0,n-1}})_{n \in S} &= \sum_{g_0=0}^l (\widehat{h_{g_0,n-1}})_{n \in S} \\ &= (\widehat{h_{0,n-1}})_{n \in S} + (\widehat{h_{1,n-1}})_{n \in S} + \cdots + (\widehat{h_{l-1,n-1}})_{n \in S} \\ &\quad + (\widehat{h_{l,n-1}})_{n \in S} \\ &= (\widehat{h_{0,n-1}})_{n \in S} + (0_n)_{n \in S} \\ &= (\widehat{h_{0,n-1}})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk n berupa bilangan genap, h_{0n} dapat berupa bilangan riil sebarang di mana $0 \leq n \leq t - 1$. Jadi persamaan (4.24) menjadi

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^l (\widetilde{h_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{h_{0,n}})_{n \in S}, \quad (4.35)$$

di mana

$$\begin{aligned} \widetilde{h_{k,n}} &= \begin{cases} h_{k,t}, & \text{jika } n = t, \\ 0, & \text{jika } n \neq t, \end{cases} \\ \widehat{h_{0,n}} &= \begin{cases} h_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases} \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$p_2(x) \in \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dan akibatnya,

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Karena diperoleh untuk t berupa bilangan bulat non-negatif genap bahwa

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\},$$

dan

$$\left\{ \sum_{k=1}^l (\widehat{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]).$$

Jadi dapat disimpulkan untuk t berupa bilangan bulat non-negatif genap maka:

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ \sum_{k=1}^l (\widehat{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}. \blacksquare$$

2. Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif ganjil maka $Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}$.

Pada bagian kedua dalam pembuktian ini, akan dibuktikan bahwa untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif ganjil maka

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}.$$

Di dalam bagian kedua pembuktian ini ada dua langkah pembuktian, pada langkah pertama akan dibuktikan

$$\{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]),$$

kemudian pada langkah kedua akan dibuktikan bahwa

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif ganjil maka $\{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta])$.

Misal

$$p_3(x) \in \{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\},$$

dengan

$$p_3(x) = (e_{0,n})_{n \in S}, \tag{4.36}$$

di mana $e_{0,n} \in \mathbb{R}$ dan

$$e_{0,n} = \begin{cases} e_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Akan diperlihatkan bahwa $p_3(x)q(x) = q(x)p_3(x)$, $\forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Tanpa mengurangi keumuman, dalam pembuktian akan digunakan dua kasus. Pada kasus pertama akan digunakan $q_4(x) = (c_n)_{n \in S}$ dengan

$(c_n)_{n \in S}$ berupa elemen sembarang pada gelanggang $(R^S, +, *)$ dan pada kasus kedua akan digunakan $q_5(x) = x$.

Pada kasus pertama $q_4(x) = (c_n)_{n \in S}$. Karena gelanggang $(R^S, +, *)$ merupakan gelanggang komutatif sehingga

$$\begin{aligned} p_3(x)q_4(x) &= \left[(\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} \right] (c_n)_{n \in S} \\ &= (\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} * (c_n)_{n \in S} \\ &= (c_n)_{n \in S} * (\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} \\ &= q_4(x)p_3(x). \end{aligned}$$

Jadi pada kasus pertama diperoleh bahwa $p_3(x)q_4(x) = q_4(x)p_3(x)$.

Pada kasus kedua $q_5(x) = x$.

$$\begin{aligned} p_3(x)q_5(x) &= \left[(\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} \right] x \\ &= (\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} x. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Pada sisi lain,

$$\begin{aligned} q_5(x)p_3(x) &= x \left[(\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} \right] \\ &= x(\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} \\ &= ((-1)^n \widehat{e_{0,n}})_{n \in S} x + (\overline{\widehat{e_{0,n}}})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} (-1)^n \widehat{e_{0,n}} &= \begin{cases} e_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases} \\ \overline{\widehat{e_{0,n}}} &= 0, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} ((-1)^n \widehat{e_{0,n}})_{n \in S} &= (\widehat{e_{0,n}})_{n \in S}, \\ (\overline{\widehat{e_{0,n}}})_{n \in S} &= (0_n)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$q_5(x)p_3(x) = (\widehat{e_{0,n}})_{n \in S} x. \tag{4.38}$$

Berdasarkan (4.37) dan (4.38) diperoleh bahwa $p_3(x)q_5(x) = q_5(x)p_3(x)$.

Dengan dibuktikannya $p_3(x)(c_n)_{n \in S} = (c_n)_{n \in S}p_3(x)$ dan $p_3(x)x = xp_3(x)$ untuk sebarang $(c_n)_{n \in S} \in R^S$, maka

$$\begin{aligned} p_3(x)(c_n)_{n \in S}x &= (c_n)_{n \in S}p_3(x)x \\ &= (c_n)_{n \in S}xp_3(x), \end{aligned}$$

Sehingga lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned} p_3(x) \sum_{D=0}^L (c_{n,D})_{n \in S} x^L &= \sum_{D=0}^L p_3(x)(c_{n,D})_{n \in S} x^L \\ &= \sum_{D=0}^L (c_{n,D})_{n \in S} x^L p_3(x). \end{aligned}$$

Jadi untuk sebarang polinom pada $R^S[x; \sigma, \delta]$, maka perkalian $p_3(x)$ dengan polinom tersebut akan komutatif. Sehingga disimpulkan bahwa $p_3(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ dan

$$\{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]).$$

- b) Untuk t merupakan bilangan bulat non-negatif ganjil maka $Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \{(\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}$.

Ambil $p_4(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$, sedemikian sehingga $p_4(x)q(x) = q(x)p_4(x), \forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Tulis

$$p_4(x) = \sum_{k=0}^l (z_{k,n})_{n \in S} x^k. \quad (4.39)$$

Untuk kasus pertama akan dipilih $q_5(x) = x$ maka,

$$\begin{aligned} p_4(x)q_5(x) &= \left[\sum_{k=0}^l (z_{k,n})_{n \in S} x^k \right] x \\ &= \sum_{k=0}^l (z_{k,n})_{n \in S} x^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Di sisi lain

$$q_5(x)p_4(x) = x \left[\sum_{k=0}^l (z_{k,n})_{n \in S} x^k \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^l [x(z_{k,n})_{n \in S}] x^k \\
 &= \sum_{k=0}^l [((-1)^n z_{k,n})_{n \in S} x + (\overline{z_{k,n}})_{n \in S}] x^k \\
 &= \sum_{k=0}^l ((-1)^n z_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} + (\overline{z_{k,n}})_{n \in S} x^k. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Karena $p_4(x)q_5(x) = q_5(x)p_4(x)$, maka dengan menyamakan persamaan (4.40) dan (4.41) diperoleh

$$\sum_{k=0}^l (z_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} = \sum_{k=0}^l ((-1)^n z_{k,n})_{n \in S} x^{k+1} + (\overline{z_{k,n}})_{n \in S} x^k.$$

Sehingga didapatkan perbandingan-perbandingan berikut

$$(0_n)_{n \in S} = (\overline{z_{0,n}})_{n \in S}, \tag{4.42}$$

$$(z_{0,n})_{n \in S} x = ((-1)^n z_{0,n})_{n \in S} x + (\overline{z_{1,n}})_{n \in S} x, \tag{4.43}$$

$$(z_{1,n})_{n \in S} x^2 = ((-1)^n z_{1,n})_{n \in S} x^2 + (\overline{z_{2,n}})_{n \in S} x^2, \tag{4.44}$$

⋮

$$(z_{l-1,n})_{n \in S} x^l = ((-1)^n z_{l-1,n})_{n \in S} x^l + (\overline{z_{l,n}})_{n \in S} x^l, \tag{4.45}$$

$$(z_{l,n})_{n \in S} x^{l+1} = ((-1)^n z_{l,n})_{n \in S} x^{l+1}. \tag{4.46}$$

Pada persamaan (4.42), karena

$$(\overline{z_{0,n}})_{n \in S} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ z_{0,n}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

maka $z_{0,n} = 0$ untuk n ganjil.

Pada persamaan (4.43), Karena $z_{0,n} = 0$ untuk n ganjil, maka

$$((-1)^n z_{0,n})_{n \in S} = (z_{0,n})_{n \in S}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 (z_{0,n})_{n \in S} x &= (z_{0,n})_{n \in S} x + (\overline{z_{1,n}})_{n \in S} x \\
 &= (z_{0,n} + \overline{z_{1,n}})_{n \in S} x,
 \end{aligned}$$

di mana

$$z_{0,n} + \overline{z_{1,n}} = \begin{cases} z_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ z_{1,n}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh bahwa $z_{1,n} = 0$ untuk n ganjil.

Dengan cara yang sama untuk perbandingan pada koefisien x^2, x^3, \dots , dan x^l , maka akan diperoleh bahwa untuk n ganjil $z_{k,n} = 0$ dengan $0 \leq k \leq l$.

Sehingga persamaan (4.39) menjadi

$$p_4(x) = \sum_{k=0}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} x^k, \quad (4.47)$$

di mana

$$\widehat{z_{k,n}} = \begin{cases} z_{k,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Untuk kasus kedua akan dipilih $q_6(x) = (L_n)_{n \in S}$, dengan

$$L_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 1, \\ 0, & \text{jika } n \neq 1. \end{cases}$$

Maka

$$\begin{aligned} p_4(x)q_6(x) &= \left[\sum_{k=0}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} x^k \right] (L_n)_{n \in S} \\ &= \left[\sum_{k=1}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{z_{0,n}})_{n \in S} \right] (L_n)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} [x^k (L_n)_{n \in S}] + (\widehat{z_{0,n}})_{n \in S} * (L_n)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} \left[((-1)^{nk} L_n)_{n \in S} x^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{L_n} \right)_{n \in S} x^m \right] + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{0,d}} L_{n-d} \right)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Karena

$$L_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 1, \\ 0, & \text{jika } n \neq 1, \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned} ((-1)^{nk}L_n)_{n \in S} &= ((-1)^k L_n)_{n \in S}, \\ \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{L_n} \right)_{n \in S} &= \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} p_4(x)q_6(x) &= \sum_{k=1}^l (\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} \left[((-1)^k L_n)_{n \in S} x^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S} x^m \right] + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{0,d}} L_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l \left[(\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} * ((-1)^k L_n)_{n \in S} \right] x^k \\ &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left[(\widehat{z_{k,n}})_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{k}{m} L_n \right)_{n \in S} \right] x^m \\ &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{0,d}} L_{n-d} \right)_{n \in S} \\ &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{k,d}} (-1)^k L_{n-d} \right)_{n \in S} x^k \\ &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{k,d}} (-1)^m \binom{k}{m} L_{n-d} \right)_{n \in S} x^m \\ &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{0,d}} L_{n-d} \right)_{n \in S} \end{aligned}$$

Perhatikan karena

$$L_{n-d} = \begin{cases} 1, & \text{jika } n - d = 1, \\ 0, & \text{jika } n - d \neq 1, \end{cases}$$

dan

$$\widehat{z_{k,d}} = \begin{cases} z_{k,d}, & \text{jika } d \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } d \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z}_{k,d} L_{n-d} \right)_{n \in S} &= (\widehat{z}_{k,0} L_n + \widehat{z}_{k,1} L_{n-1} + \cdots + \widehat{z}_{k,n-1} L_1 + \widehat{z}_{k,n} L_0)_{n \in S} \\ &= (\widehat{z}_{k,n-1})_{n \in S}, \end{aligned}$$

atau

$$\sum_{d=0}^n \widehat{z}_{k,d} L_{n-d} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ z_{k,n-1}, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} p_4(x)q_6(x) &= \sum_{k=1}^l ((-1)^k \widehat{z}_{k,n-1})_{n \in S} x^k \\ &+ \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \widehat{z}_{k,n-1} \right)_{n \in S} x^m \\ &+ (\widehat{z}_{0,n-1})_{n \in S}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Perhatikan pada bagian berikut dari (4.48)

$$\sum_{k=1}^l ((-1)^k \widehat{z}_{k,n-1})_{n \in S} x^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \widehat{z}_{k,n-1} \right)_{n \in S} x^m.$$

Untuk $k = 1$:

$$\begin{aligned} &((-1) \widehat{z}_{1,n-1})_{n \in S} x + \sum_{m=0}^0 \left((-1)^m \binom{1}{m} \widehat{z}_{1,n-1} \right)_{n \in S} x^m \\ &= ((-1) \widehat{z}_{1,n-1})_{n \in S} x + \left((-1)^0 \binom{1}{0} \widehat{z}_{1,n-1} \right)_{n \in S} \\ &= \sum_{r_1=0}^1 \left((-1)^{r_1} \binom{1}{r_1} \widehat{z}_{1,n-1} \right)_{n \in S} x^{r_1}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Untuk $k = 2$:

$$((-1)^2 \widehat{z}_{2,n-1})_{n \in S} x^2 + \sum_{m=0}^1 \left((-1)^m \binom{2}{m} \widehat{z}_{2,n-1} \right)_{n \in S} x^m$$

$$\begin{aligned}
 &= ((-1)^2 \widehat{z_{2,n-1}})_{n \in S} x^2 + ((-1)^0 \binom{2}{0} \widehat{z_{2,n-1}})_{n \in S} \\
 &\quad + ((-1) \binom{2}{1} \widehat{z_{2,n-1}})_{n \in S} x \\
 &= \sum_{r_2=0}^2 ((-1)^{r_2} \binom{2}{r_2} \widehat{h_{2,n-1}})_{n \in S} x^{r_2}. \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

⋮

Untuk $k = l$:

$$\begin{aligned}
 &((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^l + \sum_{m=0}^{l-1} ((-1)^m \binom{l}{m} \widehat{h_{l,n-1}})_{n \in S} x^m \\
 &= ((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^l + (\widehat{h_{l,d}} (-1)^0 \binom{l}{0} \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} \\
 &\quad + ((-1) \binom{l}{1} \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x + \dots \\
 &\quad + ((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^{l-1} \\
 &= \sum_{r_l=0}^l ((-1)^{r_l} \binom{l}{r_l} \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^{r_l}. \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

Sehingga dengan mensubstitusi (4.49), (4.50), dan (4.51) ke (4.48) diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_4(x)q_6(x) &= \sum_{r_1=0}^1 ((-1)^{r_1} \binom{1}{r_1} \widehat{z_{1,n-1}})_{n \in S} x^{r_1} \\
 &\quad + \sum_{r_2=0}^2 ((-1)^{r_2} \binom{2}{r_2} \widehat{z_{2,n-1}})_{n \in S} x^{r_2} + \dots \\
 &\quad + \sum_{r_{l-1}=0}^{l-1} ((-1)^{r_{l-1}} \binom{l-1}{r_{l-1}} \widehat{z_{l-1,n-1}})_{n \in S} x^{r_{l-1}} \\
 &\quad + \sum_{r_l=0}^l ((-1)^{r_l} \binom{l}{r_l} \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^{r_l} \\
 &\quad + (\widehat{z_{0,n-1}})_{n \in S}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^l + \left[\left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} \right] x^{l-1} + \dots \\
 &\quad + \left[\left(\binom{l}{2} \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\binom{l-1}{2} \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\binom{2}{2} \widehat{z_{2,n-1}} \right)_{n \in S} \right] x^2 + \left[\left((-l) \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left(-(l-1) \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} + \dots + \left((-2) \widehat{z_{2,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \left((-1) \widehat{z_{1,n-1}} \right)_{n \in S} \right] + \left[\left(\widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\widehat{z_{2,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{z_{1,n-1}} \right)_{n \in S} + \left(\widehat{z_{0,n-1}} \right)_{n \in S} \right] \\
 &= ((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} x^l \\
 &\quad + \sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{z_{g_{l-1},n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} + \dots \\
 &\quad + \sum_{g_2=2}^l \left(\binom{g_2}{2} \widehat{z_{g_2,n-1}} \right)_{n \in S} x^2 \\
 &\quad + \sum_{g_1=1}^l \left((-g_1) \widehat{z_{g_1,n-1}} \right)_{n \in S} x + \sum_{g_0=0}^l \left(\widehat{z_{g_0,n-1}} \right)_{n \in S} \\
 &= \sum_{T=0}^l \sum_{g_T=T}^l \left((-1)^T \binom{g_T}{T} \widehat{z_{g_T,n-1}} \right)_{n \in S} x^T. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

Pada sisi lain,

$$\begin{aligned}
 q_6(x)p_4(x) &= (L_n)_{n \in S} \left[\sum_{k=0}^l \left(\widehat{z_{k,n}} \right)_{n \in S} x^k \right] \\
 &= \sum_{k=0}^l \left[(L_n)_{n \in S} * \left(\widehat{z_{k,n}} \right)_{n \in S} \right] x^k \\
 &= \sum_{k=0}^l \left[\left(\widehat{z_{k,n}} \right)_{n \in S} * (L_n)_{n \in S} \right] x^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^l \left(\sum_{d=0}^n \widehat{z_{k,d} L_{n-d}} \right)_{n \in S} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^l \left(\widehat{z_{k,n-1}} \right)_{n \in S} x^k. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

Karena $p_4(x)q_6(x) = q_6(x)p_4(x)$, maka dengan menyamakan persamaan (4.52) dan persamaan (4.53) akan diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\sum_{g_0=0}^l \left(\widehat{z_{g_0,n-1}} \right)_{n \in S} = \left(\widehat{z_{0,n-1}} \right)_{n \in S}, \tag{4.53}$$

$$\sum_{g_1=1}^l \left((-g_1) \widehat{z_{g_1,n-1}} \right)_{n \in S} x = \left(\widehat{z_{1,n-1}} \right)_{n \in S} x, \tag{4.54}$$

⋮

$$\sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{z_{g_{l-1},n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} = \left(\widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1}, \tag{4.55}$$

$$\left((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^l = \left(\widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^l. \tag{4.56}$$

Pada persamaan (4.57), karena $p_4(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ sedemikian sehingga $p_4(x)q(x) = q(x)p_4(x), \forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Maka dari itu, $p_4(x)q(x) = q(x)p_4(x)$ untuk setiap $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, akibatnya

$$\left((-1)^l \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} = \left(\widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

dan

$$z_{l,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t-1$. Selanjutnya pada persamaan (4.56) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left(\widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} &= \sum_{g_{l-1}=l-1}^l \left((-1)^{l-1} \binom{g_{l-1}}{l-1} \widehat{z_{g_{l-1},n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} \\
 &= \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1} \\
 &\quad + \left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1}.
 \end{aligned}$$

Karena

$$(\widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

maka

$$\left((-1)^{l-1} \binom{l}{l-1} \widehat{z_{l,n-1}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S}.$$

Akibatnya

$$(\widehat{z_{l-1,n-1}})_{n \in S} x^{l-1} = \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} x^{l-1}.$$

Oleh karena $p_4(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ sedemikian sehingga $p_4(x)q(x) = q(x)p_4(x), \forall q(x) \in R^S[x; \sigma, \delta]$. Sehingga $p_4(x)q(x) = q(x)p_4(x)$ untuk setiap $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, akibatnya

$$(\widehat{z_{l-1,n-1}})_{n \in S} = \left((-1)^{l-1} \binom{l-1}{l-1} \widehat{z_{l-1,n-1}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

dan

$$z_{l-1,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t-1$. Dengan cara yang sama pada perbandingan koefisien $x^{l-2}, x^{l-3}, \dots, x^2$, dan x , maka akan diperoleh

$$(\widehat{z_{k,n-1}})_{n \in S} = (0_n)_{n \in S},$$

Untuk $1 \leq k \leq l$, serta

$$z_{l,n} = z_{l-1,n} = z_{l-2,n} = \dots = z_{2,n} = z_{1,n} = 0,$$

untuk n berupa bilangan genap dengan $0 \leq n \leq t-1$. Namun karena

$$\begin{aligned} (\widehat{z_{0,n-1}})_{n \in S} &= \sum_{g_0=0}^l (\widehat{z_{g_0,n-1}})_{n \in S} \\ &= (\widehat{z_{0,n-1}})_{n \in S} + (\widehat{z_{1,n-1}})_{n \in S} + \dots + (\widehat{z_{l-1,n-1}})_{n \in S} \\ &\quad + (\widehat{z_{l,n-1}})_{n \in S} \\ &= (\widehat{z_{0,n-1}})_{n \in S} + (0_n)_{n \in S} \\ &= (\widehat{z_{0,n-1}})_{n \in S}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk n berupa bilangan genap, $z_{0,n}$ dapat berupa bilangan riil sebarang di mana $0 \leq n \leq t-1$. Jadi persamaan (4.47) menjadi

$$p_4(x) = (\widehat{z}_{0,n})_{n \in S},$$

di mana

$$\widehat{z}_{0,n} = \begin{cases} z_{0,n}, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Jadi diperoleh bahwa,

$$p_4(x) \in \{(\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}.$$

Dan akibatnya,

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \{(\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}.$$

Karena diperoleh untuk t berupa bilangan bulat non-negatif ganjil bahwa

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) \subseteq \{(\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\},$$

dan

$$\{(\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(R^S[x; \sigma, \delta]).$$

Jadi dapat disimpulkan untuk t berupa bilangan bulat non-negatif ganjil maka:

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \{(\widehat{a}_{0,n})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R}\}. \blacksquare$$

Contoh 4.11

Diberikan gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga

$R^S[x; \sigma, \delta]$, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan

$S = \{0,1,2,3,4\}$. Ambil $H(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ dengan

$$H(x) = \left(\frac{\tilde{n}}{2}\right)_{n \in S} x^4 + (\widehat{2}^n)_{n \in S},$$

di mana

$$\frac{\tilde{n}}{2} = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 4, \\ 0, & \text{jika } n \neq t, \end{cases}$$

$$\widehat{2}^n = \begin{cases} 2^n, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

dan

$$Q(x) = (2^n)_{n \in S} x^5 \in R^S[x; \sigma, \delta].$$

Akan diperlihatkan bahwa $H(x)Q(x) = Q(x)H(x)$.

$$\begin{aligned}
 H(x)Q(x) &= \left[\left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} x^4 + (\widehat{2^n})_{n \in S} \right] [(2^n)_{n \in S} x^5] \\
 &= \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} [x^4 (2^n)_{n \in S}] x^5 + [(\widehat{2^n})_{n \in S} * (2^n)_{n \in S}] x^5 \\
 &= \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \left[((-1)^{4n} 2^n)_{n \in S} x^4 + \sum_{m=0}^3 \left((-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^m \right] x^5 \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{2^d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^5 \\
 &= \left[\left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} * (2^n)_{n \in S} \right] x^9 + \sum_{m=0}^3 \left[\left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} \right] x^{m+5} \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{2^d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^5 \\
 &= \left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{\tilde{d}}{2} \right) 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^9 \\
 &\quad + \sum_{m=0}^3 \left[\left(\sum_{d=0}^n \left(\frac{\tilde{d}}{2} \right) (-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^{n-d}} \right)_{n \in S} x^{m+5} \right] \\
 &\quad + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{2^d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^5.
 \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{d}}{2} &= \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 4, \\ 0, & \text{jika } n \neq 4, \end{cases} \\
 \overline{2^{n-d}} &= \begin{cases} 0, & \text{jika } n - d \text{ genap,} \\ 2^{n-d}, & \text{jika } n - d \text{ ganjil,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

dengan melihat $\frac{\tilde{d}}{2}$, maka $\sum_{d=0}^n \left(\frac{\tilde{d}}{2} \right) (-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^{n-d}}$ memiliki nilai hanya pada $d = 4$. Namun perhatikan bahwa, jika $d = 4$ maka $n = 4$. Sehingga untuk $d = 4$, akan mengakibatkan $n - d = 0$. Oleh karenanya, $\overline{2^{n-d}} = 0$ pada saat $d = 4$.

$$\left(\sum_{d=0}^n \binom{\tilde{d}}{2} (-1)^m \binom{4}{m} \overline{2^{n-d}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S}.$$

Akibatnya,

$$H(x)Q(x) = \left(\sum_{d=0}^n \binom{\tilde{d}}{2} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^9 + \left(\sum_{d=0}^n \widehat{2^d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^5.$$

Di sisi lain,

$$\begin{aligned} Q(x)H(x) &= [(2^n)_{n \in S} x^5] \left[\left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} x^4 + (\widehat{2^n})_{n \in S} \right] \\ &= (2^n)_{n \in S} \left[x^5 \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \right] x^4 + (2^n)_{n \in S} \left[x^5 (\widehat{2^n})_{n \in S} \right] \\ &= (2^n)_{n \in S} \left[\left((-1)^{5n} \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \right) x^5 + \sum_{m=0}^4 \left((-1)^m \binom{5}{m} \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \right) x^m \right] x^4 \\ &\quad + (2^n)_{n \in S} \left[\left((-1)^{5n} \widehat{2^n} \right)_{n \in S} x^5 + \sum_{m=0}^4 \left((-1)^m \binom{5}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} x^m \right] \\ &= \left[(2^n)_{n \in S} * \left((-1)^{5n} \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \right) \right] x^9 \\ &\quad + \sum_{m=0}^4 \left[(2^n)_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{5}{m} \left(\frac{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \right) \right] x^{m+4} \\ &\quad + \left[(2^n)_{n \in S} * \left((-1)^{5n} \widehat{2^n} \right)_{n \in S} \right] x^5 \\ &\quad + \sum_{m=0}^4 \left[(2^n)_{n \in S} * \left((-1)^m \binom{5}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} \right] x^m. \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{\tilde{n}}{2} = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 4, \\ 0, & \text{jika } n \neq 4, \end{cases}$$

$$\widehat{2^n} = \begin{cases} 2^n, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

$$\overline{2^n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 2^n, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{n}} &= 0, \\ \overline{2^n} &= 0, \\ (-1)^{5n} \binom{\tilde{n}}{2} &= \binom{\tilde{n}}{2}, \\ (-1)^{5n} \overline{2^n} &= \overline{2^n}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\left((-1)^m \binom{5}{m} \binom{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} &= (0_n)_{n \in S}, \\ \left((-1)^m \binom{5}{m} \overline{2^n} \right)_{n \in S} &= (0_n)_{n \in S}, \\ \left((-1)^{5n} \binom{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} &= \left(\binom{\tilde{n}}{2} \right)_{n \in S} \\ \left((-1)^{5n} \overline{2^n} \right)_{n \in S} &= \left(\overline{2^n} \right)_{n \in S}.\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}Q(x)H(x) &= \left[(2^n)_{n \in S} * \binom{\tilde{n}}{2} \right]_{n \in S} x^9 + \left[(2^n)_{n \in S} * \overline{2^n} \right]_{n \in S} x^5 \\ &= \left[\binom{\tilde{n}}{2} \right]_{n \in S} * (2^n)_{n \in S} x^9 + \left[\overline{2^n} \right]_{n \in S} * (2^n)_{n \in S} x^5 \\ &= \left(\sum_{d=0}^n \binom{\tilde{d}}{2} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^9 + \left(\sum_{d=0}^n \overline{2^d} 2^{n-d} \right)_{n \in S} x^5.\end{aligned}$$

$$\therefore H(x)Q(x) = Q(x)H(x).$$

Contoh 4.12

Diberikan gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil berhingga $R^S[x; \sigma, \delta]$, dengan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_5) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dan $S = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Ambil $f(x) \in Z(R^S[x; \sigma, \delta])$ dengan

$$f(x) = (\widehat{n^2})_{n \in S},$$

di mana

$$\widehat{n^2} = \begin{cases} n^2, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases}$$

dan

$$v(x) = \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \in R^S[x; \sigma, \delta].$$

Akan diperlihatkan bahwa $f(x)v(x) = v(x)f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)v(x) &= \left[\widehat{n^2} \right]_{n \in S} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] \\ &= \left[\widehat{n^2} \right]_{n \in S} * \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \\ &= \left(\sum_{d=0}^n \widehat{d^2} \left(\frac{1}{n-d+1} \right) \right)_{n \in S} x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x)f(x) &= \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} x^2 \right] \left[\widehat{n^2} \right]_{n \in S} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \left[x^2 \widehat{n^2} \right]_{n \in S} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \left[((-1)^{2n} \widehat{n^2})_{n \in S} x^2 + \sum_{m=0}^1 \left((-1)^m \binom{2}{m} \overline{\widehat{n^2}} \right) x^m \right] \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \left[\widehat{n^2} x^2 + \sum_{m=0}^1 \left((-1)^m \binom{2}{m} \overline{\widehat{n^2}} \right) x^m \right] \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \widehat{n^2} &= \begin{cases} n^2, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases} \\ \overline{\widehat{n^2}} &= \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ n^2, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\overline{\overline{\widehat{n^2}}} = 0,$$

dan

$$\left((-1)^m \binom{2}{m} \overline{\widehat{n^2}} \right)_{n \in S} = (0_n)_{n \in S}.$$

Akibatnya,

$$v(x)f(x) = \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \left[\widehat{n^2} x^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} * (\widehat{n^2})_{n \in S} \right] x^2 \\
&= \left[(\widehat{n^2})_{n \in S} * \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in S} \right] x^2 \\
&= \left(\sum_{d=0}^n \widehat{d^2} \left(\frac{1}{n-d+1} \right) \right)_{n \in S} x^2.
\end{aligned}$$

$$\therefore f(x)v(x) = v(x)f(x).$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan juga saran kepada peneliti selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

- a) Persamaan hasil perkalian $x^k(a_n)_{n \in S}$ untuk $k \geq 1$ dan sebarang $(a_n)_{n \in S} \in R^S$ pada $R^S[x; \sigma, \delta]$ di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ adalah

$$x^k(a_n)_{n \in S} = ((-1)^{nk} a_n)_{n \in S} x^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left((-1)^m \binom{k}{m} \overline{a_n} \right)_{n \in S} x^m,$$

dengan

$$(-1)^m \binom{k}{m} \overline{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap,} \\ (-1)^m \binom{k}{m} a_n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

- b) Pusat dari $R^S[x; \sigma, \delta]$ di mana $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ dengan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ adalah sebagai berikut:

- Untuk t berupa bilangan bulat non-negatif genap maka:

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ \sum_{k=1}^l (\widetilde{a_{k,n}})_{n \in S} x^k + (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{k,n}, a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Untuk t berupa bilangan bulat non-negatif ganjil maka:

$$Z(R^S[x; \sigma, \delta]) = \left\{ (\widehat{a_{0,n}})_{n \in S} \mid a_{0,n} \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.1 Saran

Disarankan untuk penelitian selanjutnya untuk meneliti atau mengkaji lebih dalam mengenai struktur dari gelanggang polinom miring atas barisan bilangan riil.

DAFTAR PUSTAKA

- Akalan, E., Aydoğdu, P., Marubayashi, H., Saraç, B., & Ueda, A. (2016). Projective Ideals of Skew Polynomial Rings over HNP Rings. *Communications In Algebra*, 45(6), 2546-2556.
- Amir, K.A. (2009). The Centre of Some Skew Polynomial Rings. *Jurnal ILMU DASAR*, 10(2), 212-218.
- Amir, K.A., Djuddin, J., Bahri, M., Erawaty, N., Abdal, N.M. (2017). Center of The Skew Polynomial Ring over Quaternions. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 102(10), 2189-2198.
- Amir, K.A., Erawaty, N., Bahri, M., Fadillah, N., Gormantara, J. (2018). Center of The Skew Polynomial Ring over Coquaternions. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 109(2), 261-272.
- Amir, K.A., Erawaty, N., Bahri, M., Anwar, A.N. (2020). Center of The Skew Polynomial Ring over Trinion Matrix. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 127(1), 29-40.
- Anderson, K. & Hall, D.W. (2012). *Sets, Sequences and Mappings: The Basic Concepts of Analysis*. Newburyport: Dover Publications.
- Chen, F. Y., Hagan, H., & Wang, A. (2019). On Skew Polynomial Rings over Locally Nilpotent rings. *Communications In Algebra*, 47(3), 1102-1104.
- Falcó, J & Grosse-Erdmann, K. Algebrability of the Set of Hypercyclic Vectors for Backward Shift Operators. *Advances in Mathematics*, 366, 107082.
- Farahat, M. & Al-Bogamy, S. (2021). Ore Extension Rings Satisfy The Weak PS-Rings. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 14(1), 164-172.
- Gilbert, W.J. & Nicholson, W.K. (2004). *Modern Algebra with Applications*. Wiley: New York.
- Hsu, T. (2020). *Fourier Series, Fourier Transforms, and Function Spaces: A Second Course in Analysis*. Providence: American Mathematical Society.
- McConnel, J.C. & Robson J.C. (2001). *Noncommutative Noetherian Rings*. Providence: American Mathematical Society.

Shahriari, S. (2017). *Algebra in Action: A Course in Groups, Rings, and Fields*.

Providence: American Mathematical Society.

Siap, I., Abualrub, T., Aydin, N., & Seneviratne, P. (2011). Skew Cyclic Codes of Arbitrary Length. *International Journal of Information and Coding Theory*, 2(1), 10-20.

Warner, S. (1990). *Modern Algebra*. New York: Dover Publications.