BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_n DAN GRAF LENGKAP K_m DENGAN METODE PEMBUKTIAN INDUKSI MATEMATIKA

SKRIPSI

FREDRIK PANLOLI LIANTO

H011181006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
DESEMBER 2021

BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_n DAN GRAF LENGKAP K_m DENGAN METODE PEMBUKTIAN INDUKSI MATEMATIKA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

FREDRIK PANLOLI LIANTO

H011181006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
DESEMBER 2021

HALAMAN PENGESAHAN

BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_nDAN GRAF LENGKAP K_m DENGAN METODE PEMBUKTIAN INDUKSI MATEMATIKA

Disusun dan diajukan oleh

FREDRIK PANLOLI LIANTO

H01181006

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana Departemen Matematika Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 13 Desember 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Menyetujui,

Pembimbing Utama,

<u>Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.</u>

NIP. 19641231 199003 2 007

Pembimbing Pertama,

<u>Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.</u>

NIP. 19680803 199202 1 001

Ketua Program Studi Matematika

<u>Prof. Dr. Nurdin, S. Si, M. Si</u>

NIP.197008072000031002

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Fredrik Panloli Lianto
NIM : H011181006
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_m dengan Metode Pembuktian Induksi Matematika

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

Ketua : Prof. Dr, Hasmawati, M.Si. ( )

Sekretaris : Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. ( )

Anggota : Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. ( )

Anggota : Dr. Firman, S.Si., M.Si. ( )

Ditetapkan di : Makassar
Tanggal : 14 Desember 2021

BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_n DAN GRAF LENGKAP K_m DENGAN METODE PEMBUKTIAN INDUKSI MATEMATIKA

Disetujui oleh

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
<u>Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.</u>	**<u>Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.</u>**
NIP. 19641231 199003 2 007	**NIP. 19680803 199202 1 001**

14 Desember 2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_m dengan Metode Pembuktian Induksi Matematika

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 14 Desember 2021

Fredrik Panloli Lianto

H011181006

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan Skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.). Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
2. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. selaku dosen pembimbing pertama yang juga telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
3. dua dosen penguji saya, yaitu Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS. dan Bapak Dr. Firman, S.Si., M.Si. yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penyusunan skripsi ini;
4. para dosen dan staf departemen Matematika yang banyak membantu selama proses perkuliahan dan berbagai persuratan untuk skripsi ini;
5. orang tua dan keluarga saya yang telah memberikan bantuan dukungan material dan moral; dan
6. teman-teman seperjuangan dan kakak senior yang banyak membantu selama perkuliahan sampai penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Makassar, 14 Desember 2021

Penulis

ABSTRAK

Diberikan sebarang dua graf G dan H, bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan n titik memenuhi sifat berikut: F memuat graf G atau $\bar{F}$ memuat H. Pada tahun 2012 telah ditemukan bilangan Ramsey untuk graf lengkap dan graf bintang oleh Ghufron (2012) dalam skripsi yang berjudul "Bilangan Ramsey $r(K_m, S_n)$" serta pembuktian yang dilakukan terhadap bilangan Ramsey tersebut tidak mencakup semua kasus pembuktian serta menggunakan graf bintang berorde $n + 1$. Dalam skripsi ini ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey untuk graf bintang berorde n dan graf lengkap, $R(S_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ yang mencakup semua kasus pembuktian, yakni dengan menggunakan metode pembuktian induksi matematika.

Kata Kunci: Bilangan Ramsey, Graf Bintang berorde n, Graf Lengkap, Induksi Matematika.

Judul	: Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_m dengan Metode Pembuktian Induksi Matematika
Nama	: Fredrik Panloli Lianto
NIM	: H011181006
Program Studi	: Matematika

ABSTRACT

Given any two graphs G *and* H*, the Ramsey number of graph* $R(G, H)$ *is the smallest natural number n such that for every graph F with n vertices it satisfies the following property: F contains graph G or* $\bar{F}$ *contains H. In 2012 it was found Ramsey numbers for complete graphs and star graphs by* Ghufron *(2012) in an essay entitled* "Bilangan Ramsey $r(K_m, S_n)$" *and the proof that is carried out on the Ramsey number does not cover all proof cases and using a star graph of order* $n + 1$. *In this essay it is shown that the Ramsey number for Star graph of order* n *and complete graph,* $R(S_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ *which includes all cases of proof, namely by using the method of proof mathematical induction.*

Keywords: *Ramsey Number, Star Graph of order n, Complete Graph, Mathematical Induction.*

Title : *Ramsey Number for* S_n *Star Graph and* K_m *Complete Graph with Method Proof Mathematical Induction*

Name : Fredrik Panloli Lianto

Student ID : H011181006

Study Program: *Math*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang matematika yang berkembang pesat saat ini adalah teori graf karena memiliki banyak aplikasi pada berbagai bidang, diantaranya: komunikasi, jaringan komputer, riset operasi, dan teknologi informasi. Teori Graf pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika asal Swiss "Leonardo Euler" pada tahun 1736. Salah satu topik dalam teori graf yang diaplikasikan pada bidang informasi adalah teori Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikaji pada tahun 1928 yang artinya lagi 7 tahun untuk mencapai umur 100 tahun adanya teori Ramsey di bidang matematika. Teori ini juga mulai terkenal dari dalam kajian "*On a Problem of Formal Logic*" (Chartrand dan Zhang, 2013:271).

Bilangan Ramsey pertama kali ditemukan oleh Frank Plumpton Ramsey. Teori Ramsey terkenal setelah Paul Erdos dan George Szekeres mengaplikasikan ke dalam teori graf dengan konsep dasar sebagai berikut "Untuk setiap dua bilangan asli n_1 dan n_2, terdapat bilangan asli terkecil M_0 sedemikian sehingga jika $\geq M_0$, maka pewarnaan dua warna pada sisi-sisi graf lengkap K_m akan memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama dan isomorfik dengan K_{n_1} atau K_{n_2}" (Hasmawati, 2015:73).

Pada teori informasi bilangan Ramsey klasik $R(n, m)$ adalah maksimum banyaknya huruf yang dapat dikirim pada penggunaan dua *chanel* transmisi sedemikian sehingga menghasilkan pesan tanpa suatu kesalahan, dengan penggunaan *string* yang paling efiesien (Hasmawati dan Massalesse, 2008).

Terdapat beberapa graf khusus yang paling sering dikenal, diantaranya: graf lengkap K_m ialah graf yang setiap dua titiknya bertetangga; graf lintasan P_n adalah graf yang terdiri atas satu lintasan maksimal; graf siklus C_n adalah graf yang terdiri satu siklus; dan graf bintang S_n yang termasuk salah satu graf pohon T_n yang sederhana (Hasmawati, 2020: 41, 43, 98).

Karena dalam penentuan bilangan Ramsey klasik sangat sulit, maka banyak peneliti mencari metode atau mengkaji konsep bilangan Ramsey untuk memperumum konsep tersebut yang saat ini dikenal dengan bilangan Ramsey graf atau generalisasi bilangan Ramsey, diantaranya Chvátal dan Harary dalam "*Generalized Ramsey Theory For Graphs, III, Small off-diagonal Number*", yaitu beberapa hasil temuan mereka ialah $R(F_1, F_2) \geqq (c(F_1) - 1)(\chi(F_2) - 1) + 1$, $R(K_2, K_2) = 2$, $R(K_2, K_3) = 3$, $R(K_{1,3}, K_4) = 10$, dan $R(P_4, K_4) = 10$ (Chvátal dan Harary, 1972:342), kemudian Parsons (1973) dengan menggunakan batas bawah Chvátal dan Harary telah menemukan $R(P_n, W_3) = 3n - 2, n \geq 3$, serta juga Chvátal (1977) dalam "*Tree-Complete Graph Ramsey Number*" memperluas penentuan bilangan Ramsey untuk P_n dan K_4 menjadi penentuan bilangan Ramsey untuk T_n dan K_m yang hasilnya ialah $1 + (m - 1)(n - 1)$.

Selanjutnya, Surahmat (2005) telah menemukan generalisasi bilangan Ramsey yang tercatat dalam jurnal "*Journal of Mathematics and Its Applications*", dengan hasil yang ditemukan antara lain: "$R(S_n, W_4) = 2n - 1$ if $n \geq 3$ odd or $R(S_n, W_4) = 2n + 1$ if $n \geq 4$" (Surahmat, 2005:66).

Peneliti selanjutnya yaitu Enik Noviani dan Edy Tri Baskoro pada 2016 telah menemukan generalisasi bilangan Ramsey yang tercatat dalam jurnal "*Indonesia Journal of Combinatorics*", dengan hasil yang ditemukan antara lain : "$m + 6 \leq R(C_4, W_m) \leq m + 7$, *for* $46 \leq m \leq 51$" (Noviani E. dan Baskoro E. T., 2016:10).

Dan juga Hasmawati, Nur Rohmah Oktaviani P., Loeky Haryanto pada tahun 2018 dalam jurnal "*Journal of Physics: Conference Series*" telah menentukan generalisasi bilangan Ramsey yaitu "$R(S_{20}, W_{10}) = 43$ and if k is even, $R(S_{2k+1}, W_{2k}) = 5k - 1$ for $k \geq 6$" (Hasmawati, dkk., 2018:2).

Serta pada "*Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi*" Hasmawati telah menentukan generalisasi bilangan Ramsey yaitu "$R(S_4, W_6) = 9$ dan $R(S_n, W_m) = 2n + 1$ untuk $m = n$ dengan n genap dan $n > 4$" (Hasmawati, 2018:151-152).

Pada tahun 2012 telah ditemukan bilangan Ramsey untuk graf lengkap dan graf bintang oleh Ghufron (2012) dalam skripsi yang berjudul "Bilangan Ramsey $r(K_m, S_n)$" serta pembuktian yang dilakukan terhadap bilangan Ramsey tersebut tidak mencakup semua kasus pembuktian dan menggunakan graf bintang berorde $n+1$, maka sangat menarik membuktikan bilangan Ramsey tersebut dengan menggunakan metode pembuktian induksi matematika yang merupakan sebuah dasar aksioma bagi beberapa teorema yang melibatkan bilangan asli yang terdapat pada objek matematika bersifat diskrit, misalnya teori bilangan, teori graf dan tentunya pada bilangan Ramsey. Dan menggunakan graf bintang yang berorde n.

Pengertian, istilah, dan notasi dalam penulisan skripsi ini pada umumnya merujuk ke buku Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. yang berjudul " Pengantar dan Jenis-jenis Graf" tahun 2020.

Berdasarkan penjabaran di atas, maka penulis yang masih pemula dalam bidang ini tertarik mengkaji dengan judul "Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_m dengan Metode Pembuktian Induksi Matematika".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka masalah yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah bagaimana proses penentuan bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m secara umum untuk n dan m dan membuktikan bilangan Ramsey tersebut dengan metode pembuktian induksi matematika.

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar, maka penulis memerlukan batasan-batasan sebagai berikut.

a. Mencari bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m yang masing-masing berorde n dan m, untuk n, m adalah bilangan asli dengan menggunakan istilah komplemen dari suatu graf.
b. Membuktikan bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m dengan menggunakan metode induksi matematika.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan bilangan Ramsey graf bintang S_n dan graf lengkap K_m yang masing-masing berorde n dan m, untuk n, m adalah bilangan asli dan membuktikan bilangan Ramsey tersebut dengan metode pembuktian induksi matematika.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, maka diharapkan agar penelitian ini dapat memberikan pengetahuan dan semangat baru bagi penulis dan pembaca, terkhusus pada kajian bilangan Ramsey dan dapat menjadi acuan bagi peneliti lain untuk mengkaji bilangan Ramsey.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

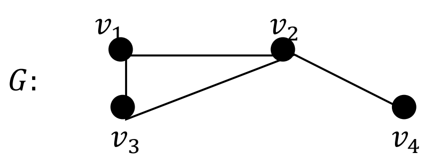
Pada Subbab 2.1 ini disajikan definisi graf secara umum, beberapa pengertian lain, notasi, dan istilah yang akan digunakan dalam skripsi ini.

Definisi 2.1.1 (Definisi graf secara umum) Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan himpunan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi (Hasmawati, 2020:12).

Secara matematika, jika (V, E) pada Definisi 2.1.1 dinotasikan G, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga Graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Jika $uv = vu$ dan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, maka graf G disebut graf sederhana. Berikut definisi graf sederhana.

Definisi 2.1.2 (Definisi graf sederhana) Graf sederhana G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong yang anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurutan dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (Hasmawati, 2020:15).

Contoh 2.1.1 Diberikan graf G mempunyai 4 titik dan 4 sisi, dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $V(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$ seperti Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1 Graf G.

Sedangkan, graf yang tidak memiliki sisi disebut graf kosong (trivial) (Daniel dan Taneo, 2019:8).

Contoh 2.1.2 Diberikan graf kosong dengan 3 titik seperti Gambar 2.1.2.

Gambar 2.1.2 Graf kosong dengan 3 titik.

Definisi 2.1.3 (Komplemen Graf) Jika G adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V(G)$, komplemen $\bar{G}$ adalah graf sederhana dengan himpunan $V(G)$ di mana dua titik bertetangga jika dan hanya jika keduanya tidak bertetangga di G (Wilson, 1996:20). Sedangkan, menurut Hasmawati (2020) Graf F disebut komplemen dari graf G, apabila $V(F) = V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$.

Contoh 2.1.3 Diberikan graf Graf G dan Komplemennya seperti Gambar 2.1.3.

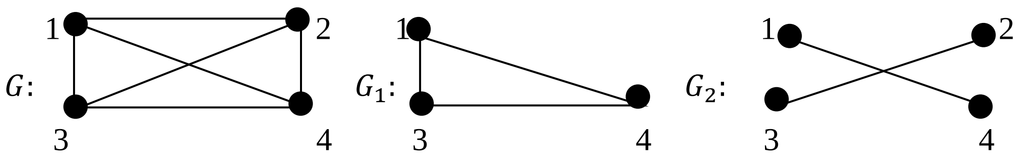
Gambar 2.1.3 Graf G dan Komplemennya.

2.2 Subgraf dan Derajat Graf

Pada Subbab 2.2 ini disajikan definisi subgraf dan derajat graf, sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Graf H disebut subgraf dari graf G jika himpunan titik di H adalah himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah himpunan bagian dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:4).

Contoh 2.2.1 Graf G_1 adalah subgraf G dengan himpunan titik $S = \{1,3,4\}$ atau dapat ditulis subgraf terinduksi $G[S]$ dan graf G_2 adalah subgraf perentang seperti Gambar 2.2.1.

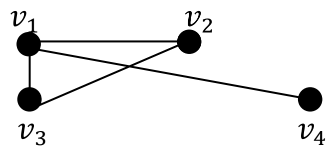


Gambar 2.2.1 Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G.

Definisi 2.2.2 Derajat suatu titik v_i dalam graf G, dilambangkan "$d(v_i)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Himpunan tetangga suatu titik v pada graf G dinotasikan $N_G(v)$ yang didefiniskan sebagai berikut $N_G(v) = \{u|uv \in E(G)\}$. Dari Definisi 2.2.2, dapat juga didefinisikan $N[v_i] = N(v_i) \cup \{v_i\} = N[v_1] \cup N[v_2] \cup ... \cup N[v_i]$ (Hasmawati, 2020:21).

Contoh 2.2.2

G:



Gambar 2.2.2 Graf G dengan Derajat Titik.

Dari gambar 2.2.2 di atas diperoleh $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $N_G(v_2) = \{v_1, v_3\}$, $N_G(v_3) = \{v_1, v_2\}$, dan $N_G(v_4) = \{v_1\}$, sehingga $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 2$, dan $d(v_4) = 1$.

Teorema 2.1 Misalkan G graf sederhana berorde p dan berukuran q. Jumlah derajat titik dalam graf G adalah dua kali banyaknya sisi atau $\sum_{n=1}^{p} d(v_n) = 2q$ (Hasmawati, 2020:21).

Bukti.

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti, bahwa $\sum_{i=1}^{p} d(v_n) = 2q$. ■

Contoh 2.2.3 Pada gambar 2.2.2, jumlah derajat titik pada graf G adalah $\sum_{n=1}^{4} d(v_n) = 2q$, yaitu $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 = 2 \times 4 = 2q$.

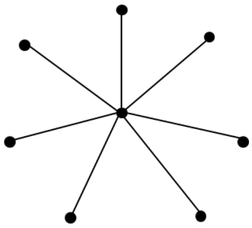
2.3 Beberapa Jenis Graf

Selain graf sederhana yang telah dibahas pada Subbab 2.1 dan telah berkembang pesat kajian mengenai graf, maka banyak ditemukan jenis graf yang lainnya, sehingga pada Subbab 2.3 ini disajikan beberapa jenis graf, sebagai berikut.

a. Graf Bintang

Definisi 2.3.1 Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik berderajat satu. Graf bintang dapat di tulis $S_n = x + \overline{K}_{n-1}$. Dalam hal ini $x = K_1$ (Hasmawati, 2020:98).

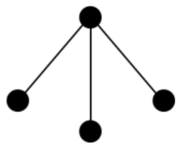
Contoh 2.3.1 (a)



Gambar 2.3.1 (a) Graf Bintang S_8.

Sedangkan, graf bipartit lengkap dengan $|\mathrm{U}| = s$ dan $|\mathrm{U}| = t$ yang dilambangkan dengan $K_{s,t}$ atau $K_{t,s}$. Jika s = 1 atau t = 1, maka $K_{s,t}$ adalah bintang (Chartrand dan Zhang, 2013:23).

Contoh 2.3.1 (b)

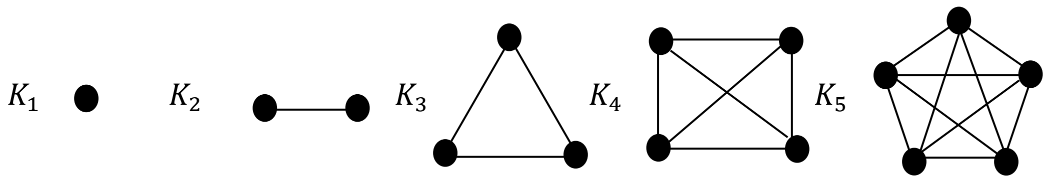


Gambar 2.3.1 (b) Graf Bipartit Lengkap $K_{1,3}$.

b. Graf Lengkap

Definisi 2.3.2 Graf lengkap (*Complete graph*) adalah graf sederhana dimana setiap pasang titik yang berbeda terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan K_n (Daniel dan Taneo, 2019:8).

Contoh 2.3.2

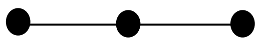


Gambar 2.3.2 Graf Lengkap K_1 sampai K_5.

c. Graf lintasan

Definisi 2.3.3 Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas barisan titik dan sisi $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1,2, \dots, n-1$. Graf lintasan dinotasi P_n dengan orde n dan jumlah sisi $n-1$. Graf lintasan terdiri atas satu lintasan maksimal (Hasmawati, 2020:42).

Contoh 2.3.3

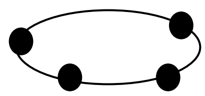


Gambar 2.3.3 Graf Lintasan P_3.

d. Graf Siklus

Definisi 2.3.4 Graf siklus dinotasikan C_n dengan panjang n, $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_n, v_1\}$ (Hasmawati, 2020:43). Atau dengan kata lain, titik terakhir dan pertama pada graf P_n bertetangga .

Contoh 2.3.4

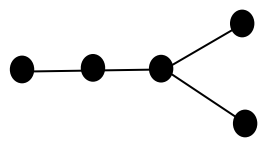


Gambar 2.3.4 Graf Siklus C_4.

e. Graf Pohon

Definisi 2.3.5 Graf pohon T_n adalah graf yang tidak memuat siklus dan merupakan graf terhubung berorde n. Titik-titik berderajat satu pada pohon disebut daun, sedangkan titik-titik yang berderajat lebih dari satu disebut titik internal (Hasmawati, 2020:95).

Contoh 2.3.4



Gambar 2.3.5 Graf Pohon T_5.

2.4 Bilangan Ramsey

Pada Subbab 2.4 ini disajikan definisi bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey graf, bilangan Ramsey $R(S_n, K_m)$, dan batas bawah bilangan Ramsey Chvátal-Harary, sebagai berikut

2.4.1 Bilangan Ramsey Klasik

Definisi 2.4.1 Untuk sembarang dua bilangan asli n_1 dan n_2, bilangan Ramsey $R(n_1, n_2)$ adalah bilangan bulat terkecil m sedemikian sehingga untuk setiap graf F berorde m memenuhi sifat berikut: F memuat graf K_{n_1} atau $\bar{F}$ memuat K_{n_2} (Hasmawati, 2015:74).

2.4.2 Bilangan Ramsey Graf

Jika graf yang digunakan untuk menentukan bilangan Ramsey bukan graf lengkap, maka bilangan ramseynya disebut bilangan Ramsey Graf. Atau disebut generalisasi bilangan Ramsey. Karena pengertian bilangan Ramsey klasik dua warna dapat menggunakan istilah komplemen dari suatu graf, maka pengertian bilangan Ramsey graf juga dapat menggunakan istilah komplemen dari suatu graf, sebagai berikut.

Definisi 2.4.2 Diberikan sebarang dua graf G dan H, bilangan Ramsey graf $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan n titik memenuhi sifat berikut: F memuat graf G atau $\bar{F}$ memuat H (Hasmawati, 2015:74).

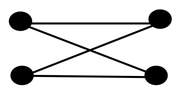
Berdasarkan Definisi 2.4.2 diatas, maka definisi khusus bilangan Ramsey untuk graf bintang S_n dan graf lengkap K_m pada penelitian ini atau ditulis bilangan Ramsey $R(S_n, K_m)$, sebagai berikut.

Definisi 2.4.3 Bilangan Ramsey $R(S_n, K_m) = j$, artinya sebarang graf F dengan j titik akan memuat graf bintang S_n atau komplemennya ($\bar{F}$) memuat graf lengkap K_m. Dan terdapat graf F dengan $j-1$ titik tidak memuat graf bintang S_n dan komplemennya ($\bar{F}$) tidak memuat graf lengkap K_m.

Contoh 2.4 Bilangan Ramsey $R(S_3, K_3) = j$.

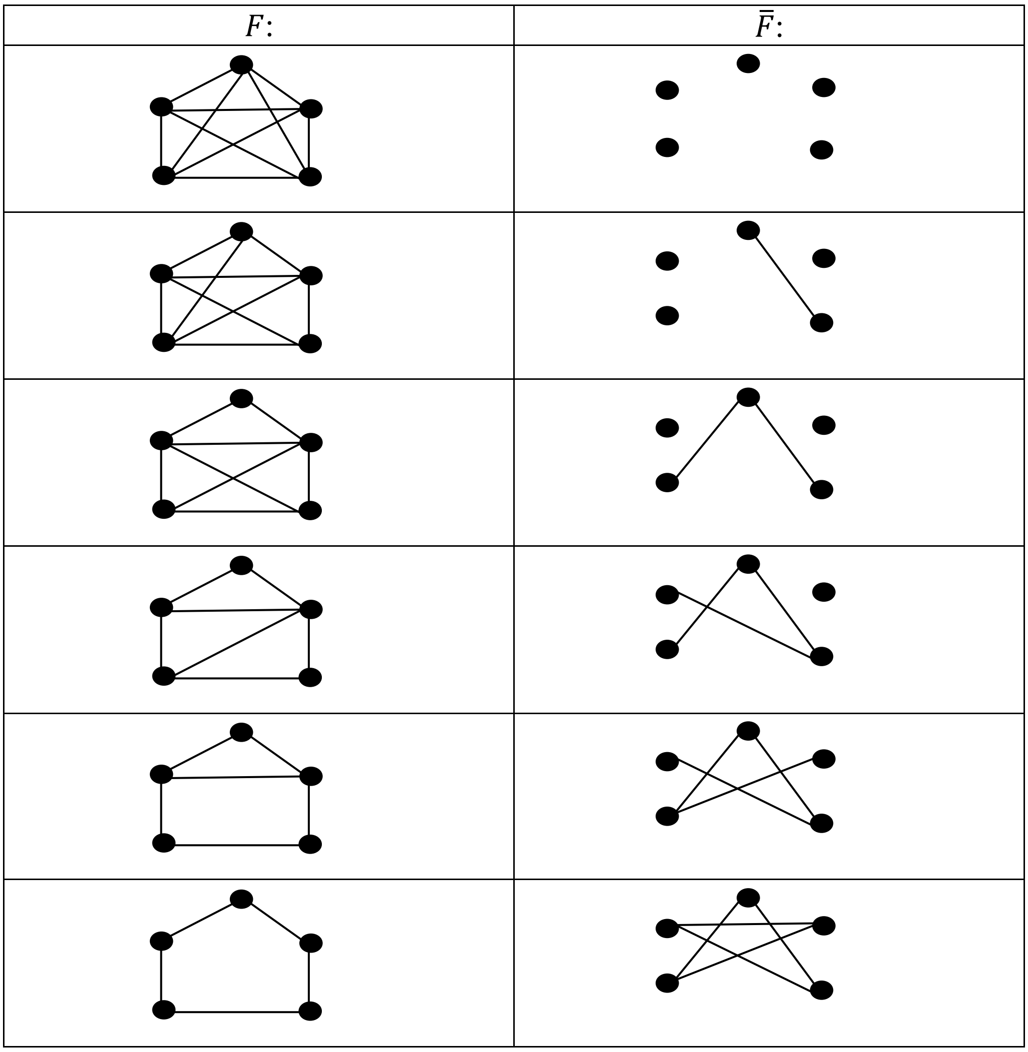
Misalkan j adalah bilangan asli terkecil n.

Maka, pilih $j = 4$, karena terdapat graf F yang beroder 4 yang tidak memuat S_3 dan dan $\bar{F}$ juga tidak memuat K_3, yaitu sebagai berikut.

F:	$\bar{F}$:
	

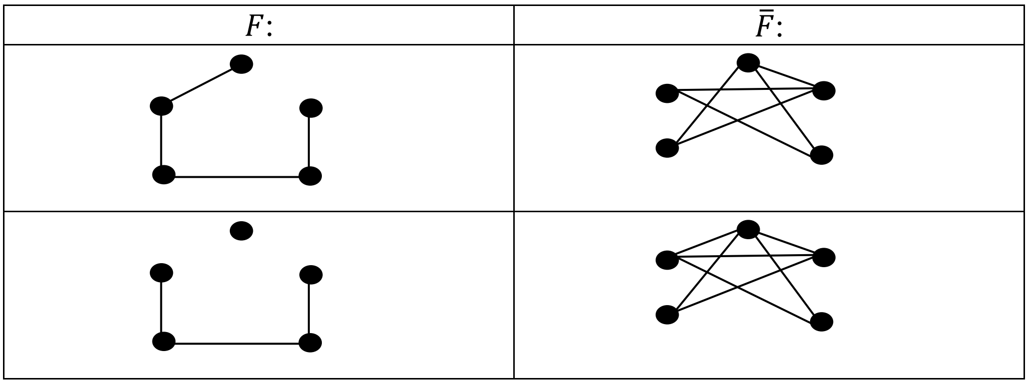
Gambar 2.4.1 Graf F berorde 4 yang tidak memuat S_3 dan graf $\bar{F}$ juga tidak memuat K_3.

Sehingga, dapat disimpulkan bilangan Ramsey $R(S_3, K_3) > 4$. Selanjutnya, pilih $j = 5$, maka sebarang graf F yang beroder 5 dan komplemennya sebagai berikut.



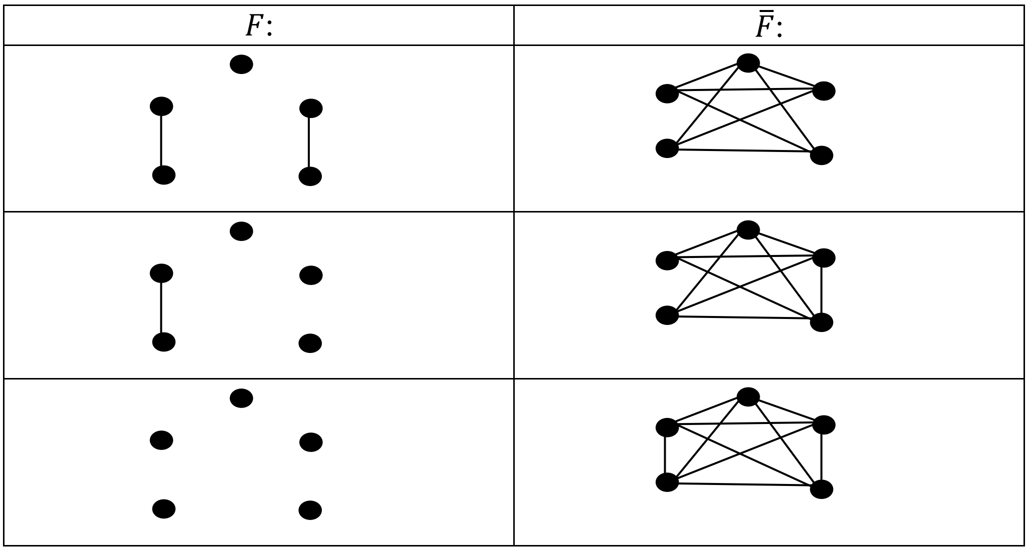
Gambar 2.4.2 Graf F yang berorde 5 dan Komplemennya.

Dari Gambar 2.4.2 di atas, dapat diketahui graf F memuat S_3 sebagai subgraf atau graf $\bar{F}$ tidak memuat K_3 sebagai subgraf.



Gambar 2.4.3 Graf F yang berorde 5 dan Komplemennya.

Dari Gambar 2.4.3 di atas, dapat diketahui graf F memuat S_3 sebagai subgraf atau graf $\bar{F}$ memuat K_3 sebagai subgraf.



Gambar 2.4.4 Graf F yang berorde 5 dan Komplemennya.

Dari Gambar 2.4.4 di atas, dapat diketahui graf F tidak memuat S_3 sebagai subgraf atau graf $\bar{F}$ memuat K_3 sebagai subgraf.

Sehingga, dari sebarang graf F yang berorde 5 dan komplemennya yang diperoleh di atas dapat disimpulkan bahwa bilangan Ramsey $R(S_3, K_3) \leq 5$. Karena bilangan Ramsey $R(S_3, K_3) > 4$ dan $R(S_3, K_3) \leq 5$, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan Ramsey $R(S_3, K_3) = 5$.

2.4.3 Batas Bawah Bilangan Ramsey Graf (Chvátal-Harary)

Dalam penyajian batas bawah bilangan Ramsey graf oleh Chvátal-Harary menggunakan istilah bilangan kromatik yang dituliskan pada definisi berikut.

Definisi 2.4.4 Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna pada himpunan $V(G)$ dengan aturan setiap titik diberi hanya satu warna dan dua titik yang bertetangga diberi warna beda. Suatu graf G dikatakan berwarna-k jika titik-titik pada graf G dapat diwarnai dengan k warna. Bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G berwarna k disebut bilangan kromatik dari G dan dinotasikan $\chi(H)$ Sebagai ilustrasi**,** bilangan kromatik untuk graf lengkap K_m adalah m, tulis

$\chi(K_m) = m$ dan banyaknya titik pada kompenen terbesar graf S_n adalah n, tulis $C(S_n) = n$ (Hasmawati, 2015:68).

Selanjutnya, batas bawah graf oleh Chvátal-Harary dituliskan pada teorema berikut.

Teorema 2.2 Misalkan $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik graf H dan $C(G)$ adalah banyaknya titik pada kompenen terbesar graf G. Maka $R(G,H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$ (Hasmawati, 2007:22).

Bukti.

Pandang graf $F := (\chi(H) - 1)K_{(C(G)-1)}$. Graf F terdiri atas $(\chi(H) - 1)$ graf lengkap dengan kardinalitas masing-masing $C(G) - 1$. Dengan demikian, F tidak memuat graf terhubung yang berorder paling sedikit $C(G)$. Akibatnya, F tidak memuat G. Komplemen dari F yaitu $\bar{F}$ adalah graf multipartit $K_{(\chi(H)-1)\times(C(G)-1)}$. Jelas $K_{(\chi(H)-1)\times(C(G)-1)}$ terdiri dari $\chi(H) - 1$ partisi, sehingga tidak memuat graf dengan bilangan kromatik $\chi(H)$. Jadi, $\bar{F}$ tidak memuat H. Karenanya, diperoleh $R(G,H) \geq |F| + 1 = (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$. ■

2.5 Metode Pembuktian Bilangan Ramsey Graf

Banyak cara dalam membuktikan suatu hasil bilangan Ramsey graf. Berikut dua cara yang paling sering digunakan.

2.5.1 Metode Pewarnaan (Umum)

Menurut Chartrand dan Zhang (2013), untuk membuktikan bahwa $r(F_1, F_2) = n$, maka dua pernyataan diverifikasi:

(1) setiap pewarnaan merah-biru dari K_n memuat F_1 merah atau F_2 biru (yang menunjukkan $r(F_1, F_2) \leq n$) dan

(2) terdapat beberapa pewarnaan merah-biru dari K_{n-1} yang tidak memiliki F_1 merah dan F_2 biru (yang menunjukkan bahwa $r(F_1, F_2) \geq n$).

2.5.2 Metode Induksi Matematika

Induksi Matematika merupakan suatu alat untuk membuktikan hasil-hasil yang terkait dengan bilangan bulat, atau yang dapat diperluas untuk semua bilangan asli. Penggunaan prinsip induksi matematika sebagai berikut.

Misalkan $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ adalah pernyataan untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$. Maka:

(1) Pernyataan $P(n_0)$ adalah benar.

(2) Untuk semua $k \geq n_0$, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ benar.

Sehingga $P(n)$ benar untuk semua $n \geq n_0$ (Bartle dan Sherbert, 2011:13).

Sedangkan, induksi matematika dengan dua variable sebagai berikut.

Versi Ke-I

Menurut Earl (2003) misalkan $S = \{(n,k): n,k \geq 1\}$ himpunan semua pasangan (n,k). Metode pembuktian pertama menggunakan fakta bahwa satu-satunya subset T dari S memenuhi sifat-sifat

$$(1,1) \in T,$$
$$\text{Jika } (n,k) \in T \text{ maka } (n,k+1) \in T,$$
$$\text{Jika } (n,k) \in T \text{ maka } (n+1,k) \in T,$$

adalah S itu sendiri.

Versi Ke-II

Metode Pembuktian induksi matematika dua variable versi ke-II pada skripsi ini, disajikan dalam bukti Teorema 2.3 dan akan digunakan untuk membuktikan Teorema 4.3 di Bab IV

Teorema 2.3 Misalkan T_n adalah pohon dengan n titik dan K_m adalah graf lengkap dengan m titik. Jika $n,m \geq 2$, maka $R(T_n, K_m) = (n-1)(m-1)+1$ (Hasmawati, 2007:26).

Bukti.

Dari batas bawah Chvátal-Harary $R(T_n, K_m) \geq (n-1)(m-1)+1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $R(T_n, K_m) \leq (n-1)(m-1)+1$. Pembuktian menggunakan induksi pada $n+m$. Perhatikan bahwa jika $m=2$ atau $n=2$, maka hasilnya trivial. Asumsikan teorema benar untuk $n+m-1$, yaitu $n+(m-1)$ dan $(n-1)+m$ sehingga berturut-turut, berlaku.

(i) $R(S_n, K_{m-1}) \leq (n-1)(m-1-1)+1$

(ii) $R(S_{n-1}, K_m) \leq (n-1-1)(m-1)+1$

Akan ditunjukkan Teorema benar untuk $n+m$. Ambil sebarang graf F dengan $|F| = (n-1)(m-1)+1$, maka berdasarkan (i) diperoleh F memuat T_n atau $\bar{F}$ memuat K_{m-1}. Jika F memuat T_n, maka bukti selesai. Anggalah F tidak memuat T_n, maka $\bar{F}$ memuat K_{m-1}. Sebut $A = V(K_{m-1})$ dan $H = V(F)\backslash A$. Jelas bahwa $|H| = \big((n-1)-1\big)(m-1)+1$, sehingga berdasarkan (ii) diperoleh $F[H]$ memuat T_{n-1} atau $\bar{F}[H]$ memuat K_m. Jika $\bar{F}[H]$ memuat K_m, maka bukti selesai. Misalkan $\bar{F}[H]$ tidak memuat K_m, maka $F[M]$ memuat T_{n-1}. Sehingga tulis $B = V(T_{n-1})$. Perhatikan hubungan antara titik di A dengan B. Perhatikan $b \in B$. Jika $ba \in E(F)$ untuk suatu $a \in A$, maka $\{a\} \cup B$ membentuk T_n di F, kontradiksi. Jadi $ba \notin E(F)$ untuk setiap $a \in A$. Akibatnya, diperoleh $\{b\} \cup A$ membentuk K_m di $\bar{F}$. Dengan demikian, Teorema benar untuk $n+m$, sehingga $R(T_n, K_m) \leq (n-1)(m-1)+1$. Jadi, $R(T_n, K_m) = (n-1)(m-1)+1$. ■

Dari metode pembuktian yang digunakan pada Teorema 2.3 di atas, maka teori untuk membuktikan hasil utama versi ke-II pada Bab IV Skripsi ini, sebagai berikut. Misalkan $S(n,m)$ adalah suatu pernyataan yang melibatkan variabel-variabel 2 dimensi, n dan m. Maka:

1) $S(1,1)$ benar,
2) Jika pernyataan $S(n,m)$ benar untuk n dan $m-1$ serta juga benar untuk $n-1$ dan m, maka $S(n,m)$ benar.

Dengan demikian $S(n,m)$ benar untuk setiap bilangan asli n, m.