

**MODEL DIFUSI PREDASI INTRAGUILD DENGAN TAHAPAN  
STRUKTUR PADA POPULASI MANGSA**

*THE DIFFUSIVE INTRAGUILD PREDATION MODEL WITH STAGE  
STRUCTURE IN PREY POPULATION*

**HUKMAH**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2021**

**TESIS**

**MODEL DIFUSI PREDASI INTRAGUILD DENGAN TAHAPAN  
STRUKTUR PADA POPULASI MANGSA**

**Disusun dan diajukan oleh**

**HUKMAH**

**H022181006**



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS HASANUDDIN  
MAKASSAR  
2021**

**LEMBAR PENGESAHAN**

**MODEL DIFUSI PREDASI INTRAGUILD DENGAN TAHAPAN STRUKTUR  
PADA POPULASI MANGSA**

Disusun dan diajukan oleh

**HUKMAH  
H022181006**

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Magister Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin pada tanggal 24 Agustus 2021 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

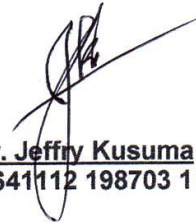
Menyetujui,

Pembimbing Utama,



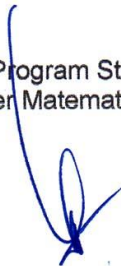
**Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.**  
NIP. 19680114 199412 1 001

Pembimbing Pendamping



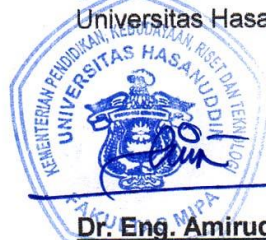
**Prof. Dr. Jeffrey Kusuma**  
NIP. 19641112 198703 1 002

Ketua Program Studi,  
Magister Matematika



**Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**  
NIP. 19640207 199103 1 013

Dekan Fakultas MIPA  
Universitas Hasanuddin



**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**  
NIP. 19720515 199702 1 002

## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama : Hukmah  
NIM : H022181006  
Program Studi : Matematika  
Jenjang : S2

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur  
pada Populasi Mangsa

Adalah karya tulisan saya sendiri dan bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain bahwa Tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan Tesis ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 24 Agustus 2021

Yang Menyatakan



Hukmah

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirobbil'alamin*, segala puji hanya bagi Allah pencipta dan pemilik alam semesta. Dialah Allah yang maha luas rahmat dan ilmunya, yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan petunjuk sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister pada Program Pascasarjana Universitas Hassanuddin.

Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada:

1. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. dan Prof. Dr. Jeffry Kusuma selaku pembimbing Tugas Akhir, yang telah meluangkan waktu untuk memberi bimbingan, pengarahan, saran, dan koreksi dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc., Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc., dan Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si., selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penyempurnaan tulisan ini.
3. Prof. Dr. Muhammad Zakir, M.Si. selaku Ketua Prodi Magister Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin beserta seluruh dosen Departemen Matematika, yang telah berbagi ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan.
4. Dr. Eng Amiruddin, M.Si. selaku Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin beserta staf administrasi bagian akademik FMIPA dan staf administrasi Program Studi Magister Matematika Universitas Hassanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan magister.
5. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasarjana beserta seluruh staf yang telah memberikan layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan magister di Universitas Hassanuddin.

6. Ayahanda Rusdi dan Ibunda Kurniati sebagai orang tua penulis, Wawan Hermawan Umar sebagai suami penulis, serta adik tercinta Hukmiah Rusdi, Kasma Rusdi, dan Nurul Luthfiah Rusdi, yang selalu mendoakan dan mendukung penulis dari segi moril maupun materil.
7. Teman-teman program studi Magister (S2) Matematika Universitas Hasanuddin angkatan 2018 dan kepada semua pihak yang telah membantu baik langsung maupun tidak langsung, diucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Penulis menerima kritik dan saran yang membangun demi tercapainya kesempurnaan tesis ini.

Semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi berharga bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan memberi informasi ilmiah secara umum.

Makassar, Agustus 2021

Penulis

## ABSTRAK

**HUKMAH.** Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Populasi Mangsa (dibimbing oleh Syamsuddin Toaha dan Jeffry Kusuma).

Model predasi intraguild merupakan interaksi antara tiga spesies dimana dua spesies diantaranya saling berkompetisi dan memangsa untuk memperebutkan sumber daya yang sama. Penelitian ini mempertimbangkan tahapan struktur pada mangsa dan faktor difusi pada model predasi intraguild. Fungsi respon Beddington-DeAngelis dan Holling tipe I diterapkan pada model. Tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis dinamika populasi akibat penyebaran (difusi), menganalisis pengaruh koefisien difusi terhadap model predasi intraguild, dan membandingkan hasil simulasi numerik dari model tanpa pengaruh difusi dan model dengan pengaruh difusi.

Analisis dinamik pada model difusi predasi intraguild dilakukan dengan terlebih dahulu mentransformasi bentuk persamaan diferensial parsial non linear menjadi persamaan diferensial biasa non linear orde 2 menggunakan solusi gelombang berjalan (*traveling wave solution*). Selanjutnya analisis titik kesetimbangan dan kestabilan dari model yang telah ditransformasi. Selain itu, pendekatan numerik dengan metode beda hingga skema eksplisit dilakukan pada model dengan faktor difusi untuk melihat pengaruh koefisien difusi.

Analisis dinamik dari model diperoleh titik kesetimbangan  $E_5^*$  non negatif dan stabil. Hasil numerik menunjukkan bahwa koefisien difusi yang tinggi menyebabkan kepadatan populasi cenderung menurun akibat populasi yang menyebar lebih cepat menjauhi lokasi awal. Selain itu, hasil numerik juga menunjukkan bahwa model tanpa pengaruh difusi  $D_n = 0$  cenderung stabil asimtotik dan model dengan pengaruh difusi  $D_n > 0$  cenderung tidak stabil ketika terjadi peningkatan nilai difusi.

**Kata kunci:** Predasi Intraguild, Persamaan Difusi, Solusi Gelombang Berjalan, Metode Beda Hingga Skema Eksplisit.

## ABSTRACT

**HUKMAH.** *The Diffusive Intraguild Predation Model with Stage Structure in Prey Population* (supervised by Syamsuddin Toaha and Jeffrey Kusuma).

Intraguild predation model is an interaction between three species which two of them compete and prey on each other for the same resource. This study considers the stage structure of prey and diffusion factors in intraguild predation model. The Beddington-DeAngelis and Holling type I functional response are applied to the model. The aims of this study were to analyze dynamic of population due to diffusion, analyze how diffusion effect on Intraguild Predation model, and compare the result of the numerical simulation of the model without the effect of diffusion and the model with the effect of diffusion.

Dynamical analysis of the diffusive intraguild predation model is carried out by first transforming the form of a non-linear partial differential equation into a second order non-linear ordinary differential equation by using a traveling wave solution. Then analyze of the equilibrium point and stability of the transformed model. Furthermore, a numerical approach with the explicit scheme finite difference method is carried out on the model with the diffusion factor to see the effect of the diffusion.

Dynamic analysis of the model obtained equilibrium point  $E_5^*$  which non-negative and stable. The numerical results show that a high diffusion causes the population density tend to decrease due to the population spreading faster away from the initial location. In addition, the numerical results also show that the model without diffusion effect  $D_n = 0$  tend to be asymptotically stable and model with diffusion effect  $D_n > 0$  tend to be unstable when the diffusion value increases.

**Kata kunci:** Intraguild Predation, Diffusion Equation, Traveling Wave Solution, Finite Difference Method Explicit Scheme.



## DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL.....	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN.....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT .....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	3
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
1.5 Batasan Masalah .....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Model Predasi Intraguild .....	5
2.2 Model Pertumbuhan Logistik .....	7
2.3 Fungsi Respon .....	8
2.4 Persamaan Diferensial Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.....	10
2.5 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa. ....	20
2.6 Sistem Dinamik Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa. ....	23

### BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian .....	28
3.2 Lokasi dan Waktu Penelitian .....	28
3.3 Langkah Penelitian .....	28

### BAB IV MODEL DIFUSI PREDASI INTRAGUILD DENGAN TAHAPAN STRUKTUR PADA MANGSA

4.1 Pengembangan Model Matematika Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.....	31
4.2 Titik Kesetimbangan Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa. ....	39
4.3 Linearisasi dan Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan....	41
4.4 Metode Beda Hingga FTCS Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.....	49
4.5 Simulasi Numerik.....	53

### BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	66

DAFTAR PUSTAKA.....	67
---------------------	----

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel</b>		<b>Halaman</b>
Tabel 2.1	Tabel koefisien persamaan karakteristik	27
Tabel 4.1	Tabel koefisien persamaan karakteristik (4.24)	43
Tabel 4.2	Tabel koefisien persamaan karakteristik (4.25)	46
Tabel 4.3	Nilai parameter untuk simulasi numerik	53

## DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
Gambar 4.1	Diagram kompartemen model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa.	32
Gambar 4.2	Grafik perubahan populasi mangsa kecil (a), mangsa dewasa (b), mangsa intraguild (c), pemangsa intraguild (d) terhadap waktu dengan nilai $c^*$ yang berbeda.	55
Gambar 4.3	Grafik perubahan populasi mangsa kecil (a), mangsa dewasa (b), mangsa intraguild (c), pemangsa intraguild (d) terhadap waktu dengan nilai $c^*$ yang berbeda dan perubahan nilai awal.	56
Gambar 4.4	Grafik perubahan populasi mangsa kecil (a), mangsa dewasa (b), mangsa IG (c), pemangsa IG (d) terhadap jarak $x$ dan waktu $t$ .	58
Gambar 4.5	Grafik perubahan kepadatan populasi mangsa kecil $u$ terhadap jarak.	59
Gambar 4.6	Grafik perubahan kepadatan populasi mangsa dewasa $w$ terhadap jarak.	59
Gambar 4.7	Grafik perubahan kepadatan populasi mangsa IG $y$ terhadap jarak.	60
Gambar 4.8	Grafik perubahan kepadatan populasi pemangsa IG $z$ terhadap jarak.	61
Gambar 4.9	Grafik perubahan kepadatan populasi mangsa kecil (a), mangsa dewasa (b), mangsa IG (c), pemangsa IG (d) terhadap jarak dan waktu dengan perubahan nilai awal pemangsa.	63

## DAFTAR SIMBOL

Simbol	Nama/ Arti
$\rho$	Rho
$\delta$	delta huruf kecil
$\alpha$	alpha
$\beta$	beta
$\partial$	turunan parsial
$\mu$	Mu
$\phi$	Phi huruf kecil
$\tau$	Tau
$\Delta$	Delta huruf besar/ besar perubahan besaran tertentu
$\varphi$	Varphi/ bilangan Courant
$\lambda$	Lambda huruf kecil/ nilai eigen
$\Lambda$	Lambda huruf besar
$\Phi$	Phi huruf besar

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran		Halaman
Lampiran 1	Koefisien persamaan karakteristik (4.25).	70
Lampiran 2	Simulasi numerik titik kesetimbangan sistem persamaan (4.21) dengan <i>Maple 2016</i> .	71
Lampiran 3	Simulasi numerik titik kesetimbangan sistem persamaan (4.20) dengan <i>Maple 2016</i> .	74
Lampiran 4	Simulasi numerik Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 dengan <i>Maple 2016</i>	82
Lampiran 5	Simulasi numerik Gambar (4.4)-(4.9) dengan Matlab <i>R2016a</i> .	85
Lampiran 6	Nilai kepadatan populasi untuk setiap kordinat jarak $x$ dan waktu $t$ .	88

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Kompetisi dan predasi merupakan faktor penting dalam ekologi. Ahli ekologi mulai memperhatikan interaksi antara dua populasi yang berkompetisi sekaligus berpredasi (Polis dan Holt, 1992). Predasi intraguild merupakan gabungan antara kompetisi dan predasi, bersaing untuk sumber daya yang sama serta saling memangsa (Holt dan Polis, 1997). Selain itu, predasi intraguild berdampak secara signifikan pada distribusi, kelimpahan, kegigihan, dan evolusi spesies yang terlibat (Polis dkk, 1989).

Penelitian-penelitian yang berkaitan dengan model predasi intraguild telah banyak dilakukan oleh peneliti, seperti memvariasikan keadaan predator (Kang dan Wedekin, 2013; Wang dkk, 2018) dan mangsa intraguild (Wei dkk, 2018), analisis bifurkasi (Collera, 2014), pemanenan (Collera, 2016), tinjauan terhadap *carrying capacity* (Capone, 2018), kompetisi intraspesifik (Li dan Dai, 2018), tahapan struktur (Collera dan Maghantay, 2018) dan formasi pola *spatiotemporal* (Han dkk, 2019). Pada penelitian sebelumnya pun menggunakan fungsi respon dalam model predasi intraguild. Fungsi tersebut terdiri dari fungsi respon Holling tipe I (Han dkk, 2019; Collera dan Maghantay, 2018), Holling tipe II (Capone dkk, 2018), Holling tipe III (Kang dan Wedekin, 2013), dan Beddington DeAngelis (Han dkk, 2018; Wei dkk, 2018). Namun pada

penelitian ini, model predasi intraguild dikembangkan dengan mempertimbangkan tahapan struktur pada mangsa sebagai sumber daya (*resources*).

Sejumlah spesies umumnya memiliki dua tahap dalam siklus kehidupannya, yaitu tahapan belum dewasa (*immature*) dan dewasa (*mature*). Hal tersebut telah dipertimbangkan dalam beberapa penelitian model predasi intraguild, seperti Collera dan Magpantay (2018) yang meneliti tentang dinamika model predasi intraguild dengan tahapan struktur pada populasi mangsa intraguild.

Populasi dengan jumlah yang besar dalam suatu area akan cenderung menyebar untuk memaksimalkan produktifitasnya. Oleh karena itu, faktor penyebaran populasi akan mempengaruhi kestabilan suatu ekosistem. Faktor penyebaran tersebut dideskripsikan sebagai suatu proses difusi yang merupakan perpindahan populasi dari daerah dengan konsentrasi kepadatan populasi tinggi ke daerah dengan konsentrasi kepadatan rendah (Fitriyah, 2014).

Setiap spesies cenderung bermigrasi dari suatu wilayah ke wilayah lain. Sehingga spesies tersebut tersebar keberbagai wilayah dan berinteraksi dengan spesies lain di wilayah migrasi. Hal tersebut menyebabkan adanya perubahan populasi terhadap waktu maupun ruang. Perubahan populasi pada model difusi predasi intraguild dengan pertimbangan efek spasial pernah diteliti oleh Han dkk (2018), Han dkk (2019), serta Zhang dan Dai (2018).



Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan, akan dilakukan penelitian tentang **Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.**

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang penelitian, adapun rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa?
2. Bagaimana analisis dinamik model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa?
3. Bagaimana pengaruh koefisien difusi terhadap model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa?
4. Bagaimana perbandingan simulasi numerik dari model tanpa pengaruh difusi dan model dengan pengaruh difusi?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah:

1. Membuat model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa.
2. Menganalisis dinamika model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa.
3. Menganalisis pengaruh koefisien difusi terhadap model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa

4. Menganalisis perbandingan simulasi numerik dari model tanpa pengaruh difusi dan model dengan pengaruh difusi.

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi pemahaman tentang model difusi predasi intraguild dan aplikasi model dalam melestarikan ekosistem.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Agar tidak menimbulkan penafsiran yang luas, batasan masalah diberikan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Model Difusi Predasi Intraguild yang diteliti merupakan model *tree-trophic* dengan tahapan struktur pada mangsa.
2. Pertumbuhan mangsa mengadopsi model pertumbuhan logistik.
3. Fungsi respon yang digunakan pada mangsa intraguild adalah fungsi respon Holling Tipe I dan pemangsa intraguild digunakan fungsi respon Beddington-deAngelish.
4. Keberlangsungan hidup mangsa kecil bergantung pada mangsa dewasa.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Predasi Intraguild

Suatu ekosistem terdapat banyak komponen ekologi yang saling berinteraksi satu sama lain. Fenomena interaksi antar spesies dalam populasi terdiri dari kompetisi (- -), predasi/ parasit (+ -), mutualisme (+ +), komensialisme (+ 0), dan amensialisme (- 0). Kombinasi antara kompetisi dan predasi biasanya dikenal dengan predasi intraguild. Predasi intraguild adalah saling membunuh dan memangsa antar spesies yang menggunakan sumber daya yang sama, dimana spesies tersebut merupakan kompetitor potensial antara yang satu dengan yang lainnya, dan spesies tersebut mempunyai cara akuisisi sumber daya yang sama. Perbedaan antara predasi intraguild dengan kompetisi yaitu predasi intraguild menguntungkan salah satu spesies (+ -), sedangkan kompetisi umumnya merugikan kedua spesies (- -). Selain itu, predasi intraguild berperan menurunkan kompetisi potensial (Polis, dkk, 1989).

Bentuk umum model predasi intraguild (Holt dan Polis, 1997) yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= rw \left(1 - \frac{w}{k}\right) - \rho_1 wy - \rho_2 wz, \\ \frac{dy}{dt} &= e_1 \rho_1 wy - \rho_3 yz - d_1 y, \\ \frac{dz}{dt} &= e_2 \rho_2 wz + e_3 \rho_3 yz - d_2 z,\end{aligned}\tag{2.1}$$

dimana,

$\frac{dw}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi mangsa terhadap waktu  $t$ .

$\frac{dy}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi mangsa intraguild terhadap waktu  $t$ .

$\frac{dz}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi pemangsa intraguild terhadap waktu  $t$ .

$r$  menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik individu populasi mangsa.

$k$  menyatakan daya dukung lingkungan.

$\rho_1$  menyatakan tingkat predasi maksimum mangsa intraguild terhadap mangsa.

$\rho_2$  menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa intraguild terhadap mangsa.

$\rho_3$  menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa intraguild terhadap mangsa intraguild.

$d_1$  menyatakan laju kematian mangsa intraguild

$d_2$  menyatakan laju kematian pemangsa intraguild

$e_1$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa ke dalam tingkat pertumbuhan mangsa intraguild.

$e_2$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa ke dalam tingkat pertumbuhan pemangsa intraguild.

$e_3$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa ke dalam tingkat pertumbuhan pemangsa intraguild.

## 2.2 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial. Model eksponensial mengasumsikan bahwa jika laju kelahiran per kapita  $b$  melebihi laju kematian per kapita  $d$ , maka populasi  $w$  akan tumbuh secara eksponensial tanpa batas. Jika sebaliknya, maka populasi  $w$  akan punah. Keadaan tersebut digambarkan dalam persamaan differensial berikut,

$$\frac{dw}{dt} = bw - dw \quad (2.2)$$

dengan mengintegrasikan kedua ruas diperoleh,

$$w(t) = w_0 e^{(b-d)(t-t_0)} \quad (2.3)$$

dimana,

$w_0$  = jumlah populasi awal

$t_0$  = waktu awal

Pertumbuhan secara eksponensial sangat membutuhkan nilai  $b > d$ , sehingga populasi akan tumbuh tanpa batas berdasarkan model. Tetapi, realitanya terdapat beberapa kendala yang menyebabkan tingginya angka kematian seperti peperangan, kelaparan dan wabah penyakit tidak dimasukkan ke dalam model. Oleh karena itu, dikembangkan model pertumbuhan logistik oleh Verhulst.

Model pertumbuhan logistik mengasumsikan jika pertumbuhan maksimum populasi  $k$ , maka laju pertumbuhan per kapita bersih (laju kelahiran dikurangi laju kematian) harus menurun sepanjang  $w$  mendekati

$k$ , dan akan menjadi negatif ketika  $w$  melebihi  $k$ . Fungsi yang menggambarkan keadaan tersebut adalah  $r(1 - \frac{w}{k})$ , dimana  $r$  merupakan konstanta positif. Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh persamaan logistik (Iswanto, 2012) sebagai berikut,

$$\frac{dw}{dt} = rw \left(1 - \frac{w}{k}\right) \quad (2.4)$$

dimana,

$w$  = jumlah populasi pada waktu  $t$ .

$r$  = koefisien laju pertumbuhan intrinsik populasi.

$k$  = daya dukung lingkungan (*carrying capacity*).

### 2.3 Fungsi Respon

Salah satu faktor yang krusial dalam dinamika interaksi mangsa pemangsa adalah laju konsumsi mangsa oleh populasi pemangsa atau fungsi respon pemangsa. Fungsi respon membantu untuk menganalisis dinamika mangsa pemangsa dengan akurat. Laju predasi bergantung pada beberapa aspek seperti kelompok usia, ukuran tubuh, habitat, interferensi, dan tolong menolong antar individu pada spesies tertentu. Jika mangsa bersifat lemah, ukuran tubuh kecil, juvenile (*immature*), atau tersedia secara berlimpah maka laju predasinya berupa fungsi linear yang dikenal dengan fungsi respon Holling tipe I (Dubey, 2019).

Pada umumnya ada beberapa fungsi respon, tetapi pada penelitian ini menggunakan dua fungsi respon, yaitu:

### 2.3.1 Fungsi Respon Holling Tipe I

Fungsi respon Holling tipe I merupakan hubungan antara kepadatan populasi mangsa dan tingkat konsumsi (Altwegg, 2006). Tingkat konsumsi pemangsa meningkat linear dengan kepadatan mangsa, tetapi akan konstan ketika pemangsa berhenti memangsa. Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada pemangsa yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu mangsanya, sebagai contoh pemangsanya adalah laba-laba kebun (*Argiope aurantia sp*). Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada fungsi respon Holling tipe I diberikan sebagai berikut ( Tsai dan Pao, 2004).

$$f(u, y) = \rho_1 u y, \quad (2.5)$$

dimana,

$f(u, y)$  menyatakan fungsi respon Holling tipe I.

$\rho_1$  menyatakan tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa.

$u$  menyatakan kepadatan populasi mangsa.

$y$  menyatakan kepadatan populasi pemangsa.

### 2.3.2 Fungsi Respon Beddington DeAngelish

Kepadatan predator adalah salah satu faktor utama dalam fungsi respon predator. Predator dapat mengganggu perilaku mencari makan dari sesama spesies (*co-specific*) melalui berbagai perilaku yang dapat mengurangi waktu untuk mencari makanan. Kompetisi intraspesifik, kanibalisme, perkawinan, dan perilaku sosial lainnya adalah contoh dari

gangguan tersebut. Oleh karena itu, model fungsi respon Holling tipe II dikembangkan menjadi suatu model baru yang mencakup kepadatan predator. Model Beddington DeAngelish (BDA) dan Crowley Martin (CM) adalah contoh dari model tersebut dan didasarkan pada asumsi yang sama dengan model Holling tipe II, dengan menambahkan asumsi adanya persaingan antara predator (kompetisi intraspesifik). Perbedaan kedua model tersebut adalah model BDA mengasumsikan bahwa interferensi predator hanya berpengaruh pada aktivitas mencari mangsa, sementara pada model CM mengasumsikan bahwa interferensi pemangsa juga berpengaruh pada aktivitas penanganan mangsa (Weterings dkk, 2015).

Menurut Garain dkk (2019), fungsi respon Beddington DeAngelis diberikan dengan menambahkan laju penanganan mangsa dan laju interferensi pada persamaan (2.5) sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$f(u, y) = \frac{\rho_1 u y}{1 + hu + gy} \quad (2.6)$$

dimana,

$h$  menyatakan laju penanganan mangsa oleh pemangsa

$g$  menyatakan laju interferensi antar pemangsa.

#### **2.4 Persamaan Differensial Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.**

Dinamika populasi pada penelitian ini dimodelkan secara matematis menggunakan persamaan differensial. Model dihasilkan dari modifikasi persamaan (2.1) dengan menambahkan tahapan struktur pada mangsa, seperti yang ditunjukkan pada sistem persamaan berikut.



$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= r_1 w - u(r_2 + \rho y + \delta z) \\
\frac{dw}{dt} &= r_3 w \left(1 - \frac{w}{k}\right) + r_2 u - \alpha w z \\
\frac{dy}{dt} &= y \left( e_1 \rho u - \frac{\beta z}{1 + h y + g z} - d_1 \right) \\
\frac{dz}{dt} &= z \left( e_2 \alpha w + e_3 \frac{\beta y}{1 + h y + g z} + e_4 \delta u - d_2 \right)
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

dimana,

$\frac{du}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi mangsa kecil terhadap waktu  $t$ .

$\frac{dw}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi mangsa dewasa terhadap waktu  $t$ .

$\frac{dy}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi mangsa intraguild terhadap waktu  $t$ .

$\frac{dz}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu populasi pemangsa intraguild terhadap waktu  $t$ .

$u$  menyatakan jumlah individu populasi mangsa kecil

$w$  menyatakan jumlah individu populasi mangsa dewasa

$y$  menyatakan jumlah individu populasi mangsa intraguild

$z$  menyatakan jumlah individu populasi pemangsa intraguild

$r_1$  menyatakan laju kelahiran individu populasi mangsa dewasa

$r_2$  menyatakan transformasi individu populasi mangsa kecil menjadi dewasa

- $r_3$  menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik individu populasi mangsa dewasa
- $\rho$  menyatakan tingkat predasi maksimum mangsa intraguild terhadap mangsa kecil
- $\delta$  menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa intraguild terhadap mangsa kecil
- $\alpha$  menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa intraguild terhadap mangsa dewasa
- $\beta$  menyatakan tingkat predasi maksimum pemangsa intraguild terhadap mangsa intraguild
- $\rho_1$  menyatakan tingkat pertumbuhan maksimum mangsa intraguild hasil konversi konsumsi mangsa kecil
- $\delta_1$  menyatakan tingkat pertumbuhan maksimum pemangsa intraguild hasil konversi konsumsi mangsa kecil
- $\alpha_1$  menyatakan tingkat pertumbuhan maksimum pemangsa intraguild hasil konversi konsumsi mangsa dewasa
- $\beta_1$  menyatakan tingkat pertumbuhan maksimum pemangsa intraguild hasil konversi konsumsi mangsa intraguild
- $k$  menyatakan daya dukung lingkungan
- $h$  menyatakan tingkat penanganan dan pencernaan mangsa intraguild
- $g$  menyatakan kekuatan saling interferensi antar pemangsa
- $d_1$  menyatakan laju kematian mangsa intraguild

- $d_2$  menyatakan laju kematian pemangsa intraguild
- $e_1$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa kecil ke dalam tingkat pertumbuhan mangsa intraguild
- $e_2$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa kecil ke dalam tingkat pertumbuhan pemangsa intraguild
- $e_3$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa dewasa ke dalam tingkat pertumbuhan pemangsa intraguild
- $e_4$  menyatakan laju konversi konsumsi mangsa intraguild ke dalam tingkat pertumbuhan pemangsa intraguild

Misalkan  $t$  merupakan variabel bebas dan  $u$  variabel tak bebas. Persamaan yang melibatkan  $t$ ,  $u$ , dan beberapa turunan  $u$  disebut persamaan diferensial.

**Definisi 2.4.1** (Wei, 2010)

Persamaan differensial biasa (PDB) adalah persamaan differensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu peubah bebas. Adapun bentuk umum dari PDB adalah

$$f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right) = 0 \quad (2.8)$$

dimana:

$u$  menyatakan fungsi dari variabel bebas  $t$ .

$\frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}$  menyatakan turunan 1, 2, ...,  $n$

**Definisi 2.4.2** (Wei, 2010)

Persamaan differensial parsial (PDP) adalah persamaan differensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas. Adapun bentuk umum dari PDP adalah

$$f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) = 0 \quad (2.9)$$

Orde suatu persamaan differensial ditentukan oleh turunan tertinggi yang dimilikinya, sedangkan derajat bagi persamaan differensial ditentukan oleh pangkat turunan tertinggi dalam persamaan tersebut (Sugiyarto, 2014).

PDP dikelompokkan menjadi tiga bagian yaitu persamaan differensial linier, kuasilinear, dan nonlinier. Misalkan bentuk PDP adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A(x, t)u_{xx}(x, t) + B(x, t)u_{xy}(x, t) + C(x, t)u_{yy}(x, t) + D(x, t)u_x(x, t) \\ + E(x, t)u_y(x, t) + F(x, t)u(x, t) = G(x, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dapat dinyatakan dengan kondisi-kondisi sebagai berikut:

1. Apabila koefisien  $A, B, C, D, E, F, G$  pada persamaan (2.10) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien  $A, B, C, D, E, F, G$  pada persamaan (2.10) adalah fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan

differentensialnya  $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t})$ , maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier.

Bentuk PDP orde dua dengan variabel bebas  $x$  dan  $t$ , diklasifikasikan dalam tiga bentuk yaitu eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Berdasarkan persamaan (2.10) diperoleh bentuk PDP orde dua dengan kriteria sebagai berikut:

- (i) Bentuk eliptik  $D < 0$
- (ii) Bentuk parabolik  $D = 0$
- (iii) Bentuk hiperbolik  $D > 0$

dimana  $D = B^2 - 4AC$ .

Model persamaan (2.7), jika ditambahkan efek difusi, maka diperoleh model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa  $w$ , dapat dilihat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_1 w - u(r_1 + \rho y + \delta z) \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r_2 w \left(1 - \frac{w}{k}\right) + r_1 u - \alpha w z \\
 \frac{\partial y}{\partial t} &= D_3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y \left( \rho_1 y - \frac{\beta z}{a + h y + g z} - d_1 \right) \\
 \frac{\partial z}{\partial t} &= D_4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z \left( \alpha_1 w + \frac{\beta_1 y}{a + h y + g z} + \delta_1 u - d_2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

dimana:

$\frac{\partial u}{\partial t}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa kecil terhadap waktu  $t$

$\frac{\partial w}{\partial t}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa dewasa terhadap waktu  $t$

$\frac{\partial y}{\partial t}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa intraguild terhadap waktu  $t$

$\frac{\partial z}{\partial t}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi pemangsa intraguild terhadap waktu  $t$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  menyatakan perubahan gradien kepadatan populasi mangsa kecil terhadap jarak  $x$ .

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  menyatakan perubahan gradien kepadatan populasi mangsa dewasa terhadap jarak  $x$ .

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  menyatakan perubahan gradien kepadatan populasi mangsa intraguild terhadap jarak  $x$ .

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  menyatakan perubahan gradien kepadatan populasi pemangsa intraguild terhadap jarak  $x$ .

Sistem persamaan (2.11) merupakan sistem yang tidak bergantung waktu secara eksplisit (autonomous) serta PDP yang terdiri dari dua variabel bebas yaitu  $t$  (waktu) dan  $x$  (jarak/ ruang) dengan variabel tak bebas  $u, w, y$ , dan  $z$ . Nilai dari variabel tak bebas tersebut akan berubah mengikuti perubahan variabel bebas. PDP pada persamaan (2.11) memiliki turunan tertinggi berorde dua, yakni  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  dan  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  dan juga berbentuk parabolik dimana nilai diskriminannya memenuhi  $D = b^2 - 4ac = 0$ . Kemudian, terdapat persamaan yang memuat PDP non linier dengan fungsi atau variabel dimana orde turunan sama dengan orde

persamaan differensialnya. Misalkan, pada populasi mangsa juvenile  $u$  persamaan (2.11a) memuat unsur  $\rho u_y$  dan  $\delta u_z$ .

Persamaan difusi adalah persamaan differensial parsial yang menggambarkan kepadatan dinamik suatu zat yang mengalami proses difusi (Crank, 1956). Menurut Han (2018) kecenderungan individu untuk bermigrasi ke wilayah yang memiliki kepadatan populasi yang rendah, sehingga spesies menyebar, menunjukkan reaksi difusi.

Parameter difusi pada sistem persamaan (2.11) diasumsikan besar dari nol. Fungsi logistik pada model pertumbuhan digunakan pada persamaan mangsa dewasa  $w$ , yang mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu  $x = 0$  dan  $x = k$ , dimana titik kesetimbangan pertama tidak stabil sementara titik kesetimbangan kedua stabil global (Cain dan Reynolds, 2010).

Analisis model persamaan difusi dapat diturunkan dengan ditentukan kondisi batas yaitu  $u(a, t) = u(b, t) = 0$  dan kondisi awal  $u(x, 0) = f(x)$ . Pada persamaan difusi mangsa pemangsa pergerakan partikel diasumsikan sebagai pergerakan pemangsa dan mangsa yang mana arah pergerakannya mempunyai peluang ke kanan  $\vec{p}$  dan ke kiri  $\vec{p}$ . Hal ini disebabkan arah gelombang yang bergerak ke kanan dan ke kiri (Fitriyah, 2014).

Menurut Zauderer (2006) pergerakan suatu partikel dapat diinterpretasikan dalam bentuk distribusi peluang yang menyatakan bahwa peluang partikel di  $x$  pada saat  $t + \tau$  sama dengan probabilitas

partikel di  $x \pm \mu$  pada saat  $t$ .

Misalkan  $u_{x-\mu}$  menyatakan banyaknya populasi di  $x - \mu$ ,  $u_{x+\mu}$  menyatakan banyaknya populasi di  $x + \mu$ , dan  $u_x$  menyatakan banyaknya populasi di  $x$ . Perubahan populasi ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\mu\vec{u} &= u_x - u_{x-\mu} \\ \mu\tilde{u} &= u_x - u_{x+\mu}\end{aligned}\tag{2.12}$$

dimana,

$\vec{u}$  menyatakan banyaknya populasi yang bergerak ke arah kanan.

$\tilde{u}$  menyatakan banyaknya populasi yang bergerak ke arah kiri.

Jika  $u_x < u_{x+\mu}$  maka  $\Delta u$  negatif, yang menunjukkan bahwa terjadi perpindahan ke arah kiri. Selanjutnya mengalikan persamaan (2.12) dengan  $\frac{\mu}{\mu}$  diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\mu}(u_x - u_{x+\mu}) &= \mu\left(\frac{u_x - u_{x+\mu}}{\mu}\right) = \mu(u_x - u_{x+\mu}) \\ \frac{\mu}{\mu}(u_x - u_{x-\mu}) &= \mu\left(\frac{u_x - u_{x-\mu}}{\mu}\right) = \mu(u_x - u_{x-\mu})\end{aligned}\tag{2.13}$$

dimana persamaan (2.13) menunjukkan bahwa rata-rata perubahan kepadatan populasi dinyatakan dengan  $\Delta U = \frac{\Delta u}{\mu}$ . Sementara laju perubahan kepadatan populasi  $\phi$  pada  $x$  dalam interval  $\tau$  ditunjukkan oleh persamaan berikut,

$$\begin{aligned}\vec{\phi} &= \mu\vec{p}\frac{1}{\tau}(U_x - U_{x-\mu}) = \frac{\mu(U_x - U_{x-\mu})}{2\tau} \\ \tilde{\phi} &= -\mu\tilde{p}\frac{1}{\tau}(U_x - U_{x+\mu}) = \frac{\mu(U_x - U_{x+\mu})}{2\tau}\end{aligned}\tag{2.14}$$



dimana peluang bergerak ke kanan atau ke kiri sebesar  $\frac{1}{2}$  dan perpindahan ke arah kiri bernilai negatif. Total laju perubahan kepadatan populasi ditunjukkan oleh persamaan berikut,

$$\phi = \frac{\mu}{2\tau} (U_x - U_{x-\mu} - U_x + U_{x+\mu}) = \frac{\mu^2}{2\tau} \frac{\Delta U}{\mu} \Big|_{x-\mu}^{x+\mu} \quad (2.15)$$

$\Delta U$  merupakan rata-rata perubahan kepadatan populasi pada jarak  $\mu$  terhadap kedua sisi  $x$ . Karena  $\mu$  dan  $\tau$  bernilai konstan, sehingga dimisalkan  $\frac{\mu^2}{2\tau} = D$ , dimana  $D$  merupakan koefisien difusi. Oleh karena itu, persamaan (2.15) dapat dinyatakan pada persamaan berikut,

$$\phi = D \frac{\Delta U}{\mu} \Big|_{x-\mu}^{x+\mu} \quad (2.16)$$

Diberikan limit  $\mu \rightarrow 0$ , sehingga perubahan posisi dinyatakan dengan  $\partial x$  dan perubahan kepadatan populasi dinyatakan dengan  $\partial U$ , sebagaimana yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\phi_x = D \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.17)$$

Perubahan kepadatan populasi pada  $x +/\mu$  ditunjukkan oleh persamaan berikut,

$$\frac{(U_{x+\mu} - U_x)}{\tau} = \frac{(\phi_{x,x+\mu} - \phi_{x-\mu,x})}{\mu} \quad (2.18)$$

Diberikan limit  $\tau \rightarrow 0$  dan  $\mu \rightarrow 0$ , sehingga persamaan (2.18) menjadi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.19)$$

dengan mensubstitusi persamaan (2.17) pada (2.19), diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.20)$$

yang dikenal dengan persamaan difusi Fickian orde satu (Pastor, 2008). Jika persamaan (2.20) tersebut disubstitusi pada sistem persamaan (2.7) untuk setiap  $D_n$  ( $n = 1,2,3,4$ ) dan  $U$  menyatakan jumlah populasi, maka diperoleh sistem persamaan (2.11).

## **2.5 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa.**

Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan differensial adalah dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Metode tersebut digunakan pada model difusi predasi intraguild dengan tahapan struktur pada mangsa. Pada metode beda hingga skema eksplisit, terdiri dari dua langkah yaitu beda maju terhadap waktu (*forward time*) diterapkan pada  $u_t$  dengan galat  $O(\Delta t)$ , dan metode beda pusat (*center difference*) diterapkan pada  $u_{xx}$  dengan galat  $O(\Delta x^2)$  (Durmin dan Lukman, 2013). Penggunaan metode beda hingga menggunakan ekspansi deret Taylor. Misalkan pada persamaan (2.11a), skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi  $u(x, t)$  yang terdiri dari dua variabel bebas  $x$  dan  $t$ . Menurut Causon dan Mingham (2010), deret Taylor dideskripsikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + (\Delta x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots \\
&+ \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} u(x, t)}{\partial x^{n-1}} + O(\Delta x^n)
\end{aligned} \quad (2.21)$$

dengan  $O(\Delta x^n)$  merupakan galat. Meninjau persamaan (2.21) pada turunan pertama diperoleh,

$$u(x_i + \Delta x, t_n) = u(x_i, t_n) + (\Delta x) \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} + O(\Delta x^2) \quad (2.22)$$

Sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} &= \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} \\
\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} &= \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x)
\end{aligned} \quad (2.23)$$

karena  $\Delta x$  konstan sehingga  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , persamaan (2.23) menjadi

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) merupakan skema beda hingga turunan parsial fungsi  $u$  pada  $x$  dan beda maju untuk  $x$ . Sementara itu, skema beda hingga turunan parsial fungsi  $u$  pada  $t$  dan beda maju untuk  $t$  dilakukan dengan cara yang sama, yakni mengubah persamaan (2.21) dengan  $u(x, t + \Delta t)$  sehingga diperoleh persamaan berikut,

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} - O(\Delta t) \quad (2.25)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga untuk turunan kedua fungsi  $u$  terhadap  $x$  dengan menggunakan deret Taylor orde 4 berikut,

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + (\Delta x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots \\
&+ \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)
\end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - (\Delta x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots \\
&- \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Persamaan (2.26) dan (2.27) dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\Delta x^4) \\
u(x_{i+1}, t_n) + u(x_{i-1}, t_n) &= 2u(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} + O(\Delta x^4) \\
\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)
\end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x^2}$$

Persamaan (2.28) merupakan beda pusat untuk  $x$ . Skema beda hingga untuk turunan parsial kedua fungsi  $u$  pada  $t$ , dilakukan dengan cara yang sama, yaitu mengubah persamaan (2.26) dan (2.27) dengan  $u(x, t + \Delta t)$  dan  $u(x, t - \Delta t)$ . Sehingga diperoleh persamaan berikut,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta t^2} \quad (2.29)$$

persamaan (2.29) merupakan beda pusat untuk  $t$ .

## 2.6 Sistem Dinamik Model Difusi Predasi Intraguild dengan Tahapan Struktur pada Mangsa

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan differensial dimana dalam persamaannya mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium. Jika dikaji secara geometris, maka sistem dinamik menggambarkan pergerakan titik-titik di dalam ruang fase sepanjang kurva-kurva solusi dari sistem persamaan differensialnya. Tujuan utama dari sistem dinamik adalah mempelajari perilaku dari solusi sistem di sekitar titik ekuilibrium. Untuk mempelajari perilaku dari solusi sistem digunakan suatu pendekatan yang disebut analisis kestabilan. Titik ekuilibrium dan kestabilannya dapat memberikan informasi mengenai perilaku solusi periodik dari persamaan diferensial (Waldhani, 2015).

Model predasi intraguild pada penelitian ini menggunakan persamaan nonlinear. Misalkan

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad (2.30)$$

Jika persamaan (2.30) mempunyai titik kesetimbangan  $E^*$  maka persamaan (2.30) dapat ditulis sebagai

$$\frac{du}{dt} = Df_1(E^*)u + \varphi(u) \quad (2.31)$$

Bentuk  $\varphi(u)$  sebagai bagian nonlinear dari persamaan (2.30) dan  $Df(u^*)$  sebagai matriks Jacobian dari persamaan (2.30) pada titik kesetimbangan  $E^*$ .

Secara umum fungsi yang bergantung waktu (sistem non autonomous) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n, t) \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= f_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t)\end{aligned}\tag{2.32}$$

dengan  $f_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t), n = 1, 2, \dots$ , adalah suatu fungsi umum dari  $u_n$  dan waktu  $t$ . Sebaliknya, fungsi yang tidak bergantung waktu secara eksplisit (autonomous) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{du_3}{dt} &= f_3(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= f_i(u_1, u_2, \dots, u_n)\end{aligned}\tag{2.33}$$

Titik kesetimbangan  $E^* = (E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*)$  akan memenuhi

$$\begin{aligned}
f_1(E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*) &= 0, \\
f_2(E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*) &= 0, \\
&\vdots \\
f_n(E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.34}$$

(Strogatz, 1994).

**Definisi 2.6.1** (Supriyono, 2014)

Titik kesetimbangan  $E^* \in \mathbb{R}^n$  pada sistem (2.33) dikatakan titik kesetimbangan jika  $\frac{du}{dt}(E^*) = 0$  untuk semua  $t$ .

Perilaku dari solusi sistem tersebut digunakan pendekatan analisis kestabilan. Analisis ini dapat dilakukan dengan beberapa cara seperti penyelidikan terhadap perilaku titik kesetimbangan dari persamaan diferensial. Titik kesetimbangan dan kestabilan dapat memberikan informasi mengenai perilaku solusi periodic dari persamaan diferensial.

**Definisi 2.6.2** (J.K. Hale, 1991).

Apabila terdapat fungsi  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  pada sistem dengan  $f_i \in C(E)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Matriks

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}
\tag{2.35}$$

dinamakan matriks Jacobian dari  $f$ .

Matriks Jacobian  $Df$  digunakan untuk mengetahui sifat kestabilan dari titik ekuilibrium  $u^*$  melalui sifat nilai eigen sistem dinamik tersebut. Secara formal definisi nilai eigen dan vektor eigen adalah sebagai berikut.

**Definisi (2.6.4)** (Anton, 1987)

Misalkan  $A$  matriks  $n \times n$  dan  $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ . Vektor  $u$  disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari  $A$  jika

$$Au = \lambda u \quad (2.36)$$

untuk suatu  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Bilangan  $\lambda$  yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai eigen atau nilai karakteristik. Vektor  $u$  disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

**Definisi (2.6.4)** (Alydrus, 2015)

Titik kesetimbangan  $E^*$  stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari matriks Jacobian  $Df(E^*)$  pada persamaan (2.35) mempunyai tanda negatif pada bagian real dan tidak stabil jika terdapat satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda pada bagian real.

Kestabilan sistem ditunjukkan dengan menggunakan nilai karakteristik. Persamaan karakteristik  $P(\lambda^n)$  dengan  $n > 2$  cenderung menggunakan kriteria kestabilan Routh Hurwitz untuk menganalisis kestabilan tanpa menentukan akarakar karakteristik.

Jika sebuah persamaan karakteristik dengan orde  $n$  berikut.

$$e_0\lambda^n + e_1\lambda^{n-1} + e_2\lambda^{n-2} + \dots + e_n = 0 \quad (2.37)$$



Kemudian susun koefisien persamaan karakteristik menjadi Tabel

2.1 berikut.

**Tabel 2.1.** Tabel Koefisien Persamaan Karakteristik

$\lambda^n$	$e_0$	$e_2$	$e_4$	$\dots$	$e_{2n-2}$
$\lambda^{n-1}$	$e_1$	$e_3$	$0$	$\dots$	$e_{2n-1}$
$\lambda^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\dots$	$A_n$
$\dots$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\dots$	$B_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

dengan  $n = 1, 2, \dots, k$ ,  $A_1 = \frac{e_1 e_2 - e_0 e_3}{e_1}$ ,  $A_2 = \frac{e_1 e_4 - e_0 e_5}{e_1} = e_4$ ,  $A_3 = \frac{e_1 e_6 - e_0 e_7}{e_1}$ ,

$B_1 = \frac{A_1 e_3 - e_1 A_2}{A_1}$ ,  $B_2 = \frac{A_1 e_5 - A_3 e_1}{A_1}$ . Tabel 2.1 tersebut dilanjutkan mendatar dan

menurun hingga diperoleh nilai nol. Semua akar tersebut bernilai negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen dari kolom pertama pada tabel mempunyai tanda yang sama (Alydrus, 2015).