TESIS

SOLUSI PERMAINAN TRIBONACCI SEBAGAI SEBUAH PERLUASAN DARI PERMAINAN WYTHOFF

THE SOLUTION OF TRIBONACCI GAME AS A GENERALIZATION OF WYTHOFF GAME

Rahmaniah Rakhman

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2012

SOLUSI PERMAINAN TRIBONACCI SEBAGAI SEBUAH PERLUASAN DARI PERMAINAN WYTHOFF

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Matematika Terapan

Disusun dan diajukan oleh

Rahmaniah Rakhman

kepada

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2012

TESIS

SOLUSI PERMAINAN TRIBONACCI SEBAGAI SEBUAH PERLUASAN DARI PERMAINAN WYTHOFF

Disusun dan diajukan oleh

Rahmaniah Rakhman

Nomor Pokok P3500208010

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis
pada tanggal 04 Juni 2012
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasehat

DR. Loeky Haryanto, MS, MSc, MAT	**Dr. Nurdin, M.Si.**
Ketua	Anggota
Ketua Program Studi Matematika Terapan,	Direktur Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin.
Dr. Jeffry Kusuma	**Prof. Dr. Ir. Mursalim**

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Rahmaniah Rakhman
Nomor mahasiswa	: P3500208010
Program Studi	: Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 04 Juni 2012

Yang menyatakan

Rahmaniah Rakhman

PRAKATA

Assalamu Alaikum Wr.Wb.

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat-Nya sehingga penulisan tugas akhir ini dapat diselesaikan walaupun dalam bentuk yang sangat sederhana.

Tak lupa pula penulis menuturkan kata maaf jika sekiranya dalam penulisan ini terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca.

Lembaran ini dipersembahkan untuk mereka yang senantiasa menyayangi, membimbing, mendoakan dan memberikan semangat bagi penulis dalam meraih sebuah cita-cita. Oleh karena itu, sudah selayaknya penulis menyatakan penghargaan dan terima kasih kepada :

1. Orang tua tercinta **H. Rakhman, S.Pd.I.** dan **Hj. Dg. Tallasa D.,S.Pd.I.** serta adikku **Sari Fatmawati, A.Ma**. dan **Fitriah Safitri,** tanteku **Rugaya**, **Hj. Hafsah**, tante **Aminah**, kakek, Om dan semua keluarga dari Sinjai yang senantiasa membimbing, melimpahkan kasih sayang, dukungan dan doa selama ini, penulis menyampaikan rasa hormat dan ucapan terima kasih yang sedalam-dalamnya.

2. Special for my husband **Faisal Pasistan, SE.** yang telah senantiasa menyayangi, mendorong, dan memberikan dukungan positif dalam pembuatan tugas akhir ini serta dengan tulus hati menemani penulis dalam suka dan duka.
3. Bapak **DR. Loeky Haryanto, M.S.,M.Sc.,MAT** selaku pembimbing utama dan Bapak **Dr. Nurdin, M.Si.** selaku pembimbing pertama yang dengan tulus meluangkan waktu dan menyumbangkan ilmu dalam membantu pembuatan dan dalam penuntasan tugas akhir ini. Semoga Allah SWT senantiasa meridhoi serta melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya atas segala amal baik beliau terhadap dunia pendidikan dan ilmu pengetahuan.
4. Bapak **Dr. Jeffry Kusuma** selaku Ketua Program Studi Matematika Terapan, Pascasarjana Universitas Hasanuddin.
5. Seluruh **Staff Pengajar** di Jurusan Matematika F-MIPA Universitas Hasanuddin yang telah memberikan bekal hidup berupa ilmu pengetahuan yang dapat digunakan oleh penulis dalam menapaki masa depan yang lebih cerah.
6. **Staf pegawai** Jurusan matematika F-MIPA Universitas Hasanuddin yang selalu ramah dalam melayani dan membantu penulis selama masa perkuliahan hingga selesai studi di Jurusan Matematika F-MIPA UNHAS.

7. Buat sahabatku **Risnawati Ibnas, M.Si.** dan **Febryanti** yang selalu membantu penulis selama menjalani masa perkuliahan serta senantiasa meluangkan meluangkan waktu untuk penulis.
8. Teman-teman yang telah membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.
9. Rekan-rekan **angkatan 2008** yang selalu menghibur dan mensport penulis agar giat dan semangat menyelesaikan studi.
10. Adik-adik **angkatan 2009 dan 2010** yang senantasa mendoakan penulis agar cepat memperoleh gelar magister.

Akhirnya kepada Allah SWT. jugalah penulis memohonkan semoga segala jerih payah dan amal bakti semua pihak tersebut senantiasa dilimpahi rahmat-Nya, Amin.

Makassar, 04 Juni 2012

Rahmaniah Rakhman

ABSTRAK

Rahmaniah Rakhman. *Solusi Permainan Tribonacci Sebagai Sebuah Perluasan dari Permainan Wythoff* (dibimbing oleh Loeky Haryanto dan Nurdin).

Tujuan utama dari thesis ini adalah memperluas permainan Wythoff yang dibuat berdasarkan barisan bilangan yang sudah dikenal luas yaitu barisan fibonacci. Permainan yang diperluas dari permainan fibonacci tersebut dinamakan permainan tribonacci sebab dibuat berdasarkan barisan yang lebih kurang dikenal, barisan tribonacci.

Metoda yang digunakan adalah penelitian kepustakaan. Dengan metoda ini, dicari berbagai kepustakaan yang menyediakan berbagai rumusan dan model matematis yang diperlukan untuk perluasan permainan Wythoff menjadi permainan tribonacci. Hampir semua pembuktian yang diberikan adalah rincian atau perbaikan dari pembuktian serupa di dalam tulisan Duchene dan Rigo [4].

Hasil utama dari studi ini adalah konstruksi barisan (A_n, B_n, C_n) dengan $A_n < B_n < C_n$, untuk setiap indeks $n \geq 1$, dengan menggunakan morfisma. Barisan ini membentuk posisi-*P* dari permainan tribonacci. Pembuktian ekuivalensi antara konstruksi rekursif dan konstruksi dengan morfisma diberikan secara formal dan lengkap.

Kata Kunci: morfisma, barisan tribonacci, kata Tribonacci, permainan tribonacci, posisi-*P*.

ABSTRACT

Rahmaniah Rakhman. *The solution of Tribonacci Game as a Generalization of Wythoff Game.* (supervised by Loeky Haryanto and Nurdin).

The aim of this research was to study a generalization of Wythoff game which is based on the well-known fibonacci sequence. The generalization is called tribonacci game since it is based on the less well-known tribonacci sequence.

The method of the study was a library research searching references which provide mathematical tools to derive many formulas and models for the generalized game. Most of proofs are elaborations, sometimes fixing, similar proofs given by Duchene and Rigo in [4].

The main results from this study is a constructions of sequence (A_n, B_n, C_n) with $A_n < B_n < C_n$, for every index $n \geq 1$, using a morphism. The sequence constitutes the *P*-positions of the generalized tribonacci game. A formal complete proof of the equivalence between the morphic and recursive constructions is provided,

Key Words : morphism, tribonacci sequence, tribonacci word, tribonacci game, *P*-positions

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Arti
Σ	Himpunan alphabet
η, τ	Morfisma Fibonacci dan Tribonacci
$\circ$	Fungsi komposisi
F, T	Barisan Fibonacci dan Tribonacci
α, β, γ	Jumlah token yang diambil dari tumpukan *A*,*B*, dan *C*
α', β', γ'	Jumlah token yang tersisa dari tumpukan *A*, *B*, dan *C*
ρ	golden rasio
ψ	Jumlah alphabet setelah dipetakan
Δ	Selisih
$(A_n)_{n\geq 1}$, $(B_n)_{n\geq 1}$, $(C_n)_{n\geq 1}$	Barisan tumpukan *A*, *B*, dan *C*
δ	Fungsi transisi
μ, λ	Morfisma istimewa dari U
χ_μ, χ_ν	Karakteristik *u* dan *v*

Γ	Alpabet hingga
L	Bahasa atas Σ
ε	Kata kosong
σ	Morfisma
S(**u**)	Himpunan jumlah parsial
$\cup$	Gabungan
$\cap$	Irisan
$\in$	Elemen/ unsur
$\notin$	Bukan elemen
$\subseteq$	Bagian dari himpunan
$N_{\lambda}(w)$	Himpunan naik murni dari w
$\lfloor \ \rfloor$	Spektrum/pembulatan ke bawah

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori permainan kombinatorik (*combinatorial games*) adalah teori yang membahas berbagai permainan menang-kalah, sukses-gagal, dan sebagainya yang dimainkan oleh dua orang dengan berbagai aturan dan manipulasi kombinatorik, yang secara matematis bisa merumuskan strategi untuk menang atau kalah (sukses dan gagal) berdasarkan masukan data yang diberikan atau dipilih oleh pemain-pemainnya.

Beberapa aplikasi teori permainan kombinatorik telah diaplikasikan pada teori graph, teori pengkodean, dan fraksi kontinu (Fraenkel [7], [8], [9]). Fraksi kontinyu adalah suatu penulisan bilangan real sebagai titik konvergen dari suatu barisan bilangan pecahan.

Permainan kombinatorik sering pula dikelompokkan dalam kelompok matematika rekreasi (*recreational mathematics*). Tak ada batas atau definisi yang jelas untuk membedakan berbagai cabang atau kelompok studi matematika, misalnya antara matematika diskrit dengan kombinatorik, antara permainan kombinatorik dengan matematika rekreasi.

Dalam tulisan ini akan diturunkan solusi dari sebuah permainan yang secara sepihak oleh Duchene dan Rigo melalui [4] diberi nama permainan tribonacci. Nama tribonacci dipilih karena solusi dari permainan ini diturunkan melalui bentuk morfisma yang dikenakan pada kata tribonacci (*tribonacci word*).

Kata tribonacci ini dibentuk dari alfabet {*a*, *b*, *c*} dan merupakan generalisasi dari kata fibonacci yang dinyatakan oleh ekspresi (2.2). Tentu saja lambang unsur-unsur alfabet *a*, *b*, *c* bisa diganti dengan huruf atau simbol lain.

Permainan tribonacci diilhami oleh dua permainan, NIM *game* dan *Wythoff game*, yang sudah ada lebih dari satu abad sebelumnya. Menurut berbagai sumber (misalnya oleh Berlekamp [2], hal. 41, 52), permainan Nim diperkenalkan oleh C.L. Boulton dalam jurnal *Annals of Mathematics* pada tahun 1902, sedangkan Wythoff pada tahun 1907 membuat variasi dari NIM *game* yang kemudian disebut permainan Wythoff. Sejak itu, ada banyak variasi dari kedua permainan tersebut.

Beberapa ciri bersama dari ketiga permainan di atas adalah ketiga permainan dimainkan oleh dua orang pemain yang mengunakan *n* tumpukan *token* (bisa kartu, atau sembarang benda) sebagai alat permainan dan dari aturan masing-masing permainan, salah satu pemain dengan langkah-langkah yang benar selalu bisa membuat lawannya berada pada salah satu posisi-*P* dan posisi-*P* yang terakhir adalah posisi kalah dari lawan.

Secara umum, ketiga permainan menggunakan *n* tumpukan (*n* tempat menyimpan token) dan masing-masing tumpukan berisi sebanyak bulat positif *token*. Secara bergantian, setiap pemain memilih tumpukan dan kemudian mengambil sebanyak positif (tergantung aturan permainan) token dari tumpukan tersebut. Pemain yang menang adalah pemain yang terakhir kali bisa mengambil *token*.

Kelompok permainan NIM menggunakan aturan paling sederhana. Permainan NIM yang paling banyak dikenal luas menggunakan tiga tumpukan *token*: tumpukan **A**, **B** dan **C (**Lihat Bab 2 bagian C). Setiap pemain berhak mengambil berapa pun *token* dari salah satu tumpukan, pemain tidak boleh mengambil semua *token* kecuali hanya satu token yang tersisa. Solusi permainan ini terkait walaupun tidak secara langsung dengan konsep barisan fibonacci.

Permainan NIM yang lebih sederhana hanya menggunakan satu tumpukan *token* dan dimainkan oleh dua orang. Kedua pemain secara bergantian mengambil *token-token* tersebut dengan aturan yang lebih rumit :

1. Pada pengambilan pertama, pemain tidak boleh mengambil semua *token*.
2. Banyaknya *token* yang diambil oleh seorang pemain tidak boleh lebih dari kelipatan dua banyaknya *token* yang diambil oleh pemain sebelumnya.

3. Pemain tidak boleh mengambil semua *token* kecuali hanya satu token yang tersisa.
4. Pemain yang mengambil token terakhir menang.

Wythoff game hanya menggunakan dua tumpukan *token*. Selain bisa mengambil *token* dari salah satu tumpukan, setiap pemain juga bisa mengambil *token* dari kedua tumpukan, asalkan banyak *token* yang diambil dari masing-masing tumpukan adalah sama.

Walaupun menggunakan alat permainan yang sama, tribonacci *game* berbeda dari kedua permainan di atas karena aturan permainannya dan banyaknya alat sudah diubah. Permainan tribonacci menggunakan tiga tumpukan *token* yang dimainkan oleh dua orang pemain.

Kedua pemain secara bergantian mengambil *token-token* tersebut dengan aturan sebagai berikut :

1. Posisi awal permainan: $(a,b,c) \in \mathbf{N}^3$ dengan $0 \leq a \leq b \leq c$, $c \neq 0$.
2. Setiap pemain secara bergantian bebas mengambil berapa pun *token* dari salah satu atau dua tumpukan.
3. Untuk pengambilan token dari tiga tumpukan sekaligus pada saat posisi (a,b,c), ada 2 cara yang bisa dipilih:

   a. setiap pemain dapat mengambil sebanyak (bilangan-bilangan positif) α, β, γ token dengan $0 < \alpha \leq a$, $0 < \beta \leq b$, $0 < \gamma \leq c$, dari masing-masing tumpukan **A**, **B**, **C** asalkan memenuhi syarat:

$$2 \cdot \text{maks}\{\alpha, \beta, \gamma\} \le \alpha + \beta + \gamma.$$

b. setiap pemain dapat mengambil token dari dua tumpukan yang berbeda masing-masing sebanyak α token dan mengambil sebanyak β token dari tumpukan yang lain asalkan memenuhi kedua syarat :

i. $\beta > 2\alpha > 0$

ii. Jika *a'* (ganti: *b', c'*) adalah banyak token yang tersisa setelah diambil dari tumpukan **A** (ganti: tumpukan **B**, **C**), maka tidak boleh terjadi $a' < c' < b'$.

4. Pemain yang mengambil token terakhir menang

Solusi dari permainan ini akan dikembangkan berdasarkan konsep morfisma yang menghasilkan kata tribonacci. Konsep morfisma ini berbeda dengan sistem numerasi yang dikembangkan oleh Fraenkel untuk mendapatkan solusi permainan sejenis, Walaupun permainan Wythoff bisa diselesaikan dengan morfisma yang menghasilkan kata fibonacci, tetapi solusi asli yang diberikan oleh Wythoff dikembangkan secara rekursif.

1.2. Ruang Lingkup Masalah

Setiap permainan kombinatorial yang dimainkan oleh dua orang memiliki solusi yang bisa dirumuskan secara matematis. Jadi tak ada unsur kebetulan atau peluang (*chance*) yang berperan dalam penentuan pemenang.

Di dalam permainan kombinatorial, ada sekumpulan posisi yang bisa dipaksakan oleh salah seorang pemain untuk selalu terjadi dan dari posisi-posisi ini pemain tersebut bisa menentukan kemenangan. Setiap posisi dari kumpulan posisi ini dinamakan posisi-*P*.

Pemain yang bisa menentukan posisi-*P* tidak bisa dipastikan menang karena kepastian kemenangan didapat bukan hanya oleh posisi-*P*, tetapi juga oleh langkah-langkah lanjutan yang dipilih pemain tersebut. Kesalahan satu langkah bisa merubah keadaan menjadi terbalik: lawan bisa memaksakan posisi-*P*. Konsep posisi-*P* dijelaskan pada paragraf setelah Contoh 2.1 (Ilustrasi permainan NIM).

Permasalahan yang akan dikaji dalam penelitian ini sebagai berikut:

a. Bagaimana konstruksi posisi-*P* beberapa permainan, khususnya Withoff game, yang memiliki kemiripan aturan dan alat mbermain dengan permainan tribonacci?

b. Sebagai perbandingan dengan permainan NIM dan Wythoff yang kumpulan posisi-*P*-nya telah dikenal luas dan penurunannya jauh lebih sederhana, bagaimana dengan masalah penurunan dan konstruksi posisi-*P* permainan Tribonacci yang jauh lebih kompleks?

c. Bagaimana keterkaitan antara konsep barisan tribonacci dengan kata tribonacci sebagai bentuk perluasan dari keterkaitan antara konsep barisan fibonacci dan kata fibonacci?

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan:

a. Menguraikan kumpulan posisi-*P* beberapa permainan, khususnya permainan Wythoff, yang memiliki kemiripan aturan dan alat bermain dengan permainan tribonacci.

b. menguraikan dan menjabarkan keterkaitan antara konsep barisan tribonacci dengan kata tribonacci sebagai bentuk perluasan dari keterkaitan antara konsep barisan fibonacci dan kata fibonacci.

c. menguraikan dan menjabarkan secara lengkap dan *rigorous* penurunan secara matematis solusi (posisi-*P*) dari permainan tribonacci berdasarkan morfisma pada suatu bahasa berbasis alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Beberapa pakar menulis beberapa buku teks khusus tentang permainan kombinatorik. Salah satu buku teks klasik tentang permainan kombinatorik yang banyak menjadi rujukan adalah karangan dari Barcucci [1] dan Berlekamp [2].

Permainan NIM dan Withoff solusinya diperoleh berdasarkan barisan fibonacci sedangkan barisan tribonacci merupakan perluasan dari barisan fibonacci. Jadi untuk memahami strategi pemenangan dalam penrmainan tribonacci yang jauh lebih kompleks daripada permainan NIM dan Wythoff, lebih dulu dibahas dua permainan yang strategi pemenangannya berbasis barisan fibonacci.

Walapun berbeda basis dan perumusan, strategi pemenangan antara permainan NIM, Fibonacci NIM dan Wythoff di satu pihak, dengan permainan tribonacci di pihak lain, tetapi hakekat strategi pemenangan ke-empat permainan yang dimainkan dua orang ini adalah sama, yaitu salah satu pihak bisa memaksakan posisi permainan pada dua keadaan: posisi-*P* dan bukan posisi-*P* (posisi-*N*) secara berselang-seling sepanjang permainan berlangsung.

Konsep kata fibonacci dan kata tribonacci akan didefinisikan dan dibahas secara formal di Bagian B dalam bab ini.

2.1. Alfabet, Kata (*Word*) dan Morfisma

Alfabet didefinisikan sebagai sembarang himpunan hingga dan tak kosong Σ. Konsep alfabet menjadi dasar pembentukan konsep untaian (*string*) dan konsep kata (*word*) dari alfabet tersebut. Dalam teori otomata, penggunaan lambang

$$\Sigma$$

untuk merujuk suatu alfabet adalah kebiasaan yang lazim, kalau tak bisa disebut baku.

Sembarang dua unsur $s_1, s_2 \in \Sigma$ (tidak harus berbeda) bisa dikenakan **operasi penyambungan** (*concatenation*) menjadi s_1s_2 atau s_2s_1. Secara umum, dari sebanyak hingga unsur-unsur $s_1, s_2, ..., s_k \in \Sigma$, dengan operasi penyambungan, diperoleh barisan

$$\mathbf{s} = s_1s_2...s_k$$

Hasil operasi penyambungan ini disebut *kata* (berhingga) atas alfabet Σ. Jika **s** merupakan hasil sambungan sebanyak *k* huruf, maka dikatakan panjang kata **s** adalah *k* dan dinyatakan melalui simbol $|\mathbf{s}| = k$.

Himpunan semua kata hingga atas alfabet Σ dinyatakan dengan Σ^* dan setiap subhimpunan tak kosong $L \subseteq \Sigma^*$ (lebih tepat $L(\Sigma) \subseteq \Sigma^*$, untuk menyatakan ketergantungan L pada Σ) disebut **bahasa** atas Σ. Jika alfabet Σ =

$\{s_1, s_2, ..., s_{nt}\}$ adalah himpunan berhingga, diberikan notasi yang lebih lengkap untuk bahasa Σ*, yaitu

$$(s_1, s_2, ..., s_n)^*.$$

Setiap unsur dari suatu bahasa L disebut **kata** atau **kalimat** (jika dalam konteks bahasa komunikasi manusia).

Walaupun tidak digunakan, struktur aljabar dari Σ* memenuhi aksioma-aksioma sebagai **monoid**, yaitu sebuah himpunan dengan satu operator biner yang bersifat asosiatif dan memiliki satu unsur identitas. Operator biner dari Σ* adalah operator penyambungan dan unsur identitasnya adalah kata kosong (*empty word*) yang biasa diberi lambang ε.

Panjang kata ε didefinisikan 0 ($|\varepsilon| = 0$) dan operasi penyambungan setiap kata **s** dengan ε menghasilkan kata **s** sendiri:

$$\varepsilon\mathbf{s} = \mathbf{s} = \mathbf{s}\varepsilon. \tag{2.1}$$

Kata kosong $\varepsilon \in \Sigma^*$ berperan mirip dengan peran bilangan 0 di dalam sistem bilangan.

Suatu bahasa $L \subseteq \Sigma^*$ bisa saja sembarang subhimpunan tak kosong dari Σ*, tetapi untuk mendapatkan manfaat dan kemudahan manipulasi, terhadap unsur-unsur bahasa atau operasi antar bahasa, diperlukan konstruksi bahasa secara sistematis. Kata Fibonacci dan kata Tribonacci tidak memenuhi definisi ‘kata’ (sebagai unsur dari suatu bahasa), tetapi merupakan satu kata tak hingga yang merupakan hasil limit dari suatu barisan kata-kata di dalam bahasa.

Diberikan dua alfabet Σ_1 dan Σ_2 (yang tidak harus berbeda). Suatu fungsi

$$\sigma|_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2^*$$

dikatakan membangun suatu **morfisma**

$$\sigma : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$$

jika $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$ dan untuk setiap $\mathbf{s} = s_1 s_2 \ldots s_k \in \Sigma_1^*$ dengan $s_i \in \Sigma_1$ berlaku

$$\sigma(\mathbf{s}) = \sigma(s_1 s_2 \ldots s_k) = \sigma(s_1)\sigma(s_2)\ldots\sigma(s_k).$$

Unsur-unsur dalam daerah jangkauan $\sigma(\Sigma_1^*)$ sudah bisa ditentukan (dibangun) oleh semua nilai-nilai $\sigma|_\Sigma(a)$, $a \in \Sigma_1$ sebab dari sifat morfisma, semua nilai-nilai $\sigma(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \Sigma_1^*$, bisa ditentukan. Untuk menyederhanakan notasi, kedua fungsi $\sigma|_\Sigma$ dan σ dianggap satu morfisma yang sama dan ditulis dengan satu lambang yang sama:

$$\sigma$$

Seperti biasa, σ^k menyatakan fungsi komposisi k kali

$$\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k \text{ faktor}}$$

Salah satu kata tak hingga (*word*) atas Σ yang bisa diturunkan dari suatu morfisma σ adalah suatu barisan tak hingga yang diperoleh dari limit

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^k(x),$$

untuk suatu $x \in \Sigma$.

2.2. Barisan dan Kata Fibonacci

Dari alfabet hingga

$$\Sigma = \{a, b\},$$

didefinisikan morfisma fibonacci

$$\eta : \Sigma^* \to \Sigma^*.$$

yang dibangun oleh aturan pengawanan

$$\eta|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma^*$$

yaitu $\eta|_\Sigma(a) = ab$ dan $\eta|_\Sigma(b) = a$ dan tentu saja $\eta|_\Sigma(\varepsilon) = \varepsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{s} = s_1 s_2 \ldots s_{n-1}$ dengan komponen $s_i \in \Sigma$ berlaku

$$\eta(\mathbf{s}) = \eta|_\Sigma(s_1)\, \eta|_\Sigma(s_2) \ldots \eta|_\Sigma(s_{n-1}).$$

Konstruksi kata Fibonacci secara iterasi di awali dari kata $\eta(a) = \eta|_\Sigma(a) = ab$, dilanjutkan secara berurutan oleh kata-kata

$$\eta^2(a) = \eta(\eta(a)) = \eta(ab) = \eta(a)\eta(b) = aba,$$

$$\eta^3(a) = \eta(\eta^2(a)) = \eta(aba) = \eta(a)\eta(b)\eta(a) = abaab,$$

$$\eta^4(a) = \eta(\eta^3(a)) = \eta(abaab) = \eta(a)\eta(b)\eta(a)\eta(a)\eta(b) = abaababa, \text{ dst.}$$

Perhatikan aba, $abaab \in \Sigma^*$ tetapi aba, $abaab \notin \Sigma$.

Kata (tak hingga) *fibonacci* atau *rabbit string* (jika digunakan $\Sigma = \{0, 1\}$) didefinisikan sebagai limit barisan kata-kata tersebut di atas:

$$\lim_{k \to \infty} \eta^k(a) = abaababaabaababaabab\ldots \,. \qquad (2.2)$$

Dari banyak sumber (mis. dari Knot [12]), kata fibonacci pertama kali disebut secara tertulis untuk menggambarkan secara tidak formal suatu model ideal pertumbuhan populasi kelinci secara bulanan, seperti yang digambarkan oleh skema di dalam Tabel 2.1. Pada skema tersebut, populasi kelinci di awali oleh sepasang bayi kelinci *b* pada awal bulan ke-0. Dari kolom sebelah kiri ke kolom sebelah kanannya, umur kelinci bertambah 1 bulan dan setiap pasang bayi kelinci *b* berubah menjadi sepasang kelinci dewasa *a*.

Asumsi-asumsi yang menentukan banyak pasangan kelinci pada awal bulan ke-*n* adalah:

1. Pada awal bulan ke-0, tepat satu pasang bayi kelinci *b* lahir.
2. Jika sepasang bayi kelinci *b* lahir pada awal bulan ke-*i*, maka pada awal bulan berikutnya, yaitu pada awal bulan ke-(i + 1), pasangan kelinci *b* menjadi pasangan kelinci dewasa *a* dan pada awal bulan selanjutnya, yaitu pada awal bulan ke-(i + 2), pasangan kelinci *a* ini melahirkan sepasang bayi kelinci *b*.

3. Mulai umur 2 bulan, setiap pasangan kelinci dewasa *a* selalu melahirkan satu pasang bayi kelinci *b* pada awal bulan dan setiap awal bulan berikutnya.

4. Setiap pasangan kelinci yang lahir tidak pernah mati.

Tabel 2.1. Pembangkitan Kata Fibonacci

0	1	2	3	4	5	6 ...
b	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a* ...
						...
						b ...
					b	*a* ...
				b	*a*	*a* ...
						...
						b ...
			b	*a*	*a*	*a* …
						b
					b	*a*
		b	*a*	*a*	*a*	*a*
						b
					b	*a*
				b	*a*	*a*
						b

Dari model populasi di atas, barisan fibonacci $\{F_n\}$ bisa diperoleh dengan mendefinisikan

F_n = banyak pasangan kelinci dewasa *a* pada awal bulan ke-*n*.

Dalam hal ini diperoleh barisan fibonacci:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ \ldots, \qquad (2.3a)$$

dst. Penafsiran yang berbeda diperoleh dengan mendefinisikan

f_n = banyak pasangan kelinci (a atau b) pada awal bulan ke-n.

Penafsiran ini memberikan barisan fibonacci dengan nilai awal berbeda:

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3,\ f_4 = 5,\ f_7 = 8,\ f_8 = 13,\ \ldots, \qquad (2.3b)$$

dst. Jelas untuk setiap n = 1, 2, 3, ... berlaku $f_{n-1} = F_n$.

Skema di atas juga menghasilkan bagian awal

$$abaababaabaa \ldots$$

dari kata fibonacci (2.2) yang didefinisikan dengan menggunakan morfisma η di mana kata fibonacci didefinisikan sebagai limit tak hingga dari barisan kata-kata

$$\eta^0(a) = a,\quad \eta^1(a),\quad \eta^2(a),\quad \eta^3(a), \ldots$$

pada alfabet $\{a, b\}$. Sesungguhnya, kolom ke-k dalam skema di atas menyatakan nilai dari $\eta^k(a)$.

Dalam [4], konstruksi kata fibonacci digeneralisasi ke konstruksi kata tribonacci berdasarkan alfabet

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

Dalam konstruksi ini, pertama kali didefinisikan morfisma tribonacci

$$\tau: \Sigma^* \to \Sigma^*$$

yang dibangun oleh aturan pengawanan (aturan produksi) $\tau|_\Sigma: \Sigma \to \Sigma^*$ sebagai berikut

$$\tau|_\Sigma(a) = ab, \qquad \tau|_\Sigma(b) = ac \quad \text{dan} \quad \tau|_\Sigma(c) = a.$$

Dengan cara yang analog dengan penurunan kata fibonacci tak hingga (2.2), kata tribonacci (tak hingga) didefinisikan sebagai

$$\lim_{k\to\infty} \tau^k(a) = abacabaabacababacabaabacabacabaabacababa\ldots \quad (2.4)$$

Pada Lampiran A, diberikan dua kata berhingga sebagai pendekatan terhadap kata (tak hingga) Tribonacci.

Aplikasi kata tribonacci **t** bisa dijumpai pada dinamika (mis. Fogg [6]) dan dalam geometri fractal, misalnya pada konsep fractal Rauzy, yang erat berkaitan dengan topologi dan dinamika (Lihat Siegel et al [20]).

Konsep barisan fibonacci telah diperluas ke konsep barisan k-bonacci yang didefinisikan secara rekursif sebagai barisan $\{A_n\}$ dari bilangan-bilangan bulat tak negatif dengan k nilai-nilai awal, biasanya

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{k-2} = 0, A_{k-1} = 1 \quad (2.5a)$$

dan selanjutnya, untuk setiap $n \geq k$ didefinisikan

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_{n-k}. \quad (2.5b)$$

Dalam tulisan ini, pembahasan dipusatkan pada konsep yang terkait barisan 3-bonacci, yang lebih lazim disebut barisan **tribonacci**.

2.3. Permainan NIM (*NIM Game*)

Di antara permainan kombinatorial, berbagai permainan NIM adalah satu jenis permainan dengan aturan yang sederhana. Menurut situs Sarcone [18], kata NIM berasal dari kata kerja dalam bahasa Jerman "*nimm*" yang artinya "ambil".

Salah satu bentuk permainan NIM menggunakan tiga tumpukan *token*: tumpukan **A**, **B** dan **C**. Setiap pemain secara bergantian berhak mengambil berapa pun *token* dari salah satu tumpukan, asal tidak semuanya (kecuali tinggal 1 token tersisa). Pemain yang yang tak bisa lagi mengambil token dinyatakan kalah.

Jika permainan dimulai dengan tumpukan **A** memuat sebanyak a_0 token, tumpukan **B** memuat sebanyak b_0 token dan tumpukan **C** memuat sebanyak c_0 token, keadaan ini disebut posisi awal yang dilambangkan dengan urutan-3

$$(a_0, b_0, c_0).$$

Contoh 2.1 (Ilustrasi Triple *NIM*):

Sebagai ilustrasi, pada awalnya setiap tumpukan masing-masing terdiri atas $a_0 = 5$, $b_0 = 7$ dan $c_0 = 9$ *token*, yaitu

$$(a_0, b_0, c_0) = (5, 7, 9).$$

Setelah contoh ini, akan dijelaskan mengapa pemain I dipastikan bisa menang jika memilih tumpukan **C** dan mengambil 7 token dari **C**. Dengan demikian posisi permainan selanjutnya (dengan tumpukan **C** tinggal berisi $c_1 = 2$ token) dilambangkan oleh

$$(a_1, b_1, c_1) = (5, 7, 2).$$

Misalnya pada langkah berikutnya, pemain II mengambil 3 token dari **B** sehingga posisi permainan menjadi $(a_2, b_2, c_2) = (5, 4, 2)$.

Dengan alasan yang sama yang akan dijelaskan kemudian, pemain I harus mengambil 1 token dari **C** sehingga posisi menjadi (a_3, b_3, c_3) = (5, 4, 1). Dengan notasi serupa, dimisalkan posisi-posisi berikutnya adalah

$$(a_4, b_4, c_4) = (5, 4, 0),\ (a_5, b_5, c_5) = (4, 4, 0).$$

Sampai di sini, tanpa harus menunggu sampai semua *token* habis (ke status (0, 0, 0)) sudah jelas pemain I akan menang dengan hanya mengikuti atau meniru banyak token yang diambil oleh pemain II (di tumpukan yang berbeda) pada langkah-langkah berikutnya.

Posisi-*P* permainan NIM ini ternyata bisa dirumuskan dengan konsep matematika elementer: menyajikan posisi (a_i, b_i, c_i) ke dalam bentuk matriks biner.

Untuk membahas posisi-*P* dari permainan, ketiga bilangan a_i, b_i, c_i disajikan sebagai bilangan biner α_i, β_i, γ_i, masing-masing bilangan biner ditulis dengan banyak bit yang sama (jika perlu tambahkan bit-0 di depan bilangan yang terlalu kecil agar tercapai jumlah bit yang sama atau jika perlu kurangi banyak bit-0). Selanjutnya dikontruksi matriks biner

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}.$$

Dalam Contoh 2.1, sampai langkah ke-5 permainan dinyatakan oleh ke-enam matriks-matriks biner berikut

$$\mathbf{M}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}(3)= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Strategi pemenangan untuk setiap pemain telah dikenal luas, misalnya dalam tulisan Andy long, yaitu strategi dengan membuat banyak bit-1 setiap kolom menjadi genap. Posisi dengan keadaan semua bit-1 di setiap kolom menjadi genap merupakan salah bentuk umum posisi-*P* dari permainan ini. Setelah lawan memilih langkah balasan, pemain yang sama bisa memaksakan posisi-*P* berikutnya sehingga akhirnya lawan tak bisa memilih token berikutnya, karena sudah habis.

Contoh posisi-*P* dalam permainan ini dinyatakan oleh matriks, disebut matriks-*P*. Misalkan $\alpha_i = \beta_i$ dan $\gamma_i = 0$, yaitu sembarang dua dari tiga tumpukan sama banyak, tumpukan yang lain kosong. Matriks-P di sini adalah salah satu matriks $\mathbf{S}_i$ dengan kolom-kolom memuat sebanyak genap (0, 2, 4, ...) bit-1 dan

Jika salah satu pemain berada pada posisi-*P* maka posisi lawan dikatakan berada dalam posisi-*N*. Dengan notasi untuk matriks posisi-*P* (memiliki kolom dengan jumlah bit-1 genap) pada pengambilan ke-*i* diberi lambang $\mathbf{M}_P(i)$, dan matriks dengan setiap kolom memiliki sebanyak ganjil bit-1 pada pengambilan ke-*i* diberi lambang $\mathbf{M}_N(i)$, maka dengan strategi di atas perubahan matriks permainan selalu berbentuk:

$$\mathbf{M}_N(0), \mathbf{M}_P(1), \mathbf{M}_N(2), ..., \mathbf{M}_P(2t - 1), \mathbf{M}_N(2t) = \text{matriks } \mathbf{0}$$

dan pemain II menang; atau

$$\mathbf{M}_P(0), \mathbf{M}_N(1), \mathbf{M}_P(2), ..., \mathbf{M}_P(2t), \mathbf{M}_N(2t + 1) = \text{matriks } \mathbf{0}$$

dan pemain I menang (Hakekat strategi ini juga berlaku pada permainan NIM Fibonacci, Wythoff dan tribonacci yang akan dibahas berikutnya).

Dengan kata lain, dengan strategi yang diterapkan seperti di atas, matriks-matriks M_P akan dibawa menjadi matriks **0** (sebab banyak bit-1 pada setiap kolom matriks **0** selalu genap!). Ini berarti pemain yang menang sebenarnya sudah bisa ditentukan dari posisi awal. Sebagai contoh, posisi awal $(a_0, b_0, c_0) = (5, 7, 2)$ bisa memastikan (dengan langkah-langkah yang benar) kemenangan pemain II.

Ada beberapa permainan NIM yang sering dibahas (dalam [2] misalnya), tetapi permainan yang paling banyak dikenal luas dalam game kombinatorik adalah permainan *NIM Fibonacci* yang dibahas dalam berbagai jurnal dan buku teks (misalnya oleh Berlekamps [3], Posamentier [16] dan Schumer [19]).

Permainan NIM Fibonacci hanya menggunakan satu tumpukan *token* dan dimainkan oleh dua orang. Dalam permainan ini, dua pemain secara bergantian mengambil *token-token* tersebut dengan aturan sebagai berikut:

1. Pemain tidak boleh mengambil semua token kecuali hanya tersisa satu token.

2. banyaknya *token* yang diambil oleh seorang pemain tidak boleh lebih dari kelipatan dua banyaknya *token* yang diambil oleh pemain sebelumnya.
3. Pemain yang mengambil tumpukan terakhir menang.

Posisi-*P* dari permainan ini bisa ditentukan oleh barisan bilangan fibonacci (2.3*b*)

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3,\ f_4 = 5,\ f_6 = 8,\ ...$$

dan penyajian Zeckendorf ([16] hal. 188) yang menyatakan bahwa setiap bilangan asli $n \in \mathbf{N}$ bisa disajikan secara tunggal sebagai 'kombinasi linear' f_i

$$n = \sum_{i=1}^{k} b_i f_i \qquad (2.6)$$

untuk suatu k dan $b_i \in \{0, 1\}$ sedemikian rupa sehingga barisan $\{b_i\}$ tidak memuat dua bit-1 secara berurutan. Dalam permainan, disepakati menggunakan 'kombinasi linear' di atas mulai dari bilangan fibonacci f_1. Jadi tidak menggunakan f_0 (= f_1) sehingga hanya ada satu penyajian untuk bilangan 1, yaitu $1 = f_1$.

Contoh 2.2:

Misalkan permainan di awali dari tumpukan sebanyak 20 token. Penyajian Zeckendorf dari bilangan 20 adalah

$$20 = 2 + 5 + 13 = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4 + 0 \cdot f_5 + 1 \cdot f_6$$

dan penyajian ini akan dinyatakan sebagai untaian biner, sesuai kolom pertama dan kedua dalam Tabel 2.2 (Lihat [16] hal. 226)

Tabel 2.2. Pedoman Pengambilan Token Di antara 1-20 Token

Jumlah token dalam 1 tumpukan	Penyajian Zeckendorf dari banyak token	Jumlah token yang harus diambil	Sisa token yang tersisa	Penyajian Zeckendorf dari sisa token setelah pengambilan
20	101010	2	18	101000
19	101001	1	18	101000
18	101000	5	13	100000
17	100101	1	16	100100
16	100100	3	13	100000
15	100010	2	13	100000
14	100001	1	13	100000
13	100000	13	0	0
12	10101	1	11	10100
11	10100	3	8	10000
10	10010	2	8	10000
9	10001	1	8	10000
8	10000	8	0	0
7	1010	2	5	1000
6	1001	1	5	1000
5	1000	5	0	0
4	101	1	3	100
3	100	3	0	0
2	10	2	0	0
1	1	1	0	0

101010

(koefisien biner untuk 2^i ditulis dari kanan ke kiri berdasarkan urutan kenaikan pangkat *i*). Dengan banyak bit-1 ganjil, pemain pertama bisa memenangkan permainan ini jika secara konsisten menerapkan aturan: banyaknya token yang diambil adalah suku tak nol terkecil $b_i f_i$ (= f_i) dari penyajian Zeckendorf.

Ini berarti untuk memenangkan permainan, pemain pertama harus menghapus bit-1 pada posisi paling kanan dari penyajian Zeckendorf.

dan pemain kedua tak bisa menghapus bit-1 berikutnya, Hal ini disebabkan penyajian Zeckendorf dari bilangan 20 mengandung sebanyak ganjil bit-1 dan tak ada dua bit-1 yang terletak berurutan.

Secara umum, pemain pertama harus selalu menyisakan bilangan yang penyajian Zeckendorfnya mengandung sebanyak genap bit-1 untuk pemain kedua sehingga pada akhirnya pemain kedua menerima bilangan 0 yang mengandung sebanyak genap (= 0) bit-1.

Keberadaan persyaratan bahwa pemain kedua tak bisa mengambil token lebih dari dua kali lipat token yang diambil pemain pertama, memberikan jaminan bahwa pemain kedua tidak bisa mengambil bit-1 berikutnya. Misalnya posisi awal adalah token sebanyak

$$18 = 13 + 5 + 2 = f_6 + f_4 + f_2 \equiv 101010$$

sehingga sesuai Tabel 2.2, pemain pertama harus mengambil 2 token. Dengan demikian banyak token yang tersisa adalah $16 \equiv 101000$. Pemain kedua tak bisa menghapus bit-1 yang paling kanan dari 101000 sebab menghapus bit-1 ini sama saja dengan mengambil sampai 5 token padahal jumlah maksimal token yang boleh diambil adalah 4.

Fibonacci NIM bisa dimainkan sebagai pemain I secara online di situs yang dikelola Andy Long [13]. Karena bilangan awal bisa dipilih oleh pengakses situs, setiap pemain (pemain I) yang bermain NIM Fibonacci dalam situs tersebut seharusnya bisa menang. Jika pemain I salah pilih bilangan awal atau salah langkah, pemain II (software permainan ini) dipastikan menang.

Pada situs yang dikelola Sarcone [18], tersedia permainan NIM secara online berupa pengambilan batang-batang korek api dari 4 tempat. Di awal permainan, masing-masing tempat terdiri atas 1, 3, 5, dan 7 batang korek api. Dengan simbol yang digunakan di sini, posisi awal permainan telah ditentukan, yaitu (1, 3, 5, 7).

2.4. Permainan *Wythoff*

Permainan Wythoff hanya menggunakan dua tumpukan *token*. Tetapi selain bisa mengambil *token* dari salah satu tumpukan saja, setiap pemain juga bisa mengambil *token* dari kedua tumpukan, asalkan banyak token yang diambil dari masing-masing tumpukan adalah sama, pemain tidak boleh mengambil semua token kecuali hanya satu token yang tersisa. Berikut ilustrasi permainan ini, dengan menggunakan notasi yang serupa dengan notasi permainan NIM tiga tumpukan.

$$(a_0, b_0) = (9, 17), (a_1, b_1) = (9, 15), (a_2, b_2) = (5, 11), (a_3, b_3) = (5, 3),$$

$$(a_4, b_4) = (4, 2), (a_5, b_5) = (1, 2), (a_6, b_6) = (1, 1), (a_7, b_7) = (0, 0)$$

dan pemain I menang.

Secara umum, posisi-*P* dari pemain adalah semua pasangan berbentuk

$$(\lfloor n\rho \rfloor, \lfloor n\rho^2 \rfloor).$$

(atau $(\lfloor n\rho \rfloor, \lfloor n(1 + \rho) \rfloor)$), untuk setiap $n \geq 1$, di mana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan fungsi *floor* atau fungsi pembulatan ke bawah bilangan x, sedangkan

$$\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} . \qquad (2.7)$$

disebut rasio mulia (*golden rasio*).

Beberapa barisan pasangan (x_n, y_n) disajikan melalui Tabel 2.3. Barisan ini berkaitan erat dengan berbagai barisan lain, khususnya dengan barisan fibonacci (Dunlap, [5]). Sesungguhnya, barisan $(x_n\}$ disebut *spektrum* dari rasio mulia ρ.

Tabel 2.3. Posisi-*P* (x_n, y_n) Permainan Wythoff

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	…
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	…

Pasangan posisi-*P* dalam Tabel 2.3 sebenarnya adalah dua pasang bilangan bulat yang menunjukkan posisi kemunculan ke-*n* dari huruf *a* dan *b* di dalam kata Fibonacci (2.2). Misalnya karena kemunculan ke-4 dari *a* dan *b* dalam kata fibonacci adalah pada posisi ke-6 dan ke-10, maka pasangan (6, 10) adalah sebuah posisi-*P*.

Perluasan dari permainan Wythoff dengan dua tumpukan tetapi dengan aturan yang lebih umum dan dengan membebaskan banyaknya tumpukan $n \geq 3$, masing-masing dibahas oleh Fraenkel di dalam [9] dan [11].

2.5. Permainan Tribonacci

Permainan yang dibahas di sini disebut permainan tribonacci karena keterkaitannya dengan barisan tribonacci $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$. Barisan ini didefinisikan dengan nilai awal

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2, \quad T_2 = 4 \tag{2.8a}$$

dan untuk setiap indeks $k > 2$ didefinisikan

$$T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}. \tag{2.8b}$$

Beberapa unsur awal dari barisan tribonacci adalah

$T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_3 = 7$, $T_4 = 13$, $T_5 = 24$, $T_6 = 44$, $T_7 = 81$, ..., dst.

Nilai awal dari tribonacci ini berbeda dengan nilai awal $A_0 = A_1 = 0$ dan $A_1 = 1$ dari tribonacci baku yang diperoleh dari ekspresi (2.5*a*). Nilai awal ini menghasilkan barisan tribonacci $A_2 = 1$, $A_3 = 2$, $A_4 = 3$, dan seterusnya.

Permainan tribonacci menggunakan alat berupa tiga tumpukan **A**, **B** dan **C** yang memuat beberapa token. Jika pada suatu saat setiap tumpukan **A**, **B** dan **C** masing-masing terdiri atas sebanyak *a*, *b* dan *c* token-token, maka posisi permainan pada saat tersebut dinyatakan oleh urutan-3 (a, b, c).

Permainan tribonacci dimainkan oleh dua orang pemain dan setiap pemain mengambil satu atau lebih token dari satu, dua atau tiga tumpukan tersebut secara bergantian, sesuai dengan aturan berikut.

1. Posisi awal permainan: $(a,b,c) \in \mathbf{N}^3$ dengan $0 \leq a \leq b \leq c$, dan $c \neq 0$.
2. Setiap pemain secara bergantian bebas mengambil berapa pun *token* dari salah satu atau paling banyak dua tumpukan. Artinya jika tinggal satu tumpukan yang tidak kosong, pemain bisa mengambil semua token di dalam tumpukan ini untuk memastikan menang.
3. Untuk pengambilan token dari tiga tumpukan sekaligus pada saat posisi (a,b,c), ada 2 cara yang bisa dipilih:

   a. setiap pemain dapat mengambil sebanyak (bilangan-bilangan positif) sebanyak α, β, γ token dengan $0 < \alpha \leq a$, $0 < \beta \leq b$, $0 < \gamma \leq c$, dari masing-masing tumpukan **A**, **B**, **C** asalkan memenuhi syarat:

   $$2 \cdot \text{maks}\{\alpha, \beta, \gamma\} \leq \alpha + \beta + \gamma.$$

   b. setiap pemain dapat mengambil token dari dua tumpukan yang berbeda masing-masing sebanyak α token dan mengambil sebanyak β token dari tumpukan yang lain asalkan memenuhi:

   i. $\beta > 2\alpha > 0$, dan

ii. Jika *a'* (ganti: *b', c'*) adalah banyak token yang tersisa setelah diambil dari tumpukan **A** (ganti: tumpukan **B**, **C**), maka tidak boleh terjadi $a' < c' < b'$.

4. Pemain yang mengambil token terakhir menang.