

**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SEIR
DENGAN WAKTU TUNDA**

*STABILITY ANALYSIS OF SEIR EPIDEMIC MODEL
WITH TIME DELAY*

WAHYUDI RUSDI



**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2013**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SEIR
DENGAN WAKTU TUNDA**

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Matematika Terapan

Disusun dan diajukan oleh

WAHYUDI RUSDI

Kepada

PROGRAM PASCASARJANA

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

TESIS**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SEIR
DENGAN WAKTU TUNDA**

Disusun dan diajukan oleh

WAHYUDI RUSDI

Nomor Pokok P3500211004

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis
pada tanggal 28 Mei 2013
dan dinyatakan telah memenuhi syarat



Menyetujui
Komisi Penasehat

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Ketua

Dr. Jeffry Kusuma

Anggota

Ketua Program Studi
Matematika Terapan,Direktur Program Pascasarjana
Universitas Hasanuddin,

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Prof. Dr. Ir. Mursalim, M.Sc

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Wahyudi Rusdi

Nomor Mahasiswa : P3500211004

Program Studi : Matematika Terapan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, Mei 2013

Yang menyatakan

Wahyudi Rusdi

PRAKATA

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karuniaNya yang tiada henti sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

Banyak kendala yang dihadapi penulis dalam menyelesaikan tesis ini, yang disebabkan oleh keterbatasan pengetahuan yang penulis miliki. Namun berkat dorongan, bantuan, dukungan, dan motivasi dari berbagai pihak sehingga tesis ini dapat penulis selesaikan dengan baik.

Melalui kesempatan ini penulis ingin mengucapkan penghargaan setinggi-tingginya dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada

1. Bapak Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku Penasehat Utama dan Bapak Dr. Jeffry Kusuma selaku Penasehat Anggota yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan mengarahkan penulis selama penyusunan tesis ini.
2. Segenap Dosen pengasuh mata kuliah yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengenyam pendidikan di Program Magister Matematika Terapan FMIPA Universitas Hasanuddin.
3. Kedua orang tua tercinta, Rusdi dan Rosniwati yang dengan penuh kasih sayang telah banyak memberikan dorongan semangat dan motivasi kepada penulis selama mengikuti kuliah.

4. Teman-teman mahasiswa Pasca sarjana Matematika Terapan FMIPA Unhas, terkhusus angkatan 2011 yang telah bersama penulis selama kurang lebih dua tahun dalam melalui seluruh kegiatan perkuliahan, dan telah banyak memberikan bantuan dan kerja samanya kepada penulis.
5. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu atas semua bantuan yang telah diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa tesis ini tidaklah sempurna dan tentunya tidak luput dari berbagai kesalahan. Oleh karena itu penulis senantiasa mengharapkan kritik dan saran demi kesempurnaan tesis ini.

Akhirnya, semoga tesis ini bisa memberikan manfaat kepada semua pihak terutama dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan khususnya matematika terapan.

Makassar, Mei 2013

Wahyudi Rusdi

ABSTRAK

WAHYUDI RUSDI. *Analisis Kestabilan Model Epidemik SEIR dengan Waktu Tunda* (dibimbing oleh **Syamsuddin Toaha** dan **Jeffry Kusuma**).

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada interaksi antara individu rentan dan terinfeksi melalui vektor terhadap penyebaran infeksi penyakit.

Penelitian ini merupakan kajian pustaka yang dilakukan di jurusan Matematika Universitas Hasanuddin, Makassar.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada model epidemik SEIR diperoleh dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik. Analisis kestabilan dari titik keseimbangan untuk $\tau = 0$ dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz pada nilai eigen dari sistem yang telah dilinearkan sedangkan untuk $\tau > 0$ dilakukan dengan memeriksa kewujudan nilai eigen dengan bagian real bernilai nol dari persamaan karakteristiknya. Bilangan reproduksi dasar, R_0 , menentukan kestabilan dari tiap titik keseimbangan. Sementara waktu tunda tidak mempengaruhi jenis kestabilan titik keseimbangan, dan hanya berpengaruh pada konvergensi dari kestabilan titik keseimbangan.

ABSTRACT

WAHYUDI RUSDI. *Stability Analysis of SEIR Epidemic Model with Time Delay* (supervised by **Syamsuddin Toaha** and **Jeffry Kusuma**).

This research aimed to fine out the time delay impact on the interaction between susceptible and infected individuals through a vector on the spread of infectious diseases.

The research was a library study carried out in the Department of Mathematics Hasanuddin University, Makassar.

The research result indicates that the SEIR epidemic is obtained two equilibrium points i.e the disease-free equilibrium and endemic equilibrium. The stability analysis of the equilibrium point for $\tau = 0$ is conducted by using Routh-Hurwitz criterion on the eigenvalues of the system which has been linearized, whereas $\tau > 0$ is done by examining the form of eigenvalues with zero real part of the characteristic equation. The basic reproduction numbers, R_0 , determines the stability of every equilibrium point. While the time delay does not influence the stability type of the equilibrium points, and it only has the impact on the convergence of the equilibrium points stability.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN	iv
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
DAFTAR ARTI LAMBANG	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penelitian	4
D. Kegunaan Penelitian	4
BAB II MODEL EPIDEMIK SIR	5
A. Pendahuluan	5

B. Keadaan Keseimbangan	8
C. Analisis Kestabilan	9
1. Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit	10
2. Analisis kestabilan titik keseimbangan endemik	11
D. Proses Non Dimensional Model SIR	13
E. Simulasi Numerik	15
BAB III MODEL EPIDEMIK SEIR	22
A. Pendahuluan	22
B. Keadaan Keseimbangan	25
C. Analisis Kestabilan	27
1. Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit	28
2. Analisis kestabilan titik keseimbangan endemik	29
D. Proses Non Dimensional Model SEIR	32
E. Simulasi Numerik	34
BAB IV MODEL EPIDEMIK SEIR DENGAN WAKTU TUNDA	42
A. Pendahuluan	42
B. Analisis Kestabilan	43
1. Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit	49
2. Analisis kestabilan titik keseimbangan endemik	52
C. Simulasi Numerik	55

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	63
A. Kesimpulan	63
B. Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67

DAFTAR TABEL

Nomor	Halaman
1. Nilai Parameter dan konstanta model (2.2)	8
2. Nilai parameter σ dan ξ model (3.2)	25

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Halaman
1. Diagram kompartemen model SIR	7
2. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	16
3. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	16
4. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	17
5. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	18
6. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	18
7. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	19
8. Populasi individu rentan pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	20
9. Populasi individu terinfeksi pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	20
10. Populasi individu sembuh pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	21
11. Diagram kompartemen model SEIR	24
12. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	35
13. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	35
14. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	36
15. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$)	36
16. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	37

17. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	38
18. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	38
19. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,1$)	39
20. Populasi individu rentan pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	40
21. Populasi individu laten pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	40
22. Populasi individu terinfeksi pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	41
23. Populasi individu sembuh pada Model SEIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$	41
24. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	57
25. Populasi individu laten terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	57
26. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	58
27. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	58
28. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10$)	60

- | | |
|---|----|
| 29. Populasi individu laten terhadap waktu | 60 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |
| 30. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu | 61 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |
| 31. Populasi individu sembuh terhadap waktu | 61 |
| $(\beta = 0,1, \tau = 0, \tau = 5, \tau = 10)$ | |

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Halaman
1. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 2, 3, dan 4	67
2. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 5, 6, dan 7	68
3. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 8, 9, dan 10	69
4. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 11, 12, 13, dan 14	70
5. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 15, 16, 17, dan 18	71
6. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 19, 20, 21, dan 22	72
7. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 23, 24, 25, dan 26	73
8. Sintaks Program Matlab untuk Gambar 27, 28, 29, dan 30	74

DAFTAR ARTI LAMBANG

Lambang	Arti dan Keterangan
S	Variabel yang menyatakan jumlah individu rentan
E	Variabel yang menyatakan jumlah individu laten
I	Variabel yang menyatakan jumlah individu terinfeksi
R	Variabel yang menyatakan jumlah individu sembuh
\dot{S}	Laju perubahan jumlah individu rentan terhadap waktu t
\dot{E}	Laju perubahan jumlah individu laten terhadap waktu t
\dot{I}	Laju perubahan jumlah individu terinfeksi terhadap waktu t
\dot{R}	Laju perubahan jumlah individu sembuh terhadap waktu t
λ	Konstanta rekrutmen (laju kelahiran dan migrasi)
μ	Laju kematian alami
β	Laju kontak/transmisi penularan penyakit
σ	Laju perpindahan individu dari kompartemen E ke I
ξ	Laju kematian akibat penyakit pada kompartemen E
η	Laju kematian akibat penyakit pada kompartemen I
γ	Laju kesembuhan dari penyakit
R_0	Bilangan reproduksi dasar
τ	Waktu Tunda

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Model matematika telah banyak digunakan dalam mempelajari berbagai fenomena yang ada di dunia ini. Salah satu penerapannya dapat dijumpai pada bidang kesehatan yaitu pada pemodelan penyakit. Sekarang ini berbagai macam penyakit baik menular maupun tidak menular telah ditemukan dan memberikan masalah dalam tindak lanjut penanganannya. Peran model matematika bukan dalam kapasitas untuk menyembuhkan penyakit tersebut namun model matematika dapat memberikan informasi penting dalam prediksi dan pengendalian penyakit di masa yang akan datang (Bakare, 2012).

Epidemik merupakan suatu keadaan dimana berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan kejadian yang normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *Endemik*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas (global) maka disebut *Pandemik*. Model epidemik adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, khususnya

menyangkut terjadi atau tidaknya keadaan epidemik serta pengaruh yang ditimbulkan. Model epidemik SIR yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 merupakan langkah awal dalam perkembangan model matematika modern yang berkaitan dengan masalah epidemik. Model ini terdiri atas tiga kompartemen (kelas) yaitu S (*susceptible*) menyatakan banyaknya individu yang rentan penyakit, I (*infected*) menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit dan R (*recovered*) menyatakan banyaknya individu yang sembuh dari penyakit. Pada perkembangannya model ini terus dimodifikasi dengan asumsi yang berbeda-beda agar dapat menjelaskan berbagai fenomena penyakit yang makin kompleks (Hethcote, 2000) dan (Singh dan Aqeel, 2011).

Berbagai macam penyakit seperti campak (*Measles*), *tubercoluses*, *malaria* dan *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) mempunyai periode laten. Li dan Muldowney (1994) mengkonstruksi model epidemik SEIR yang terdiri atas empat kompartemen dengan mempertimbangkan periode laten dari infeksi penyakit. Model ini memodifikasi model SIR dengan menambahkan kompartemen E (*Exposed*) yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi namun belum sakit (laten). Selanjutnya Li *et al.* (1999) mengasumsikan bahwa besarnya laju rekrutmen dan kematian alami tidak sama. Pada perkembangan berikutnya Li dan Jin (2004) menambahkan asumsi pada kompartemen E dan I, bahwa kematian individu selain karena sebab alami juga dapat disebabkan oleh infeksi penyakit (fatal).

Untuk membangun model yang lebih realistis yaitu dengan mempertimbangkan waktu tunda (*delays*) pada interaksi yang terjadi antara individu rentan dan terinfeksi, Di Liddo (1985) mengembangkan model delay yang melibatkan vektor sebagai perantara penyebaran infeksi penyakit, sehingga individu rentan dapat terinfeksi oleh individu terinfeksi setelah melalui vektor. Selanjutnya Yan dan Liu (2005) mengembangkan model delay dengan meninjau penyebaran infeksi penyakit yang disebabkan adanya interaksi yang terjadi antara individu rentan dan terinfeksi pada kompartemen E (*Exposed*) dan I (*Infected*).

B. Rumusan Masalah

Model yang akan dikaji berdasarkan model SIR yang telah dimodifikasi dengan tambahan asumsi yang diberikan oleh Li dan Muldowney (1994), Li *et al.* (1999), Li dan Jin (2004) yang selanjutnya menjadi model SEIR dengan empat kompartemen yaitu populasi individu yang rentan (*Susceptible*), laten (*Exposed*), terinfeksi (*Infected*), dan sembuh (*Recovered*). Kemudian dengan asumsi yang diberikan oleh Di Liddo (1985) bahwa penyebaran infeksi penyakit juga dipengaruhi oleh lama vektor menginfeksi individu rentan setelah sebelumnya mendapatkan infeksi dari individu terinfeksi.

Dari model tersebut, selanjutnya dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, yaitu

1. Bagaimana mengkonstruksi model epidemik SEIR dengan waktu tunda.
2. Bagaimana menganalisis kestabilan dari titik keseimbangan dan waktu tunda dari model epidemik SEIR.

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada interaksi individu rentan dan terinfeksi terhadap penyebaran infeksi penyakit.

D. Kegunaan Penelitian

Penelitian ini diharapkan bisa memberikan pemahaman tentang model matematika dalam bidang biologi atau kedokteran dalam prediksi dan penanganan penyebaran infeksi pada berbagai penyakit menular.

BAB II

MODEL EPIDEMIK SIR

A. Pendahuluan

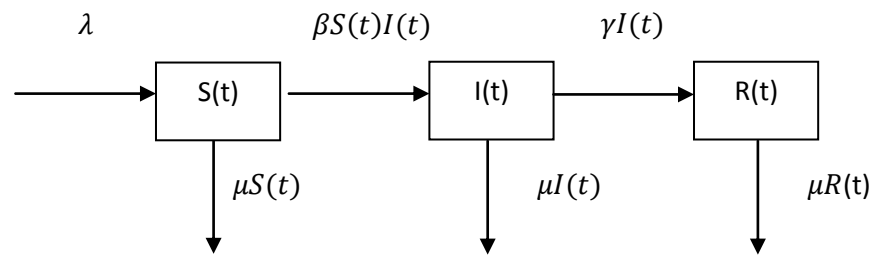
Model dasar yang digunakan untuk mendeskripsikan penyebaran penyakit adalah model epidemik SIR. Model SIR ini dikemukakan oleh Kermack & McKendrick pada tahun 1927 sebagai model dasar dari pemodelan epidemiologi modern. Model ini memiliki tiga kompartemen yang menjelaskan proses penyebaran penyakit pada suatu populasi. Kompartemen tersebut adalah : S (*Susceptible*) yaitu kelompok individu yang sehat dan rentan terinfeksi penyakit, I (*Infected*) yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan R (*Recovered*) yaitu kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam mengkonstruksi model SIR ialah sebagai berikut :

1. Populasi tidak konstan.
2. Penyakit fatal, artinya bila individu terinfeksi penyakit dapat menyebabkan kematian pada individu tersebut.
3. Individu yang lahir dan melakukan migrasi pada populasi tersebut dikategorikan sebagai individu yang rentan penyakit S (*Susceptible*)

4. Individu yang telah sembuh R (*Recovered*) memiliki kekebalan terhadap penyakit sehingga tidak dapat lagi dikategorikan rentan S (*Susceptible*).
5. Laju kelahiran tidak sama dengan laju kematian alami.

Menurut Hethcote (2000), $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang rentan pada waktu t , $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang terinfeksi pada waktu t dan $R(t)$ menyatakan jumlah individu yang sembuh pada waktu t . Selanjutnya, λ adalah konstanta rekrutmen dan μ adalah laju kematian alami dari populasi, β adalah laju infeksi atau laju transmisi penularan penyakit ketika terjadi kontak antara individu rentan dan terinfeksi dan γ adalah laju kesembuhan individu yang terinfeksi dan diasumsikan memiliki kekebalan terhadap penyakit. Jumlah individu pada kompartemen S menurun oleh penyebaran penyakit $\beta S(t)I(t)$ dan kematian alami, $\mu S(t)$, lalu meningkat akibat adanya rekrutmen, λ . Jumlah individu pada kompartemen I menurun karena adanya kematian alami, $\mu I(t)$, dan individu yang sembuh, $\gamma I(t)$, lalu meningkat akibat penularan penyakit, $\beta S(t)I(t)$. Jumlah individu pada kompartemen R menurun akibat kematian alami, $\mu R(t)$, dan meningkat karena individu telah sembuh, $\gamma I(t)$. Asumsi-asumsi tersebut dapat digambarkan ke dalam bentuk kompartemen-kompartemen pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram kompartemen model SIR

Dari Gambar 1 tersebut dapat disusun model matematika yang dituliskan sebagai berikut :

$$\dot{S} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad (2.1a)$$

$$\dot{I} = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \quad (2.1b)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (2.1c)$$

Dimana \dot{S} , \dot{I} , dan \dot{R} secara berturut-turut menyatakan laju perubahan jumlah individu rentan, terinfeksi dan sembuh per waktu. Singh dan Aqeel (2011) menambahkan asumsi bahwa penyebab kematian pada individu terinfeksi tidak hanya oleh faktor alami namun juga disebabkan oleh faktor penyakit, η , yang diderita (fatal). Sehingga model (2.1) dimodifikasi menjadi :

$$\dot{S} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad (2.2a)$$

$$\dot{I} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \eta)I(t) \quad (2.2b)$$

$$\dot{R} = \gamma I(t) - \mu R(t). \quad (2.2c)$$

Tabel 1. Nilai Parameter dan konstanta model (2.2)

	Paramater dan Konstanta	Nilai
λ	Konstanta rekrutmen (laju kelahiran dan migrasi)	10(populasi.hari ⁻¹)
μ	Laju kematian Alami	0,2 (hari ⁻¹)
β	Laju kontak/transmisi penularan penyakit	0,001(populasi ⁻¹ .hari ⁻¹) 0,1 (populasi ⁻¹ .hari ⁻¹)
γ	Laju kesembuhan dari penyakit	0,4 (hari ⁻¹)
η	Laju kematian akibat infeksi penyakit	0,2 (hari ⁻¹)

Sumber : Lenhart dan Workman (2007), Zhou dan Chui (2011)

B. Keadaan Keseimbangan

Pada keadaan seimbang, model yang dinyatakan oleh sistem persamaan (2.2) memenuhi sistem persamaan

$$\lambda - \mu S - \beta SI = 0 \quad (2.3a)$$

$$\beta SI - (\gamma + \mu + \eta)I = 0 \quad (2.3b)$$

$$\gamma I - \mu R = 0 \quad (2.3c)$$

Pada keadaan tidak ada infeksi maka $I = 0$. Substitusi $I_0 = 0$ pada persamaan (2.3a) dan (2.3c) menghasilkan $S_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ dan $R_0 = 0$. Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit,

$$Q_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

Kemudian saat terjadi infeksi penyakit $I \neq 0$. Persamaan (2.3a) dan (2.3b) dapat dinyatakan sebagai,

$$I = \frac{\lambda - \mu S}{\beta S} \quad (2.4)$$

dan

$$S = \frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}. \quad (2.5)$$

Substitusi nilai (2.5) ke (2.4) menghasilkan

$$I_1 = \frac{\lambda}{(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\mu}{\beta},$$

selanjutnya, substitusi nilai I_1 ke (2.3c) menghasilkan

$$R_1 = \frac{\gamma \lambda}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\gamma}{\beta}.$$

Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan endemik,

$$Q_1 = \left(\frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}, \frac{\lambda}{(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\gamma \lambda}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} - \frac{\gamma}{\beta} \right).$$

C. Analisis Kestabilan

Analisis Kestabilan titik keseimbangan dilakukan dengan terlebih dahulu melinearisasi model (2.2) di sekitar titik keseimbangan

$Q^* = (s^*, i^*, r^*)$ dan mengabaikan suku-suku nonlinearnya. Misalkan

$$S(t) = s^* + s(t), \quad E(t) = e^* + e(t), \quad I(t) = i^* + i(t), \text{ dan } R(t) = r^* + r(t).$$

Substitusi pada (2.2), maka diperoleh sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \lambda - \beta(s^* + s(t))(i^* + i(t)) - \mu(s^* + s(t)) \\ &= \lambda - \beta s^* i^* - \beta s^* i(t) - \beta s(t) i^* - \beta s(t) i(t) - \mu s^* - \mu s(t) \\ &= -\beta s^* i(t) - \beta s(t) i^* - \mu s(t) \\ &= -s(t)(\mu + \beta i^*) - \beta s^* i(t) \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned}
\dot{i} &= \beta(s^* + s(t))(i^* + i(t)) - (\sigma + \mu + \xi)(i^* + i(t)) \\
&= \beta s^* i^* + \beta s^* i(t) + \beta s(t) i^* + \beta s(t) i(t) - (\sigma + \mu + \xi) i^* - (\sigma + \mu + \xi) i(t) \\
&= \beta s^* i(t) + \beta s(t) i^* - (\sigma + \mu + \xi) i(t) \tag{2.6b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \gamma(i^* + i(t)) - \mu(r^* + r(t)) \\
&= \gamma i^* + \gamma i(t) - \mu r^* - \mu r(t) \\
&= \gamma i(t) - \mu r(t). \tag{2.6c}
\end{aligned}$$

Dalam notasi matriks, sistem persamaan (2.6) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{i} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \\ r(t) \end{pmatrix},$$

dimana

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - \beta i^* & -\beta s^* & 0 \\ \beta i^* & \beta s^* - (\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari sistem persamaan (2.6) ditentukan oleh persamaan karakteristik $\det(\rho I - A) = 0$.

1. Analisis kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit

Pada titik keseimbangan bebas penyakit $Q_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0\right)$. Persamaan

karakteristik pada titik keseimbangan ini adalah

$$\begin{vmatrix} \rho + \mu & \frac{\beta \lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \rho - \left(\frac{\lambda \beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta)\right) & 0 \\ 0 & -\gamma & \rho + \mu \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$(\rho + \mu)(\rho + \mu) \left(\rho - \left(\frac{\lambda\beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) = 0. \quad (2.7)$$

Dua faktor pertama dari ruas kiri persamaan (2.7) memberikan nilai eigen $\rho_{1,2} = -\mu < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\rho - \left(\frac{\lambda\beta}{\mu} - (\gamma + \mu + \eta) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) memberikan nilai eigen negatif bila

$$\frac{\lambda\beta}{\mu} < (\gamma + \mu + \eta) \text{ atau } \frac{\lambda\beta}{\mu(\gamma + \mu + \eta)} < 1.$$

Konstanta $R_0 = \frac{\lambda\beta}{\mu(\gamma + \mu + \eta)}$ dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) dari model (2.2). Menurut Driessche dan Watmough (2002) *basic reproduction number*, R_0 menyatakan banyaknya rata-rata individu baru yang terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Pada kondisi ini $R_0 < 1$ menyebabkan titik keseimbangan bebas penyakit Q_0 akan stabil asimptotik.

2. Analisis kestabilan titik keseimbangan endemik

Perhatikan bahwa titik keseimbangan endemik Q_1 dapat dinyatakan dalam R_0 , yaitu

$$Q_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta} (R_0 - 1) \right).$$

Karena pada titik keseimbangan endemik berlaku $R_0 > 1$ maka semua komponen pada titik ini bernilai positif. Persamaan karakteristik untuk titik keseimbangan ini diberikan oleh persamaan

$$\begin{vmatrix} \rho + \mu + \mu(R_0 - 1) & \frac{\beta\lambda}{\mu R_0} & 0 \\ -\mu(R_0 - 1) & \rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta)\right) & 0 \\ 0 & -\gamma & \rho + \mu \end{vmatrix} = 0,$$

atau

$$\begin{aligned} & (\rho + \mu + \mu(R_0 - 1)) \left(\rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) (\rho + \mu) + \\ & (\rho + \mu) (\mu(R_0 - 1)) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) = 0, \\ & (\rho + \mu) \left((\rho + \mu + \mu(R_0 - 1)) \left(\rho - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) \right) + \right. \\ & \left. (\mu(R_0 - 1)) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Faktor pertama dari ruas kiri persamaan (2.9) memberikan nilai eigen $\rho_1 = -\mu < 0$ dan nilai eigen yang lain diperoleh dari persamaan

$$\rho^2 + a_1\rho + a_0, \quad (2.10)$$

dimana

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) + \mu(R_0 - 1) \text{ dan} \\ a_0 &= \mu(R_0 - 1) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) - \mu R_0 \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right). \end{aligned}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, bagian real dari semua nilai eigen persamaan (2.10) bernilai negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$.

Karena $R_0 > 1$ maka

$$a_1 = \mu - \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right) + \mu(R_0 - 1)$$

$$= \mu + (\gamma + \mu + \eta) + \mu(R_0 - 1) - \frac{\beta\lambda}{\mu R_0}$$

$$= \mu + \mu(R_0 - 1) > 0,$$

$$a_0 = \mu(R_0 - 1) \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} \right) - \mu R_0 \left(\frac{\beta\lambda}{\mu R_0} - (\gamma + \mu + \eta) \right)$$

$$= \mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu + \eta) - \mu R_0((\gamma + \mu + \eta) - (\gamma + \mu + \eta))$$

$$= \mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu + \eta) > 0.$$

Jadi titik keseimbangan Endemik Q_1 stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.

D. Proses Non-Dimensional dari Model SIR

Model SIR yang telah dikonstruksi sebelumnya masih tergantung pada satuan, sehingga belum bisa diterapkan pada berbagai kasus, agar model SIR tersebut dapat diterapkan pada berbagai satuan, maka sistem persamaan (2.2) yang berbentuk persamaan dimensional akan diubah dalam bentuk persamaan non-dimensional. Berikut variabel non-dimensional yang akan disubstitusikan pada sistem persamaan (2.2)

$$S = NS^*, I = NI^*, R = NR^* \text{ dan } t = Tt^*$$

$$\text{dimana } N = S + I + R$$

Dengan demikian diperoleh model SIR berbentuk sistem persamaan non-dimensional sebagai berikut :

$$\frac{N}{T} \frac{dS^*}{dt^*} = \lambda - \mu N S^* - \beta N^2 S^* I^* \quad (2.11a)$$

$$\frac{N}{T} \frac{dI^*}{dt^*} = \beta N^2 S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta) N I^* \quad (2.11b)$$

$$\frac{N}{T} \frac{dR^*}{dt^*} = \gamma N I^* - \mu N R^* \quad (2.11c)$$

Tiap ruas sistem (2.11) dikalikan dengan $\frac{T}{N}$ sehingga diperoleh

$$\frac{dS^*}{dt^*} = \frac{\lambda T}{N} - \mu T S^* - \beta T N S^* I^* \quad (2.12a)$$

$$\frac{dI^*}{dt^*} = \beta T N S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta) T I^* \quad (2.12b)$$

$$\frac{dR^*}{dt^*} = \gamma T I^* - \mu T R^* \quad (2.12c)$$

Jika $\frac{\lambda T}{N} = \lambda^*$, $\mu T = \mu^*$, $\beta T N = \beta^*$, $(\mu + \gamma + \eta) T = (\mu + \gamma + \eta)^*$, dan $\gamma T = \gamma^*$

maka sistem (2.12) menjadi

$$\frac{dS^*}{dt^*} = \lambda^* - \mu^* S^* - \beta^* S^* I^* \quad (2.13a)$$

$$\frac{dI^*}{dt^*} = \beta^* S^* I^* - (\mu + \gamma + \eta)^* I^* \quad (2.13b)$$

$$\frac{dR^*}{dt^*} = \gamma^* I^* - \mu^* R^* \quad (2.13c)$$

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk model SIR non-dimensional dengan menggunakan $t^* = \frac{t}{7}$ dimana t^* merupakan variabel tak berdimensi yang menyatakan perubahan satuan waktu dari hari menjadi minggu.

E. Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Matlab dan Maple dengan nilai-nilai parameter yang diberikan pada tabel 1. Nilai dari β dipilih sebesar 0,001 (Lenhart dan Workman, 2007) dan 0,1 (Zhou dan Chui, 2011) . Untuk melihat pengaruh kedua nilai β tersebut, model (2.2) disimulasikan dengan menggunakan syarat awal

$$S(0) = \frac{\lambda}{\mu}, I(0) = 1, R(0) = 0.$$

Hasil simulasi yang menunjukkan populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh terhadap waktu ditunjukkan oleh gambar 2,3, dan 4 untuk $\beta = 0,001$. Untuk nilai β ini diperoleh $R_0 = 0,0625 < 1$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.7) adalah

$$\rho_1 = \rho_2 = -0,2 \text{ dan } \rho_3 = -0,75.$$

Dengan demikian titik keseimbangan bebas penyakit,

$$Q_0 = (50,0,0)$$

stabil asimptotik.

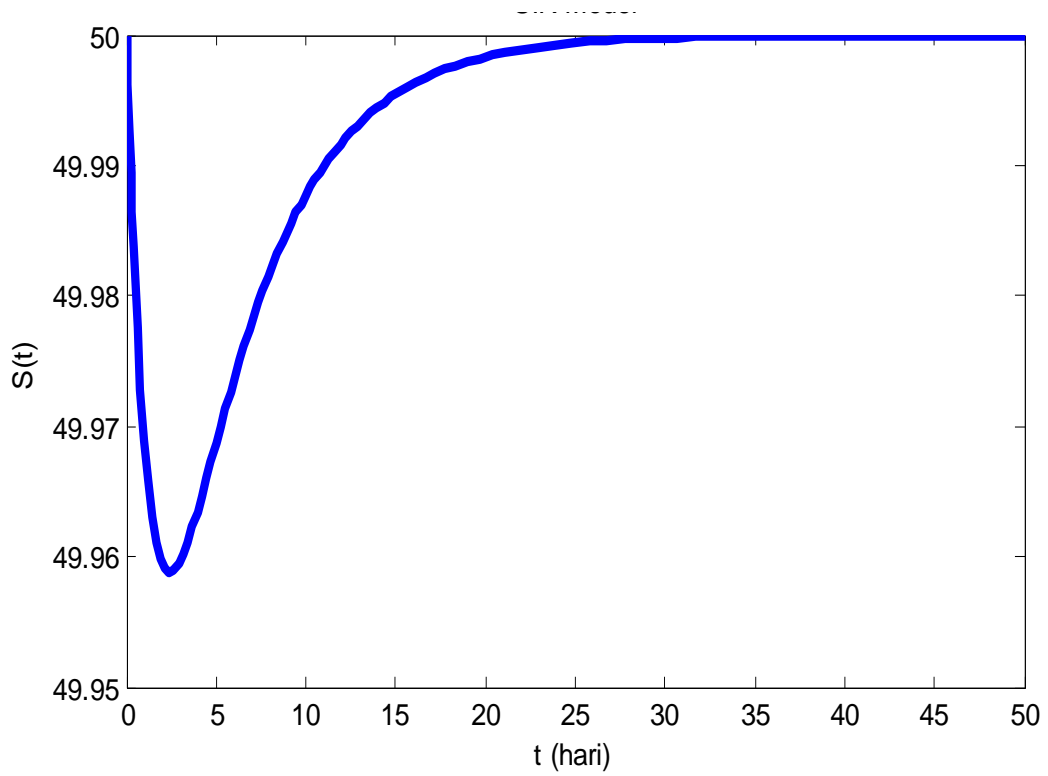
Sedangkan untuk $\beta = 0,1$, diperoleh nilai $R_0 = 6,25 > 1$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan (2.9) adalah

$$\rho_1 = -0,2, \rho_2 = -0,625 + 0,67 I, \text{ dan } \rho_3 = -0,625 - 0,67 I.$$

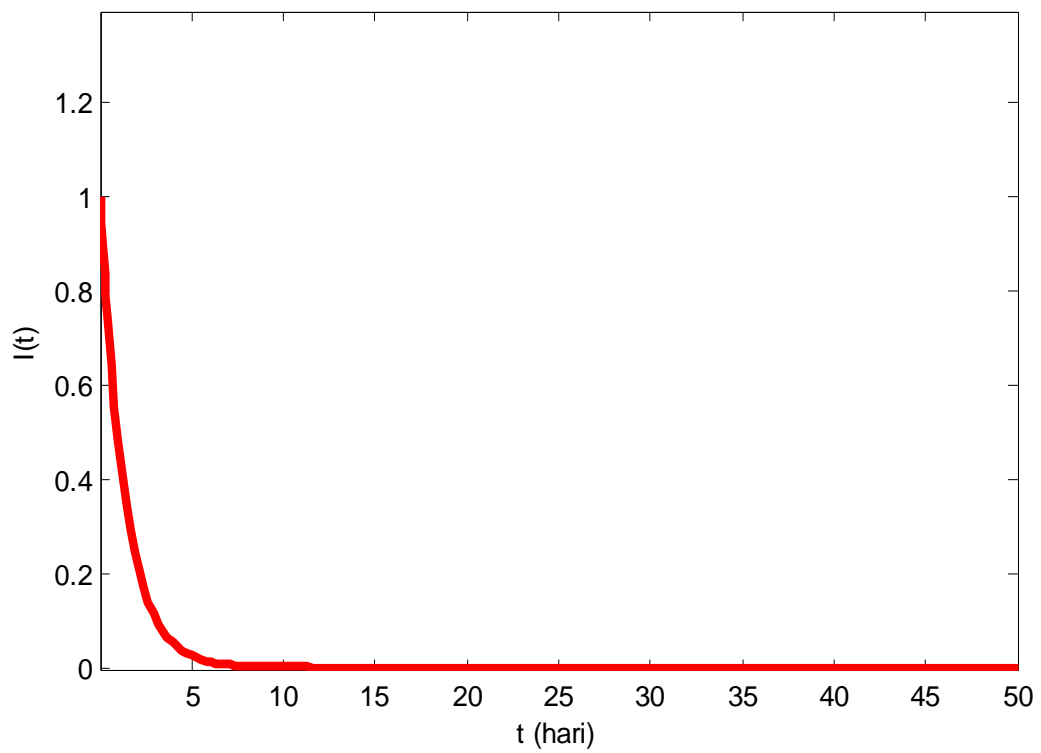
Dengan demikian titik keseimbangan endemik,

$$Q_1 = (8,11,21)$$

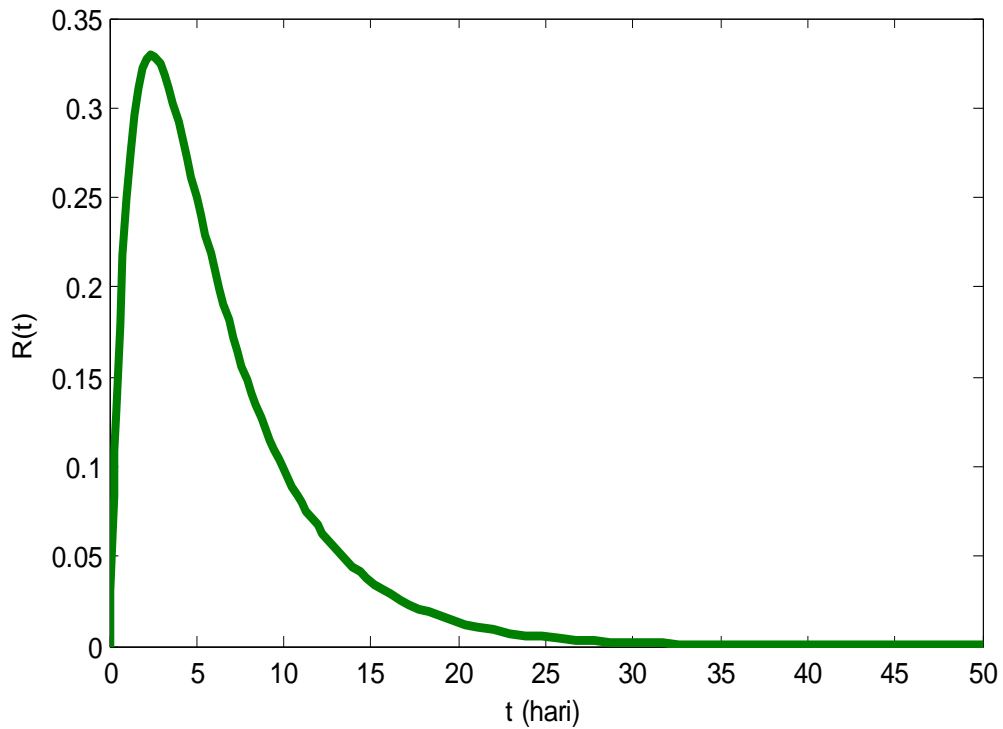
stabil asimptotik. Hasil simulasi untuk nilai $\beta = 0,1$ dapat dilihat pada gambar 5,6, dan 7.



Gambar 2. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

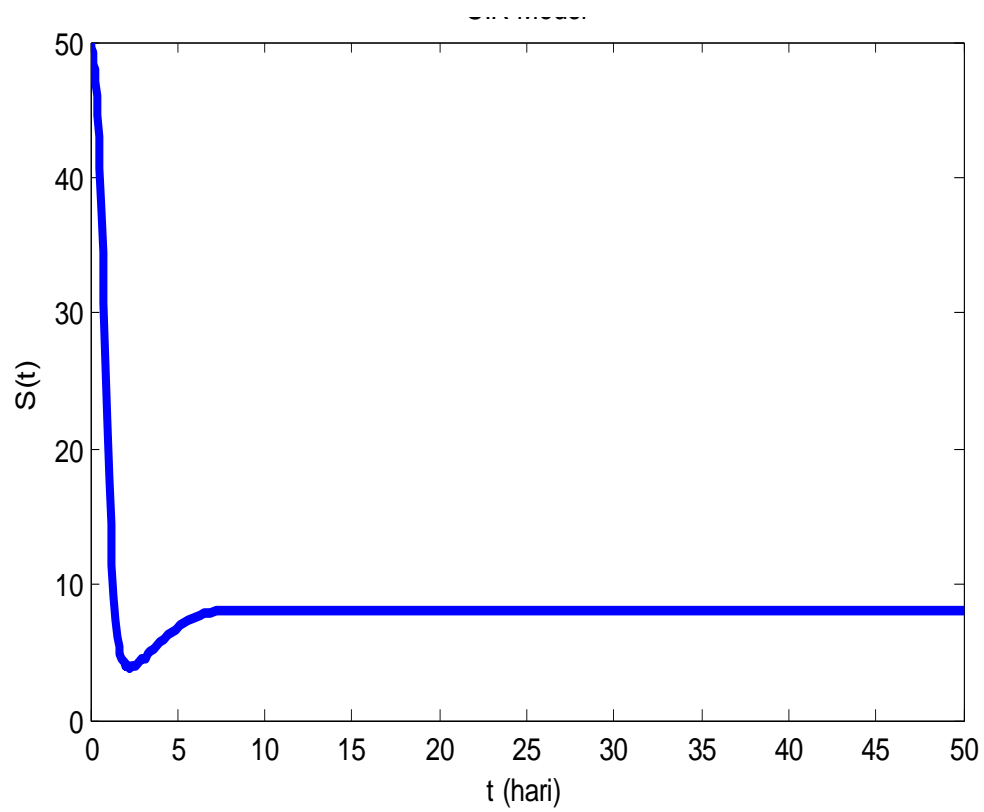


Gambar 3. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

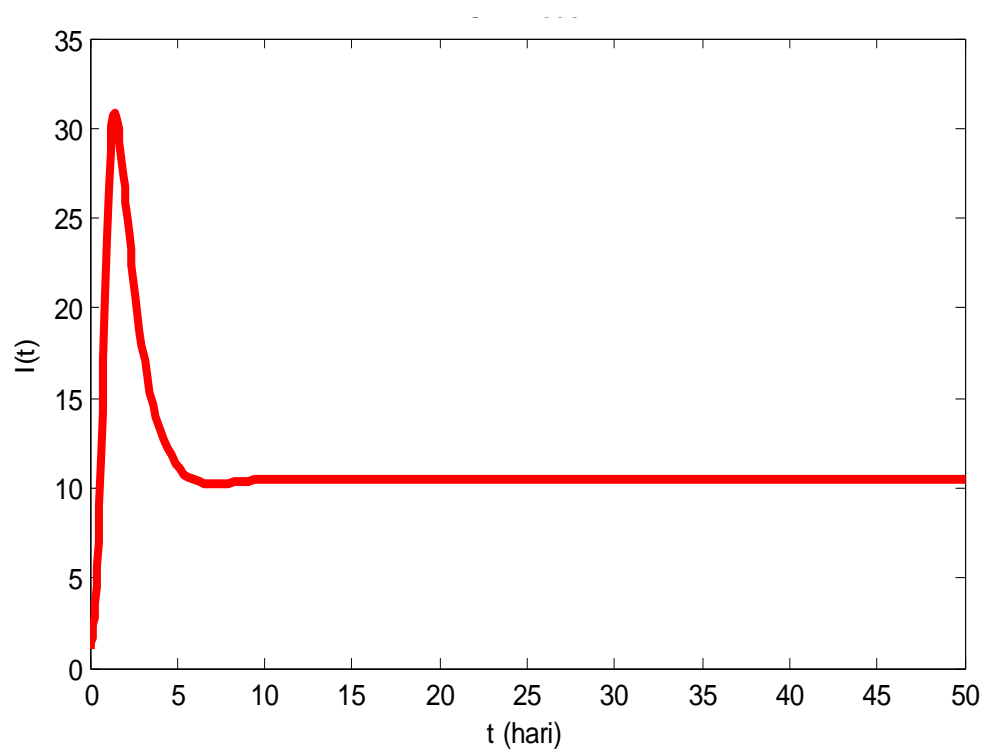


Gambar 4. Populasi individu sembuh terhadap waktu ($\beta = 0,001$)

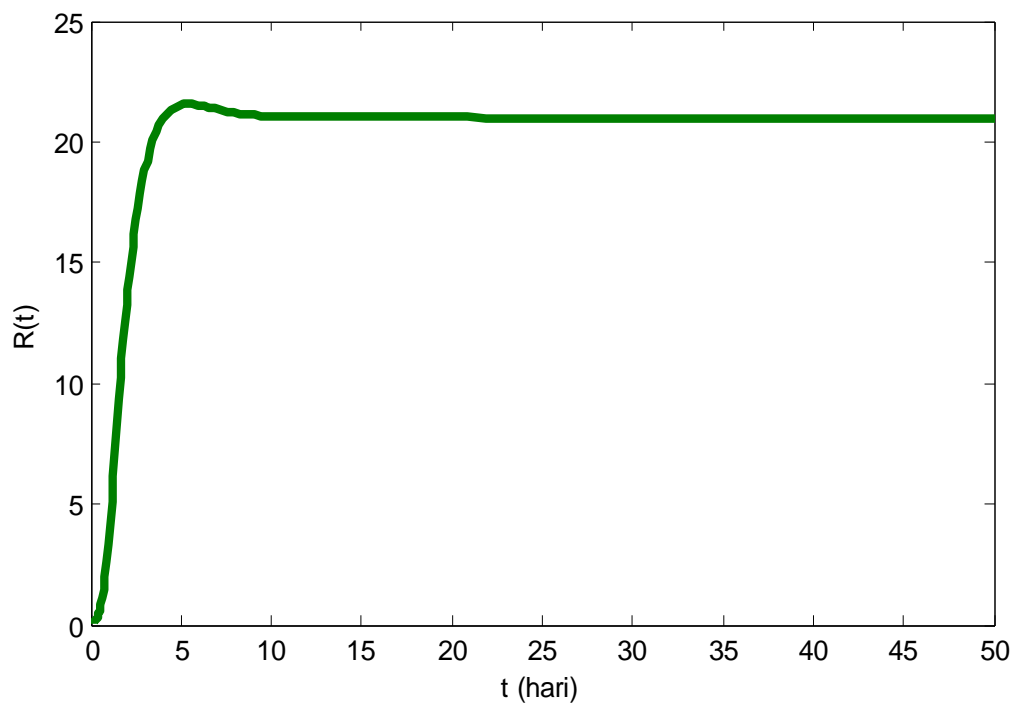
Pada gambar 2,3, dan 4 terlihat bahwa dengan laju kontak yang kecil ($\beta = 0.001$) antara individu terinfeksi dan rentan melalui vektor, jumlah populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan $Q_0 = (50,0,0)$. Jumlah individu rentan dalam waktu yang panjang akan selalu ada dan jumlah individu yang terinfeksi akan habis dan berbanding lurus dengan individu yang sembuh dari penyakit. Pada kondisi ini $R_0 < 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menghilang dalam populasi.



Gambar 5. Populasi individu rentan terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

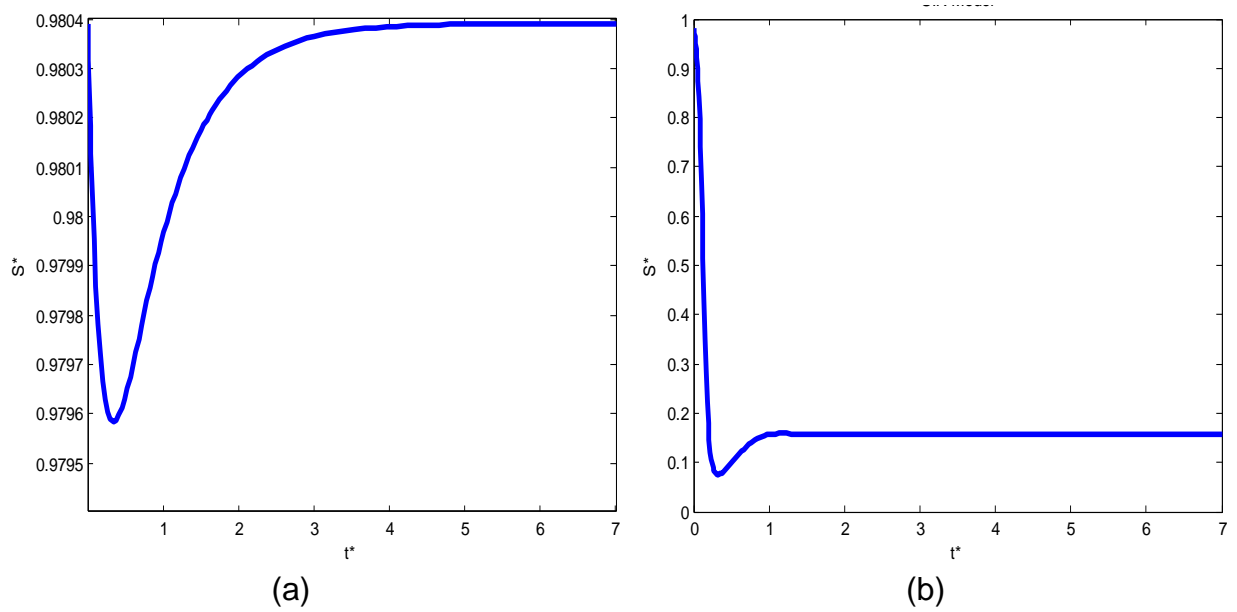


Gambar 6. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

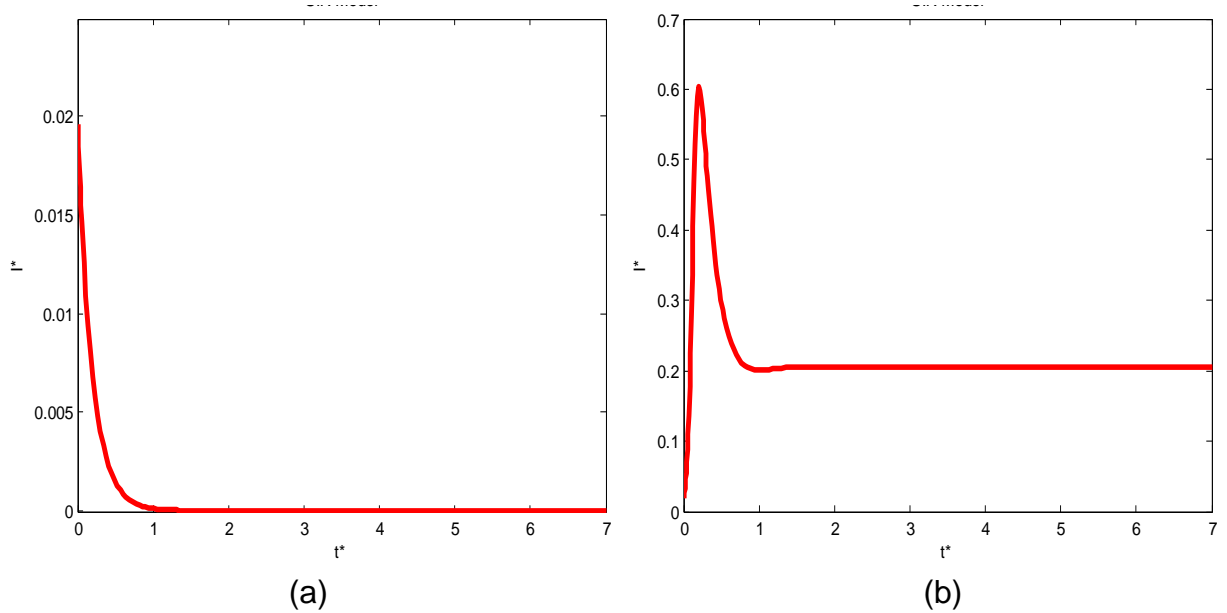


Gambar 7. Populasi individu terinfeksi terhadap waktu ($\beta = 0,1$)

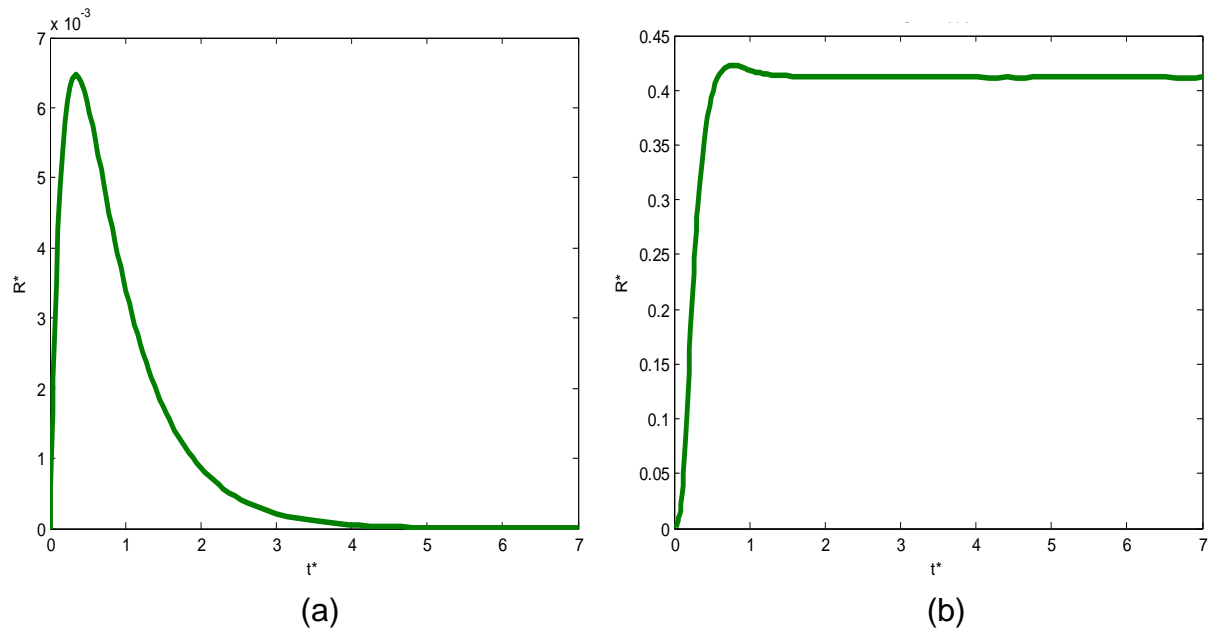
Pada gambar 5,6, dan 7 terlihat bahwa dengan laju kontak yang lebih besar dari sebelumnya ($\beta = 0,1$) antara individu terinfeksi dan rentan melalui vektor, jumlah populasi individu rentan, terinfeksi dan sembuh cenderung stabil dan menuju ke titik keseimbangan $Q_1 = (8,11,21)$. Pada kondisi ini $R_0 > 1$, hal tersebut berarti penyakit akan menyebar dan menjadi wabah dalam populasi.



Gambar 8. Populasi individu rentan pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$



Gambar 9. Populasi individu terinfeksi pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$



Gambar 10. Populasi individu sembuh pada Model SIR non dimensional pada $t^* = \frac{t}{7}$ (a) $\beta = 0,001$ dan (b) $\beta = 0,1$