DAFTAR TABEL

nomor **halaman**

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

nomor **halaman**

DAFTAR ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

Lambang/ singkatan	Arti dan Keterangan
URL	Uniform Resource Locator, adalah rangkaian karakter menurut suatu format standar tertentu, yang digunakan untuk menunjukkan alamat suatu sumber seperti dokumen dan gambar internet. Secara umum, URL adalah "alamat situs internet"
IP	Internet Protocol, adalah deretan angka biner yang dipakai sebagai alamat identifikasi untuk tiap komputer host dalam jaringan Internet
Proxy	Sebuah perantara (sistem komputer atau aplikasi) yang bertindak sebagai perantara permintaan dari pengguna (client) untuk mencari sumber daya dari server lain
DNS	DNS singkatan dari Domain Name Server.Server untuk kepentingan translasi hostname (nama komputer) menjadi IP adress
RFC	Request for Comments, adalah salah satu dari seri dokumen infomasi dan standar Internet bernomor yang diikuti secara luas oleh perangkat lunak untuk digunakan dalam jaringan, Internet dan beberapa sistem operasi jaringan
NIC	Network Interface Card, berfungsi sebagai jembatan dari komputer ke sebuah jaringan komputer
SPAM	Spam atau junk mail adalah penyalahgunaan dalam pengiriman berita elektronik untuk menampilkan berita iklan dan keperluan lainnya yang mengakibatkan ketidaknyamanan bagi para pengguna web
HAM	Ham dalam istilah Internet berarti lawan dari spam
False Negatif	Keadaan ketika filter spam mengklasifikasikan website Spam sebagai Ham.
False Positif	Keadaan ketika filter spam mengklasifikasikan website Ham sebagai Spam

Sumber: Kamus Internet Online

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pengendalian proses variabilitas merupakan salah satu dasar yang digunakan dalam industri untuk meningkatkan kualitas proses produksi. Dalam prakteknya pengendalian proses menggunakan peta kendali.

Peta kendali berdasarkan variabel yang terlibat terbagi atas peta kendali satu variable (univariat) dan peta kendali lebih dari satu variabel (multivariate), (Djauhari, dkk. 2010). Pengendalian proses multivariat merupakan salah satu bagian yang cepat berkembang karena ada banyak situasi real yang melibatkan lebih dari dua karakteristik kualitas proses yang saling berhubungan. Pengendalian proses multivariate ini selanjutnya dikenal sebagai *Multivariate Statistics Process Control* (MSPC).

Peta kendali Shewhort pada umumnya untuk pengendalian rata-rata proses dan variabilitas proses. Pada tesis ini penulis akan membahas tentang peta kendali untuk variabilitas proses. Pada pengendalian variabilitas proses berdasarkan satu variable, praktisi banyak menggunakan peta kendali Standar Deviasi (SD) dan Range (R), sedangkan untuk kasus multivariate pengendalian variabilitas proses menggunakan peta kendali $|S|$, dimana S adalah matriks variasi kovariansi sampel. Pada proses ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang Tr (S^2) yang digunakan untuk masalah statistik pengendalian proses multivariate, dimana Tr (S^2) pertama kali di kembangkan oleh Djauhari (2007).

Dengan demikian maka pada tesis ini akan dikaji tentang pembentukan peta kendali dari variabilitas proses melalui Statistik Vektor Variansi dan akan diaplikasikan pada data curah hujan, suhu udara, kelembaban udara dan kecepatan angin yang merupakan data sekunder BMG Semarang.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan permasalahan tersebut maka penulis memberikan rumusan masalah sebagai bagian dari sistematika penulisan sebagai berikut:

a. Bagaimana mengkaji Vektor Variansi sebagai statistik dalam pengendalian variabilitas dari proses multivariate?
b. Bagaimana mengaplikasikan hasil yang telah diperoleh pada data Sekunder dari Badan Meteorologi dan Geofisika Kota Semarang.

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka tujuan dalam penulisan tesis tersebut adalah sebagai berikut:

a. Melakukan pengkajian tentang Vektor Variansi.

b. Melakukan pengkajian tentang Vektor Variansi dalam pengendalian variabilitas dalam proses multivariate.

c. Menggunakan hasil yang telah diperoleh dari a dan b pada data Sekunder dari Badan Meteorologi dan Geofisika Kota Semarang.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dalam penelitian ini adalah:

a. Menambah wawasan ilmu pengetahuan bahwa ternyata Vektor Variansi dapat digunakan dalam data cuaca dari BMG Kota Semarang.

b. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya.

E. Batasan Masalah

a. Penelitian dibatasi data yang memiliki asumsi yang berdistribusi normal multivariate dengan mengambil banyaknya variabel adalah 4 variabel

b. Penelitian mengambil studi kasus pada data Sekunder dari Badan Meteorologi dan Geofisika Kota Semarang dari tahun 2001 sampai tahun 2005.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Struktur Data Multivariate

Sebuah observasi multivariate adalah koleksi pengukuran (collection of measurements) pada p peubah yang berbeda dalam suatu pengamatan yang sama. Jika *N* observasi sudah diperoleh pada setiap peubah $\mathrm{ke}-i, i = 1,2,\cdots,p$ maka entri *data* dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran *pxN*. Adapun struktur datanya adalah sebagai berikut :

	Item 1	$\cdots$	*Item j*	$\cdots$	*Item N*
Variabel 1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1N}
Variabel 2	x_{21}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2N}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Variabel *i*	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{iN}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Variabel p	x_{p1}	$\cdots$	x_{pj}	$\cdots$	x_{pN}

Dimana :

x_{ij} = menunjukkan nilai tertentu pada variabel ke *i* dan pengamatan ke *j.*

$i = 1,2,\cdots p$, $j = 1,2,\cdots N$

N = ukuran observasi yang diamati

Data ini dapat ditulis dalam susunan (*array*) persegi panjang yang disebut matriks **X** berukuran $p \times N$ (*p* baris dan *N* kolom) , yaitu :

$$X_{p \times N} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{j} & \dots & x_{pN} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Matriks **X** dapat dituliskan dalam bentuk vektor acak dengan *p* variabel sebagai berikut,

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dimana pada setiap vektor X_i , $i = 1,2,\cdots,p$ dilakukan *N* pengukuran, dengan nilai-nilai pengukuran $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iN}$, (Rencher, 2002).

B. Matriks Variansi Kovariansi

Matriks variansi-kovariansi biasa juga di singkat dengan nama matriks kovariansi, dan juga disebut matriks dispersi, (Rencher, 2002). Matriks kovariansi untuk data multivariate pada (2.1) dinyatakan sebagai :

$$\underset{p\times p}{\mathbf{\Sigma}} = Cov(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

dimana,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1}\sum_{k}^{N}(x_{ik} - \mu_i)(x_{jk} - \mu_j)\,, i, j = 1,2,\cdots,p \tag{2.4}$$

$\mu_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{ik}$ yang merupakan mean populasi untuk variabel ke-*i*

$\mu_j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{jk}$ yang merupakan mean populasi untuk variabel ke-*j*

Elemen-elemen diagonal utama $\sigma_{ii} = \sigma_i\sigma_i = \sigma_i^2$ adalah variansi populasi untuk variabel X_i, sedangkan elemen-elemen lainnya $\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j\,, i \neq j$ adalah kovariansi populasi antara variabel X_i dengan X_j. Matriks $\underset{p\times p}{\mathbf{\Sigma}}$ merupakan matriks simetri karena $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,, i, j = 1,2,\cdots p$.

Matriks variansi-kovariansi populasi pada persamaan (2.3) dapat pula dinyatakan dalam bentuk ekspektasi sebagai berikut :

$$\underset{p\times p}{\mathbf{\Sigma}} = E\left[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\right] \tag{2.5}$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{pmatrix}(X_1 - \mu_1 \quad X_2 - \mu_2 \quad \cdots \quad X_p - \mu_p)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)\left(X_p-\mu_p\right) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)\left(X_p-\mu_p\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left(X_p-\mu_p\right)(X_1-\mu_1) & E\left(X_p-\mu_p\right)(X_2-\mu_2) & \cdots & E\left(X_p-\mu_p\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

dimana $E(X_i-\mu_i)\left(X_j-\mu_j\right) = \sigma_{ij}$

Matriks Variansi-Kovariansi Sampel

Misalkan $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_N)$ merupakan vektor acak dari p-*variate* normal dengan parameter $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$. Kemudian, $\overline{\boldsymbol{X}}$ sebagai statistik vektor *mean* sampel dan $\boldsymbol{S}$ sebagai sampel matriks variansi kovariansi sampel dinyatakan sebagai :

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i-\overline{\boldsymbol{X}})^T \tag{2.6}$$

dimana

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X_i} \text{ , adalah vektor mean} \tag{2.7}$$

$\overline{\boldsymbol{X}}_i$: variabel ke-i, $i = 1, 2, \dots, p$

n : ukuran sampel

$\boldsymbol{S}$: matriks variansi kovariansi sampel

p : jumlah variabel, (Anderson, T.W. 2003) matriks variansi-kovariansi untuk sampel pada persamaan (2.6) dapat pula dituliskan sebagai

$$\underset{p\times p}{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

dengan

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_i)\left(x_{jk} - \bar{x}_j\right), i, j = 1,2,\cdots, p \tag{2.9}$$

C. Vektor Variansi (VV)

Pandang $\vec{X}$ adalah vektor acak yang merupakan superposisi dari dua vektor acak $\vec{\mathbf{X}}^{(1)}$ dan $\vec{\mathbf{X}}^{(2)}$, di mana masing-masing berdimensi p dan q, yang dapat dituliskan dalam bentuk partisi sebagai berikut:

$$\underset{(p+q)\times 1}{\vec{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{X}}^{(1)} \\ --- \\ \vec{\mathbf{X}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \vdots \\ X_p^{(1)} \\ --- \\ X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ \vdots \\ X_q^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

dengan vektor mean adalah

$$\underset{(p+q)\times 1}{\vec{\boldsymbol{\mu}}} = E(\vec{\mathbf{X}}) = E\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{X}}^{(1)} \\ --- \\ \vec{\mathbf{X}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(\vec{\mathbf{X}}^{(1)}) \\ --- \\ \mathrm{E}(\vec{\mathbf{X}}^{(2)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)} \\ --- \\ \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

dan matriks variansi kovariansi adalah

$$\underset{(p+q)\times(p+q)}{\boldsymbol{\Sigma}} = E(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\boldsymbol{\mu}})(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\boldsymbol{\mu}})^t \tag{2.12}$$

$$= E\begin{bmatrix} (\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})^t & (\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})^t \\ (\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})^t & (\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})^t & E(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})^t \\ E(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})(\vec{\mathbf{X}}^{(1)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(1)})^t & E(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})(\vec{\mathbf{X}}^{(2)} - \vec{\boldsymbol{\mu}}^{(2)})^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{(p\times p)}{\Sigma_{11}} & | & \underset{(p\times q)}{\Sigma_{12}} \\ -- & | & -- \\ \underset{(q\times p)}{\Sigma_{21} cc} & | & \underset{(q\times q)}{\Sigma_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

dengan $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ adalah merupakan semetri (Richard and Dean , 2002).

Untuk sampel, persamaan (2.13) menjadi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \underset{(p\times p)}{\mathrm{S}_{11}} & | & \underset{(p\times q)}{\mathrm{S}_{12}} \\ -- & | & -- \\ \underset{(q\times p)}{\mathrm{S}_{21}} & | & \underset{(q\times q)}{\mathrm{S}_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} \\ \mathrm{S}_{21} & \mathrm{S}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Djauhari (2007) mengemukakan bahwa Cleroux (1987) menggunakan $Tr(\Sigma_{12} \Sigma_{21})$ untuk mengukur hubungan linear antara dua vektor acak $\vec{X}^{(1)}$ dan

$\vec{X}^{(2)}$. Parameter ini merupakan Vektor Variansi yang merupakan jumlah semua elemen diagonal dari $\Sigma_{12}\Sigma_{21}$. Dengan demikian, seperti yang dikemukakan Djauhari (2007), $Tr(\Sigma_{11}^2)$ dan $Tr(\Sigma_{22}^2)$ secara berturut-turut disebut Vektor Variansi (VV) dari $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$. Jika $p = q = 1$, Vektor Variansi adalah kuadrat dari kovariansi merupakan kuadrat dari variansi klasikal.

Jadi Vektor Variansi (VV) dari $\vec{\mathbf{X}}^{(\mathbf{1})}$ adalah

$$Tr(\Sigma_{11}\Sigma_{11}) = Tr\left(\Sigma_{11}^2\right)$$

dan Vektor Variansi (VV) dari $\vec{\mathbf{X}}^{(\mathbf{2})}$ adalah

$$Tr(\Sigma_{22}\Sigma_{22}) = Tr\left(\Sigma_{22}^2\right)$$

sedangkan Vektor Variansi (VV) dari $\vec{\mathbf{X}}^{(\mathbf{1})}\ \mathrm{dan}\ \vec{\mathbf{X}}^{(\mathbf{2})}$ adalah

$$Tr(\Sigma_{12}\Sigma_{21})$$

dengan *Tr* menyatakan *trace* dari suatu matriks.

Pendekatan distribusi dari $\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(Tr(S^2) - Tr(\Sigma^2)\right)$ adalah distribusi normal dengan rataan (mean) = 0 dan variansi $\sigma^2 =$ 8Tr ($\sum^4$). Nilai dari variansi ini akan digunakan untuk membentuk statistik dalam rangka membuat suatu bagan kendali dari Vektor Variansi.

D. Penaksiran Parameter

Pada umumnya matriks kovarians populasi $\sum$ tidak diketahui, sehingga perlu ditaksir oleh matriks kovariansi sampel **S**. Jika matriks kovariansi sampel S berukuran $p \times p$ sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (2.8), maka $vec(\mathbf{S})$ adalah representasi dari matriks **S** dalam bentuk vektor berukuran $p^2 \times 1$, dinyatakan sebagai berikut :

$$vec(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{p1} \\ s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{p2} \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{1p} \\ s_{2p} \\ \vdots \\ s_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

dibawah asumsi kenormalan, $vec(\mathbf{S})$ konvergen ke distribusi normal p variate, yaitu :

$$vec(\mathbf{S}) \xrightarrow{d} \mathrm{N_p}(vec(\sum), \frac{1}{n-1}\left(I_{p^2+K}\,(\sum \otimes \sum)\right) \tag{2.21}$$

sedangkan $\sqrt{n-1}$ $\{Tr(S^2) - Tr(\Sigma^2)\ \}$ konvergen ke distribusi normal dengan rataan 0 dan variansi $\sigma^2 = 8\,Tr(R^4)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{E}\ \{Tr(S^2)\} = Tr(\Sigma^2) \tag{2.22}$$

dan

$$var\{Tr(S^2)\} = \frac{8}{n-1}Tr(\Sigma^4) \tag{2.23}$$

Pada aplikasi akan diperlukan nilai taksiran tak bias dari $Tr(\Sigma^2)$ dan $Tr(\Sigma^4)$, dimana nilai tersebut berasal dari nilai sampel. Oleh karena itu, Nasrah (2010) menuliskan tentang taksiran tak bias dari $Tr(\Sigma^2)$ dan $Tr(\Sigma^4)$, adalah sebagai berikut :

- Untuk $n_1, n_2, ..., n_m$ berbeda

$$E\left[Tr\left(\overline{S}_{gab}^{\,2}\right)\right] = \left(1+\frac{2}{n-m}\right)^{-1} Tr\left(\overline{S}_{gab}\right)^2,$$

$$\mathrm{var}\left(Tr\left(\overline{S}_{gab}^{\,2}\right)\right) = \frac{8}{n-1}\left\{1+\frac{12}{n-m}+\frac{12}{(n-m)^2}\right\}^{-1} Tr\left(\overline{S}_{gab}\right)^4$$

- Untuk $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n_0$

$$E\left[Tr\left(\overline{S}^2\right)\right] = \left(1+\frac{2}{m(n_0-1)}\right)^{-1} Tr\left(\overline{S}^2\right),$$

$$\mathrm{var}\left(Tr\left(\overline{S}^2\right)\right) = \frac{8}{n_0-1}\left(1+\frac{12}{m(n_0-1)}+\frac{12}{(m(n_0-1))^2}\right)^{-1} Tr\left(\overline{S}^4\right)$$

Dimana :

$n_1, n_2, ..., n_m$ menyatakan jumlah sampel pada sub grup ke-1, 2, ….,m

$$\overline{S}_{gab}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)S_i}{\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)}=\frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)S_i \quad ; \quad \text{dimana} \quad n=\sum_{i=1}^{m}n_i$$

E. Pengendalian Proses Statistik Multivariat*e* (MSPC)

Pengendalian kualitas *multivariate* dalam proses produksi tidak hanya difokuskan untuk memonitoring rata-rata, akan tetapi pemantauan terhadap variasi proses juga. Variabilitas proses *multivariate* dapat dinyatakan dalam bentuk matriks kovariansi $\boldsymbol{S}$ berukuran $p \times p$, dimana elemen diagonal utama merupakan nilai variabilitas dari masing-masing karakteristik kualitas dan elemen selain diagonal utama merupakan nilai kovariansi antar karakteristik kualitas.

Pengendalian kualitas multivariate dilakukan apabila ada korelasi antara variabel sehingga tidak dapat dilakukan pengendalian proses secara sendiri-sendiri karena jika hal itu dilakukan akan menimbulkan kesalahan dalam pengambilan kesimpulan. Oleh karena itu, pengendalian haruslah secara bersamaan yang kemudian disebut dengan pengendalian proses multivariate, Montgomery (2001).

Pengendalian kualitas multivariate biasanya dilakukan untuk mengendalikan vektor mean dan variabilitas proses. Pada tugas akhir ini akan dikaji tentang pengendalian variabilitas proses multivariate. Para peneliti pendahuluan telah melakukan penelitian ini salah satunya Sindelar (2007) yang mendalami tentang statistik determinan S, determinan R, G, dan W. Pada tugas akhir ini akan dikaji tentang bagaimana Vektor Variansi diaplikasikan untuk pengendalian proses multivariate pada data cuaca di kota Semarang. Vektor Variansi ini pertama kali diperkenalkan oleh Djauhari (2007), dan telah terbukti bahwa variansi vektor ini merupakan suatu ukuran dispersi multivariate. (Djauhari 2008, 2011).

F. Beberapa Definisi dan Rumus-rumus pendukung

1. Perkalian Kronecker

Definisi 2.1

Misalkan A dan B dua buah matriks masing-masing berukuran $m \times n$ dan $p \times q$, maka perkalian Kronecker (*Kronecker product*) dari A dan B dinotasikan sebagai $A \otimes B$, yaitu suatu matriks berukuran $mp \times nq$ didefinisikan sebagai,

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11}\mathrm{B} & \mathrm{a}_{12}\mathrm{B} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}\mathrm{B} \\ \mathrm{a}_{21}\mathrm{B} & \mathrm{a}_{22}\mathrm{B} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}\mathrm{B} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}\mathrm{B} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}\mathrm{B} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Contoh

Misalkan matriks $\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\underset{2\times 2}{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

(a) $\underset{2\times 3}{\mathrm{A}} \otimes \underset{2\times 2}{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 6\mathrm{B} & 5\mathrm{B} & 4\mathrm{B} \\ 1\mathrm{B} & 2\mathrm{B} & 3\mathrm{B} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 5\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 4\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{\mathrm{A}} \otimes \underset{2\times 2}{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 24 & 6 & 20 & 5 & 16 & 4 \\ 18 & 12 & 15 & 10 & 12 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 12 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \underset{4\times 6}{\mathrm{C}} \text{ dan}$$

(b) $$\underset{2\times 2}{\mathrm{B}} \otimes \underset{2\times 3}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 4\mathrm{A} & 1\mathrm{A} \\ 3\mathrm{A} & 2\mathrm{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 30 & 16 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ 18 & 15 & 12 & 12 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \underset{4\times 6}{\mathrm{D}}$$

Tampak bahwa $\underset{2\times 3}{\mathrm{A}} \otimes \underset{2\times 2}{\mathrm{B}} \neq \underset{2\times 2}{\mathrm{B}} \otimes \underset{2\times 3}{\mathrm{A}}$ (tidak komutatif)

2. Matriks Komutasi (The Commutation Matrix)

Matriks komutasi adalah sebuah matriks bujur sangkar, dimana setiap kolom dan setiap barisnya hanya mengandung sebuah unsur 1 pada posisi (i, j) dan yang lainnya adalah nol. Matriks komutasi ini banyak digunakan ketika perhitungan momen dari distribusi normal multivariate. Matriks komutasi dapat dibangun dengan memanfaatkan matriks-matriks identitas

Definisi 2.2

Misalkan H_{ij} matriks berukuran $m \times n$ yang hanya mempunyai elemen 1 pada posisi (i,j) dan yang lainnya adalah nol. Maka matriks Komutasi yang berukuran $mn \times mn$ dinotasikan dengan K_{mn} dan didefinisikan sebagai

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(H_{ij} \otimes H_{ij}^{t}\right) \tag{2.24}$$

dimana matriks H_{ij} diperoleh dari kolom-kolom matriks identitas I_m dan I_n.

Misalkan $\mathbf{e}_{i,m}$ adalah kolom $ke - i$ dari matriks I_m dan $\mathbf{e}_{j,n}$ adalah kolom $ke - j$ dari matriks I_n ,maka

$$H_{ij} = \mathbf{e}_{i,m}\mathbf{e}_{j,n}^{t} \tag{2.25}$$

Contoh

Misalkan diberikan dua matriks identitas

$$I_{m=2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } I_{n=3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kolom pertama dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan kolom pertama dari I_3 adalah $\mathbf{e}_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka

$$H_{11} = \mathbf{e}_{1,2}\mathbf{e}_{1,3}^{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $H_{11} \otimes H_{11}^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

kolom pertama dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$dan kolom kedua dari I_3 adala $\mathbf{e}_{3,3} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, maka

$$\mathrm{H}_{12} = \mathbf{e}_{1,2}\mathbf{e}_{2,3}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

sehingga $\mathrm{H}_{12} \otimes \mathrm{H}_{12}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

kolom pertama dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ dan kolom ketiga dari I_3 adalah $\mathbf{e}_{3,3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, maka

$$\mathrm{H}_{13} = \mathbf{e}_{1,2}\mathbf{e}_{3,3}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

sehingga $\mathrm{H}_{13} \otimes \mathrm{H}_{13}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

kolom kedua dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{2,2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dan kolom pertama dari I_3 adalah

$\mathbf{e}_{1,3} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, maka

$$\mathrm{H}_{21} = \mathbf{e}_{2,2}\mathbf{e}_{1,3}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

sehingga $\mathrm{H}_{21} \otimes \mathrm{H}_{21}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

kolom kedua dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{2,2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$dan kolom kedua dari I_3 adalah $\mathbf{e}_{3,3} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, maka

$$\mathrm{H}_{22} = \mathbf{e}_{2,2}\mathbf{e}_{2,3}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

sehingga $\mathrm{H}_{22} \otimes \mathrm{H}_{22}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

kolom kedua dari I_2 adalah $\mathbf{e}_{2,2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dan kolom ketiga dari I_3 adalah $\mathbf{e}_{3,3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, maka

$$\mathrm{H}_{23} = \mathbf{e}_{2,2}\mathbf{e}_{2,3}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

sehingga $\mathrm{H}_{23} \otimes \mathrm{H}_{23}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

diperoleh Matriks komutasinya adalah

$$\mathrm{K}_{2.3} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\sum_{\mathrm{j}=1}^{3}\left(\mathrm{H}_{\mathrm{ij}} \otimes \mathrm{H}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{t}}\right)$$

$$= \sum_{\mathrm{i}=1}^{2}\{(\mathrm{H}_{\mathrm{i}1} \otimes \mathrm{H}_{\mathrm{i}1}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{\mathrm{i}2} \otimes \mathrm{H}_{\mathrm{i}2}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{\mathrm{i}3} \otimes \mathrm{H}_{\mathrm{i}3}^{\mathrm{t}})\}$$

$$= [(\mathrm{H}_{11} \otimes \mathrm{H}_{11}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{12} \otimes \mathrm{H}_{12}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{13} \otimes \mathrm{H}_{13}^{\mathrm{t}})] + [(\mathrm{H}_{21} \otimes \mathrm{H}_{21}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{22} \otimes \mathrm{H}_{22}^{\mathrm{t}}) + (\mathrm{H}_{23} \otimes \mathrm{H}_{23}^{\mathrm{t}})]$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $K_{23} = K_{32}^{t}$ (sifat)

Matriks Simetri dan Matriks diagonal

Definisi 2.3 (Matriks simetri)

Suatu matiks bujur sangkar **A** dikatakan **simetri** jika $A = A^t$ atau $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j \in N$

Definisi 2.4 (Matriks diagonal)

Matriks diagonal adalah suatu matriks bujur sangkar yang <u>semua elemen</u> yang <u>bukan diagonal utama</u> adalah <u>nol</u>.

Definisi 2.5 (Trace Matriks)

Trace dari matriks bujur sangkar A_{nxn} didefinisikan sebagai jumlah elemen-elemen diagonal utamanya, ditulis :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

<u>**Sifat-sifat Trace Matriks**</u>

Misalkan matrik A berukuran m x n dan B berukuran n x m, maka matrik A dan B berukuran m x m. Berlaku

(a). $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

(b) $Tr(AB) = Tr(BA)$

(c) $Tr(A) = Tr(A^t)$

3. Operator *Vec*

Operator yang mentransformasikan matriks kedalam bentuk vektor disebut “operator *vec*” disingkat “vec". Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$

dengan kolom ke-i adalah $\boldsymbol{a_i}$ **,** maka $vec(A)$ adalah sebuah vektor berukuran $mn \times 1$ dan dinyatakan sebagai

$$vec(A) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

yakni suatu matriks di transformasi ke dalam bentuk vektor, dimana kolom-kolom matriks disusun menjadi 1 kolom saja sehingga membentuk vec.(Schott, JR,1997)

Contoh

Misal matiks $\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, maka $vec(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Hubungan antara vec dengan perkalian kroneker dapat dilihat dari sifat berikut

$$vec(\boldsymbol{ab^t}) = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} \tag{2.27}$$

Dimana $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ dua buah vektor berukuran sama

Contoh

Misalkan diberikan dua vektor berukuran sama 3×1, yakni

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

a. $\boldsymbol{ab^t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.2 & 1.5 \\ 3.0 & 3.2 & 3.5 \\ 4.0 & 4.2 & 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 8 & 20 \end{bmatrix}$

b. $vec(\boldsymbol{ab^t}) = vec\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 8 & 20 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{a} \\ 5\boldsymbol{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ 5\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

Tampak bahwa $vec(\boldsymbol{ab^t}) = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$